	한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

(1) 조건 (나) $f(m)f(n) = f(m+n)+f(m-n)$로부터

$f(x)=p^x+q^x$ 에서 $f(0)=p^0+q^0=2$ 이므로 $f(0)=2$.

자연수 $m=1, n=1$ 이면 $f(1)f(1) = f(2)+f(0)$ 이므로 $f(2)=7$.

자연수 $m=2, n=1$ 이면 $f(2)f(1) = f(3)+f(1)$ 이므로 $f(3)=18$.

[별해] 자연수 $n=1$ 이면 $f(m)f(1) = f(m+1)+f(m-1)$ 이므로,

점화식 $f(m)=3f(m-1)-f(m-2)$ 을 이용하면

$f(0)=2$, $f(1)=3$ 이므로 $f(2)=7$ 이고 $f(3)=18$.

(2) 점화식 $f(m)=3f(m-1)-f(m-2)$ 을 이용하면

모든 자연수 m에 대해서 $p^{m+2}+q^{m+2} = 3(p^{m+1}+q^{m+1})$ - (p^m+q^m)이다.

따라서 모든 자연수 m에 대해서 $p^m(p^2-3p+1)+q^m(q^2-3q+1)=0$ 만족되어야 한다.

$p=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이면 $p^2-3p+1=0$ 이다.

조건으로 부터 $p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 이다.

[별해] $f(1)=p+q = 3$, $f(2)=p^2+q^2 = 7$ 로부터 $9=(p+q)^2= p^2+q^2+2pq = 7+2pq$ 이다.

따라서 $pq=1$.

$q=3-p$ 를 $pq=1$ 에 대입하면 $p^2-3p+1=0$. 따라서 $p=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이다.

$p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ 이면 $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

$p=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 이면 $q=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$

(3) $f(x)=p^x+q^x$이므로

$f(x)$ 는 미분가능한 함수이며 도함수는 $f'(x)=p^x\ln p+q^x\ln q$

$f'(0)=\ln p+\ln q=\ln pq=0$; 문제 (2)에서 $p*q=(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}))*(\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}))=1$. $f'(0)<1$ 이다.

$f'(1)=p\ln p+q\ln q>1$; $\ln p+\ln q=0$이므로 $\ln q=-\ln p$ 이고 $p-q=\sqrt{5}>2$이므로

$f'(1)=p\ln p+q\ln q=(p-q)\ln p=\sqrt{5}\,ln\,p$.

또한, $p^2=\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})>3>e$ 이므로 $f'(1)=\sqrt{5}\,ln\,p>2\ln p>\ln p^2>1$

따라서 $f'(1)=\sqrt{5}\,ln\,p>1$.

$f'(x)$는 구간 $[0,1]$에서 연속함수 이며, $f'(0) < 1 < f'(1)$이므로, 중간값 정리에 의해서 $f'(a) = 1$ 이 되는 a는 구간 $[0,1]$에서 적어도 한 개가 존재한다.

어떤 값 $0 \le b \le 1$에 대해 $f'(b) = 1$ 이라 하자. $f''(x) = p^x(\ln p)^2 + q^x(\ln q)^2$ 이고 0 이 아닌 모든 실수 x 에 대해서 $f''(x) > 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 음이 아닌 실수 x에 대해서 연속하는 증가함수이다. 따라서 $0 \le x < b$에 대해 $f'(x) < f'(b)$이며 $b < x \le 1$에 대해 $f'(b) < f'(x)$이다. 즉, $f'(a) = 1$이 되는 a는 구간 $[0,1]$에 단 한 개만 존재한다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. $r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \leq 1$인 경우

$a_{m,1}=\int_0^{(-r)^{\frac{1}{m}}}(1+\frac{y^m}{r})dy=(-r)^{\frac{1}{m}}+\frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}=(-r)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{m}{m+1}$이고 $b_{m,1}=1-(-r)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{m}{m+1}$이다.

극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0$ 이다.

$r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \geq 1$인 경우

$a_{m,1}=\int_0^1(1+\frac{y^m}{r})dy=1+\frac{1}{r(m+1)}$이고 $b_{m,1}=-\frac{1}{r(m+1)}$이다.

극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0$ 이다.

2. $r>0,\ (r(n-1))^{\frac{1}{m}} \geq n$인 경우

$a_{m,n}=\int_0^n(1+\frac{y^m}{r})dy=n+\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$이고 $b_{m,n}=n^2-n-\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$이다.

$r>0,\ (r(n-1))^{\frac{1}{m}} \leq n$인 경우

$a_{m,n}=\int_0^{(r(n-1))^{\frac{1}{m}}}(1+\frac{y^m}{r})dy+n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}})=(r(n-1))^{\frac{1}{m}}+\frac{(r(n-1))^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}+n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}})$이고

$b_{m,n}=n^2-(r(n-1))^{\frac{1}{m}}-\frac{(r(n-1))^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}-n(n-(r(n-1))^{\frac{1}{m}})$이다.

m이 큰 수이면 $(r(n-1))^{\frac{1}{m}} \leq n$인 경우가 되므로 극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,n}}=\frac{n-1}{n^2-n+1}$ 이다.

3. $r<0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \geq n$인 경우

$a_{m,n}=\int_0^n(1+\frac{y^m}{r})dy=n+\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$이고 $b_{m,n}=n^2-n-\frac{n^{m+1}}{r(m+1)}$이다.

$r>0,\ (-r)^{\frac{1}{m}} \leq n$인 경우

$a_{m,n}=\int_0^{(-r)^{\frac{1}{m}}}(1+\frac{y^m}{r})dy=(-r)^{\frac{1}{m}}+\frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}$이고 $b_{m,n}=n^2-(-r)^{\frac{1}{m}}-\frac{(-r)^{1+\frac{1}{m}}}{r(m+1)}$이다.

m이 큰 수이면 $(-r)^{\frac{1}{m}} \leq n$인 경우가 되므로 극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,n}}=\frac{n^2-1}{1}=n^2-1$ 이다.

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계

출제 의도 및 평가 지침

1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 해결할 수 있는 문제를 출제하였다. 수열의 성질과 함수의 연속성 그리고 도함수의 성질을 잘 이해하고 있는가를 평가하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	초항 $f(0)$을 가지고 $f(3)$을 정확히 구하였는가?	20점
2	40	점화식 $f(m)=3f(m-1)-f(m-2)$ 형태를 유도 하였는가? (20점) 유도된 점화식으로 모든 자연수 m에 대해서 방정식 $p^m(p^2-3p+1)+q^m(q^2-3q+1)=0$ 이려면 $p=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ 이어야 하고, 그중에서 조건의 (가)와 (나)를 만족하는 p,q 는 $p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ 임을 올바로 알고 있는가?(20점)	40점
		별해 : $f(1)=p+q$ = 3, $f(2)=p^2+q^2$ = 7 로부터 $p^2-3p+1=0$를 유도하고 $p=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $q=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$.	40점
3	40	도함수 $f'(x)$형태를 올바로 구하였는가?	10점
		도함수 $f'(x)$는 연속이고 $f'(0)<1$, $f'(1)>1$ 이므로 $f'(0)=\ln p+\ln q=\ln pq=0 < 1$, $f'(1)=\sqrt{5}\,ln\,p>2\ln p>\ln p^2>1$ 임을 보였는가?	10점
		중간값의 정리에 의해 $f'(a)=1$를 만족하는 해가 $[0,1]$에 한 개 이상 존재하는 것을 설명하였는가?	10점
		$f'(x)$는 구간 $[0,1]$에서 증가함수임을 보였는가? 따라서 해는 단 한 개임을 설명하였는가?	10점

3. 출제 근거

수학 I : 지수함수, 수열(점화식)

수학 II : 여러 가지 함수의 미분법(지수함수의 미분법), 함수의 연속(중간값의 정리),
도함수의 활용(함수의 증가와 감소)

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 모의논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교에서 정상적으로 교육을 받았는가를 평가하기 위하여, 기초적인 적분의 의미와 기본적인 극한의 성질을 이해하고 있는가를 평가하는 항목으로 이공계 대학의 교육에 기본적인 능력을 파악하기 위한 문제이다.

본 문항은 적분과 통계에 나와 있는 다항함수의 적분을 잘 이해하고 있는지와 수학I의 극한의 성질을 잘 활용할 수 있는지를 판단하기 위한 아주 기본적인 문항이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	$a_{m,1}$과 $b_{m,1}$을 구하기	10
		극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}$ 구하기	10
2	40	$a_{m,n}$과 $b_{m,n}$을 구하기	20
		극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}$ 구하기	20
3	40	$a_{m,n}$과 $b_{m,n}$을 구하기	20
		극한 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}$ 구하기	20

3. 출제 근거 :

<제시문> 좌표와 도형 및 함수의 그래프/ 극한의 성질 (수학Ⅰ)

<문제> 다항함수의 적분과 적분의 의미 및 도형의 넓이(적분과 통계), 극한의 정의와 의미(수학Ⅰ)

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$f(x)=p^x+q^x$, $f(1)=3$, $f(0)=p^0+q^0=1+1=2$

$f(m)f(n)=f(m+n)+f(m-n)$

$m=1, n=1$을 대입하면 $f(1)^2=f(2)+f(0)$ $\Rightarrow f(2)=f(1)^2-f(0)=3^2-2=7$

$m=2, n=1$을 대입하면 $f(2)f(1)=f(3)+f(1)$ $\Rightarrow f(3)=f(2)f(1)-f(1)=7\cdot 3-3=18$

$\therefore f(3)=18$

[문제 1-2]

$f(1) = p^1 + q^1 = p+q = 3 \quad \cdots (1)$

$f(2) = p^2+q^2 = 7$

$pq = \frac{1}{2}\left((p+q)^2 - (p^2+q^2)\right) = \frac{1}{2}(3^2-7) = 1 \quad \cdots (2)$

식 (1), (2)에서, 근과 계수의 관계에 의해 $x^2-3x+1=0$은 해로 p와 q를 갖는다.

$x^2-3x+1=0$ 의 해는 $x = \frac{3+\sqrt{3^2-4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 또는 $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore p = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, q = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $p = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, q = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

2

[문제 1-3]

$f(x) = p^x + q^x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x$

$f'(x) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$g(x) = f'(x) - 1$ 이라 두면 $g(x)$는 모든 실수 구간에서 미분가능하다. $\cdots(*)$

$g(0) = 1\cdot\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1\cdot\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1 = \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \ln 1 - 1 = -1$

$g(1) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$> \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \left(\because \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$

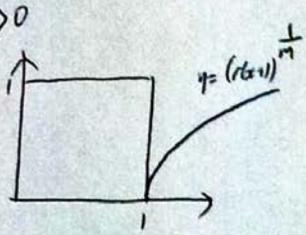
$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \qquad \therefore g(0) = -1,\ g(1) > 0 \cdots(1)$

$g'(x) = f''(x) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x\left(\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x\left(\ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 > 0 \cdots(2)$

$(*)$와 (1)에 의해서, 중간값의 정리에 의해 $g(x)=0$은 $[0,1]$에서 적어도 하나의 근을 갖고,
(2)에 의해 $g(x)=0$은 두 개의 근 이상 가질 수 없다.
따라서 $g(x) = f'(x) - 1 = 0$은 $[0,1]$에서 정확히 하나의 근을 가진다.
$\therefore f'(a) = 1$ 이 되는 $a \in [0,1]$은 1개이다.

[문제 2-1]

i) $r>0$

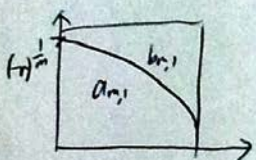


$a_{m,1}=1,\ b_{m,1}=0 \quad \therefore \lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0$

ii) $r<0$

$y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$의 y절편은 ~~$(-r)$~~ $(-r)^{\frac{1}{m}}$ 이다.

① $(-r)^{\frac{1}{m}}\le 1 \Leftrightarrow -r\le 1$



$a_{m,1}=\int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx=\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1=0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(-r)^{\frac{m+1}{m}}=\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

$b_{m,1}=1-a_{m,1}=1-\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

~~$\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{1-\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}}{\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}}$~~

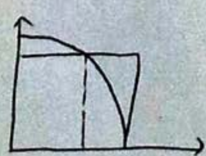
~~$\lim_{m\to\infty}a_{m,1}=\frac{m}{m+1}$~~ $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}=1,\ \lim_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1$ (by (나))

$\therefore$ by (다), $\lim_{m\to\infty}a_{m,1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}\lim_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1\cdot1=1$

$\lim_{m\to\infty}b_{m,1}=\lim_{m\to\infty}(1-a_{m,1})=0$

$\therefore$ by (다), $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,1}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,1}}=\frac{0}{1}=0$

② $(-r)^{\frac{1}{m}}>1 \Leftrightarrow -r>1$



~~곡선과~~ 곡선 $y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$과 $y=1$의 교점 $(x_0,1)$ $\exists\ (r(x_0-1))^{\frac{1}{m}}=1 \Leftrightarrow r(x_0-1)=1 \Leftrightarrow x_0=1+\frac{1}{r}$

~~$\exists a_{m,1}=\int_{x_0}^1(r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx=\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_{1+\frac{1}{r}}^1=0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}1^{\frac{m+1}{m}}=-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r},\ b_{m,1}=1-a_{m,1}=1+\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}$~~

~~$\therefore\lim_{m\to\infty}a_{m,1}=-\frac{1}{r},\ \lim_{m\to\infty}b_{m,1}=\lim_{m\to\infty}(1-a_{m,1})=1+\frac{1}{r}$~~

~~$\therefore$ by (다), $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,1}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,1}}=\frac{1+\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r}}=-r-1$~~

$\exists a_{m,1}=1\cdot x_0+\int_{x_0}^1(r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx=1+\frac{1}{r}+\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_{1+\frac{1}{r}}^1=1+\frac{1}{r}+\left(0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}\cdot1^{\frac{m+1}{m}}\right)=1+\frac{1}{m+1}\frac{1}{r},\ b_{m,1}=1-a_{m,1}=-\frac{1}{r}\frac{1}{m+1}$

$\therefore\lim_{m\to\infty}a_{m,1}=1,\ \lim_{m\to\infty}b_{m,1}=0$; by (다), $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,1}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,1}}=\frac{0}{1}=0$

한양대학교

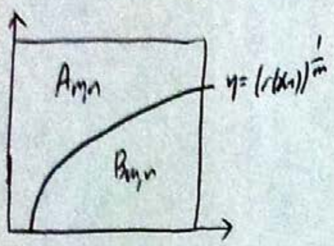
답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

곡선 $y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$ 의 $x=n$ 에서의 y값: $(r(n-1))^{\frac{1}{m}}$

i) $(r(n-1))^{\frac{1}{m}} \le n$



$$b_{m,n}=\int_1^n (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx=\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_1^n=\frac{m}{m+1}r^{\frac{1}{m}}(n-1)^{\frac{m+1}{m}}$$

$\cancel{\lim_{m\to\infty} b_{m,n}}$ $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}=1$, (나)에 의해 $\lim_{m\to\infty} r^{\frac{1}{m}}=1$, $\lim_{m\to\infty}(n-1)^{\frac{m+1}{m}}=(n-1)^1=n-1$

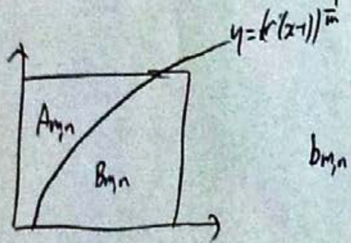
∴(다)에 의해 $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}r^{\frac{1}{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}\lim_{m\to\infty}r^{\frac{1}{m}}=1\cdot1=1$,

$\lim_{m\to\infty} b_{m,n}=\left(\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}r^{\frac{1}{m}}\right)\left(\lim_{m\to\infty}(n-1)^{\frac{m+1}{m}}\right)=1\cdot(n-1)=n-1$, $\cancel{a_{m,n}=n^2-b_{m,n}=n^2-n+1}$

$a_{m,n}=n^2-b_{m,n}=n^2-\frac{m}{m+1}r^{\frac{1}{m}}(n-1)^{\frac{m+1}{m}}$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}=\lim_{m\to\infty}(n^2-b_{m,n})=n^2-n+1$

∴(라)에 의해, $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}=\frac{\lim_{m\to\infty} b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty} a_{m,n}}=\frac{n-1}{n^2-n+1}$

ii) $(r(n-1))^{\frac{1}{m}} > n$



곡선 $y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$ 과 $y=n$ 의 교점 (x_0, n) ∋ $(r(x_0-1))^{\frac{1}{m}}=n$ $\quad rx_0-r=n^m$ $\quad$ ∴ $x_0=\frac{n^m}{r}+1$

$$b_{m,n}=\int_1^{x_0}(r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx+n(n-x_0)$$

$$=\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_1^{x_0}+n(n-x_0)=\left(\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}\left((r(x_0-1))^{\frac{1}{m}}\right)^{m+1}-0\right)+n(n-x_0)$$

$$=\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}n^{m+1}+n\left(n-\frac{n^m}{r}-1\right)=n^2-n-\frac{1}{m+1}\frac{n^{m+1}}{r}$$

$$a_{m,n}=n^2-b_{m,n}=\frac{n^{m+1}}{r}\frac{1}{m+1}+n$$

하지만 여기서 $m\to\infty$의 극한을 적용하면,

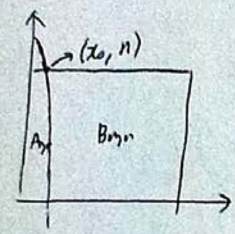
$\lim_{m\to\infty}(r(n-1))^{\frac{1}{m}}=1>n$ 이 되어 $n>1$인 조건에 모순이다.

따라서 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}$의 계산은 i)에서만 가능하다.

[문제 2-3]

곡선 $y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$의 y절편 : $(-r)^{\frac{1}{m}}$

i) $(-r)^{\frac{1}{m}} > n$



$$(r(x_0-1))^{\frac{1}{m}}=n \Leftrightarrow r(x_0-1)=n^m \Leftrightarrow x_0=\frac{n^m}{r}+1$$

$$a_{m,n}=nx_0+\int_{x_0}^{1}(r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = nx_0+\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_{x_0}^{1}$$

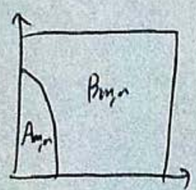
$$=nx_0+\left(0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}\left((r(x_0-1))^{\frac{1}{m}}\right)^{m+1}\right)=nx_0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}n^{m+1}=n+\frac{1}{m+1}\frac{n^{m+1}}{r}$$

$$b_{m,n}=n^2-a_{m,n}=n^2-n-\frac{1}{m+1}\frac{n^{m+1}}{r}$$

하지만 여기서 $m\to\infty$의 ~~극~~ 극한을 적용시키면, $\lim_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1>n$ 이 되어 $n>1$ 이라는 조건에 모순된다.

따라서 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}$ 의 논의는 ii)에서만 가능하다.

ii) $(-r)^{\frac{1}{m}} \le n$



$$a_{m,n}=\int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx=\left[\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1$$

$$=0-\frac{m}{m+1}\frac{1}{r}(-r)^{\frac{m+1}{m}}=\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$$

$$b_{m,n}=n^2-a_{m,n}=n^2-\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$$

$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}=1,\ \lim_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1$ ($\because$ (나)에 의해)

$\therefore$ (다)에 의해 $\lim_{m\to\infty}a_{m,n}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+1}\lim_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1\cdot1=1$

$\lim_{m\to\infty}b_{m,n}=\lim_{m\to\infty}(n^2-a_{m,n})=n^2-1$

$\therefore$ (다)에 의해 $\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}}=\frac{\lim_{m\to\infty}b_{m,n}}{\lim_{m\to\infty}a_{m,n}}=\frac{n^2-1}{1}=n^2-1$

한양대학교	답안지 (자연계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

$f(0)=p^0+q^0=1+1=2$ 이다.

(나) 조건에 $m=n=1$을 대입하면 $f(1)f(1)=f(2)+f(0)$ 이므로

$f(2)=f(1)f(1)-f(0)=3\times3-2=7$이다.

(나) 조건에 ~~m=n~~ $m=2,\ n=1$을 대입하면 $f(2)f(1)=f(3)+f(1)$ 이므로

$f(3)=f(2)f(1)-f(1)=7\times3-3=18$ 이다.

$\therefore \boxed{f(3)=18}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

(나) 조건에 의하면

$f(m)f(n) = (p^m+q^m)(p^n+q^n) = p^{m+n}+q^{m+n}+p^mq^n+p^nq^m$ 이고,

$f(m+n) = p^{m+n}+q^{m+n}$, $f(m-n) = p^{m-n}+q^{m-n}$ 이므로 $p^{m+n}+q^{m+n}+p^mq^n+p^nq^m = p^{m+n}+q^{m+n}+p^{m-n}+q^{m-n}$ 이다.

$\therefore$ $p^mq^n+p^nq^m = p^nq^n(p^{m-n}+q^{m-n}) = p^{m-n}+q^{m-n}$ 인데, $p^{m-n}+q^{m-n}>0$ 이고

모든 자연수 n에 대해 공식이 만족하므로 $n=1$ 대입 $\Rightarrow$ $pq=1$ 이다.

또한 (가) 조건에 의해 $f(1) = p+q = 3$ 이므로

p, q는 $t^2-3t+1=0$ 의 두 실근이다. (근과 계수의 관계에 의해).

$\therefore$ 이차 방정식의 근의 공식에 의해 $p, q = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$\therefore$ $\boxed{(p, q) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$

[문제 1-3]

일반성을 잃지 않고 $p=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$라 두자.

$f(x)=p^x+q^x$ 이므로 $f'(x)=p^x\cdot\ln p+q^x\cdot\ln q$. $f''(x)=p^x\cdot(\ln p)^2+q^x\cdot(\ln q)^2$ 이다.

$p^x, q^x, (\ln p)^2, (\ln q)^2>0$ 이므로 $f''(x)>0$ 이고, $f'(x)$는 항상 증가함수 이다.

$f'(0)=p^0\ln p+q^0\ln q=\ln p+\ln q=\ln pq=\ln 1=0$,

$f'(1)=p\ln p+q\ln q=\ln\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]=\ln\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]+\ln\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]$

$=\ln\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\sqrt{5}}\right]+\ln 1=\sqrt{5}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 근데 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}>2>\sqrt{e}$ 이므로 ($\because \sqrt{5}>2$, $e^2<4$)

$\sqrt{5}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)>2\ln\sqrt{e}=1$ $\therefore f'(0)=0$. $f'(1)>1$. $f'(x)$는 증가함수

$\therefore$ $\boxed{f'(a)=1 \text{ 이 되는 } a\text{는 구간 } [0,1]\text{에 } 1\text{개 존재함.}}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

① $r>0$

$x>1 \Rightarrow r(x-1)>0 \quad \therefore y(r(x-1))^{\frac{1}{m}}>0$ $\qquad x=1 \Rightarrow y=0$

$x<1 \Rightarrow r(x-1)<0$ $\left[\begin{array}{l} m=\text{짝수} : \text{존재X} \\ m=\text{홀수} : y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}<0 \end{array}\right.$

$\therefore r>0 \Rightarrow y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$는 S와 (1, 1)에서만 만남. $\therefore a_{m,1}=1, b_{m,1}=0.$

②$r<0$

$x>1 \Rightarrow r(x-1)<0$ $\left[\begin{array}{l} m=\text{짝수} : \text{존재X} \\ m=\text{홀수} : y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}<0 \end{array}\right]$ S와 안 겹침.

$x<1 \Rightarrow r(x-1)>0 \Rightarrow y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}>0 \Rightarrow x=0 : y=(-r)^{\frac{1}{m}}$

1) $(-r)^{\frac{1}{m}} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq r<0$

$a_{m,1}=\int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}} dx=\left[\frac{1}{r} \times \frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1=-\frac{1}{r} \times \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{m+1}{m}}$

$=(-r)^{\frac{1}{m}} \times \frac{m}{m+1}, \quad b_{m,n}=1-a_{m,n}=1-(-r)^{\frac{1}{m}} \times\left(\frac{m}{m+1}\right)$

2) $(-r)^{\frac{1}{m}}>1 \Rightarrow r<-1 \Rightarrow y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$과 $y=1$ 교점 $\Rightarrow x=\frac{r+1}{r}$

$a_{m,1}=1 \times \frac{r+1}{r}+\int_{\frac{r+1}{r}}^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}} dx=\frac{r+1}{r}+\left[\frac{1}{r} \times \frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_{\frac{r+1}{r}}^1$

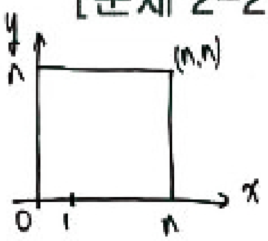
$=\frac{r+1}{r}+\left(-\frac{1}{r} \times \frac{m}{m+1}\right)=1+\frac{1}{r} \times \frac{1}{m+1}, \quad b_{m,1}=\frac{-1}{r} \times \frac{1}{m+1}$

$r>0 \Rightarrow a_{m,1}=1, b_{m,1}=0, \quad \lim_{m \to \infty} \frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0.$

$\cancel{r<0 \Rightarrow}$ $-1 \leq r<0 \Rightarrow a_{m,1}=(-r)^{\frac{1}{m}} \times \frac{m}{m+1}, \quad b_{m,1}=1-(-r)^{\frac{1}{m}} \times\left(\frac{m}{m+1}\right), \quad \lim_{m \to \infty} \frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0$

$r<-1 \Rightarrow \cancel{b_m} \; a_{m,1}=1+\frac{1}{(m+1)r}, \quad b_{m,1}=\frac{-1}{r(m+1)} \quad \lim_{m \to \infty} \frac{b_{m,1}}{a_{m,1}}=0$

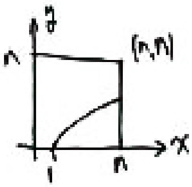
[문제 2-2] $r>0,\ n>1.$



$\Rightarrow F\quad x>1 \Rightarrow r(x-1)>0 \quad \therefore (r(x-1))^{\frac{1}{m}}>0.$

$x<1 \Rightarrow r(x-1)<0 \left[\begin{array}{l}(r(x-1))^{\frac{1}{m}}<0 \ (m=\text{홀수}) \\ \text{존재 X} \ (m=\text{짝수})\end{array}\right]$ S와 겹치지 않음

① $x=n \Rightarrow (r(n-1))^{\frac{1}{m}} \le n \Rightarrow r \le \frac{n^m}{n-1}$



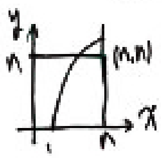
$\Rightarrow b_{m,n} = \int_1^n (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = \left[\frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_1^n$

$= \frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}\times r^{\frac{m+1}{m}}\times(n-1)^{\frac{m+1}{m}} = r^{\frac{1}{m}}\times\frac{m}{m+1}\times(n-1)^{\frac{m+1}{m}},\quad a_{m,n}=n^2-b_{m,n}$

$a_{m,n} = n^2 - r^{\frac{1}{m}}\times\frac{m}{m+1}(n-1)^{\frac{m+1}{m}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{m\to\infty} b_{m,n} = 1\times1\times(n-1)^1 = n-1.$

$\therefore \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = n^2 - \lim_{m\to\infty} b_{m,n} = n^2-n+1$

② $r > \frac{n^m}{n-1}$



$\rightarrow y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$ 과 $y=n$의 교점의 x좌표: $(r(x-1))^{\frac{1}{m}}=n \quad \therefore x-1=\frac{n^m}{r} \quad \therefore x=1+\frac{n^m}{r}$

$\Rightarrow b_{m,n} = \int_1^{1+\frac{n^m}{r}} (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx + n\times\left(n-\frac{n^m}{r}-1\right) = \left[\frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_1^{1+\frac{n^m}{r}} + n^2-\frac{n^{m+1}}{r}-n$

$= \frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}\times r^{\frac{m+1}{m}}\times\left(\frac{n^m}{r}\right)^{\frac{m+1}{m}} + n^2 - \frac{n^{m+1}}{r} - n = \frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}\times n^{m+1} - \frac{n^{m+1}}{r} + n^2 - n$

$= n^2-n-\frac{1}{m+1}\cdot\frac{n^{m+1}}{r},\quad a_{m,n}=n^2-b_{m,n} = n+\frac{1}{m+1}\cdot\frac{n^{m+1}}{r},$ m증가 $\Rightarrow r<\frac{n^m}{n-1}$

$0<r\le\frac{n^m}{n-1} \Rightarrow a_{m,n} = n^2-r^{\frac{1}{m}}\times\frac{m}{m+1}(n-1)^{\frac{m+1}{m}},\quad b_{m,n}=r^{\frac{1}{m}}\times\frac{m}{m+1}(n-1)^{\frac{m+1}{m}}$

$r>\frac{n^m}{n-1} \Rightarrow a_{m,n} = n+\frac{1}{m+1}\times\frac{n^{m+1}}{r},\quad b_{m,n}=n^2-n-\frac{1}{m+1}\times\frac{n^{m+1}}{r}$

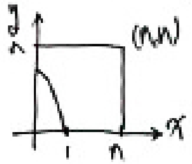
$\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = \frac{n-1}{n^2-n+1}$

[문제 2-3]

$r<0,\ n>1$

$\Rightarrow x<1 \Rightarrow r(x-1)>0 \quad \therefore (r(x-1))^{\frac{1}{m}}>0 \ /\ x>1 \Rightarrow r(x-1)<0 \left[\begin{array}{l}(r(x-1))^{\frac{1}{m}}<0 \ (m=\text{홀수}) \\ \text{존재 X} \ (m=\text{짝수})\end{array}\right]$ S와 겹치지 않음

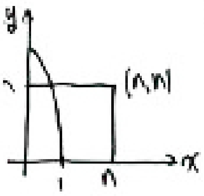
① $x=0 \Rightarrow (r(-1))^{\frac{1}{m}} \le n \Rightarrow r \ge -n^m$



$\Rightarrow a_{m,n} = \int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = \left[\frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1 = -\frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

$b_{m,n} = n^2 - a_{m,n} = n^2 - \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}} \quad \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 1\times 1 = 1,\ \lim_{m\to\infty} b_{m,n} = n^2-1$

② $r < -n^m$



$\Rightarrow y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$과 $y=n$의 교점의 x좌표 : $(r(x-1))^{\frac{1}{m}}=n \quad \therefore x-1 = \frac{n^m}{r} \Rightarrow x = 1+\frac{n^m}{r}$

$\Rightarrow a_{m,n} = n\cdot\left(1+\frac{n^m}{r}\right) + \int_{1+\frac{n^m}{r}}^{1} (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = n + \frac{n^{m+1}}{r} + \left[\frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_{1+\frac{n^m}{r}}^{1}$

$= n + \frac{n^{m+1}}{r} - \frac{1}{r}\times\frac{m}{m+1}\times(n^m)^{\frac{m+1}{m}} = n + \frac{n^{m+1}}{r} - \frac{n^{m+1}}{r}\times\frac{m}{m+1} = n + \frac{1}{m+1}\times\frac{n^m}{r}$.

$b_{m,n} = n^2 - a_{m,n} = n^2 - n - \frac{1}{m+1}\times\frac{n^m}{r}$, m 증가 $\Rightarrow r \ge -n^m$

$-n^m \le r < 0 \Rightarrow a_{m,n} = \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}},\quad b_{m,n} = n^2 - \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

$r < -n^m \Rightarrow a_{m,n} = n + \frac{1}{m+1}\times\frac{n^m}{r},\quad b_{m,n} = n^2 - n - \frac{1}{m+1}\times\frac{n^m}{r}$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = n^2-1$$

수험번호	성 명	페이지
		1/6

[문제 1-1]

(가) 조건에 의해, $f(1) = p + q = 3$.

또, $p, q \neq 0$ 이니 $f(0) = p^0 + q^0 = 1 + 1 = 2$ 이다.

$f(0)$ 와 $f(1)$ 의 값을 구했으니 (나) 조건을 이용하여

$f(m)f(1) = f(m+1) + f(m-1)$ 에서 $f(1) = 3$ 이니

$f(m+1) = 3f(m) - f(m-1)$ 을 이용하여 $f(3)$ 을 구할수 있다.

$f(2) = 3f(1) - f(0) = 9 - 2 = 7$.

$f(3) = 3f(2) - f(1) = 21 - 3 = 18$

$\therefore f(3) = 18$

1

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

1-1에서

$f(0) = p^0 + q^0 = 2$

$f(1) = p + q = 3$

$f(2) = p^2 + q^2 = 7$

$f(3) = p^3 + q^3 = 18$ 임을 안다.

이때, $p^3 + q^3 = (p+q)(p^2 - pq + q^2) = 18$, $p+q = 3$ 이니,

$p^2 - pq + q^2 = 6$ $\therefore$ $pq = p^2 + q^2 - 6 = 7 - 6 = 1$.

따라서 $p+q = 3$, $pq = 1$ 이다.

이를 이용하여 근과 계수와의 관계를 이용하면,

p, q는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이다.

근의 공식으로 $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\therefore (p, q) = \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$ 또는 $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]

$f'(x) = (\ln p)\, p^x + (\ln q)\, q^x$ 이다.

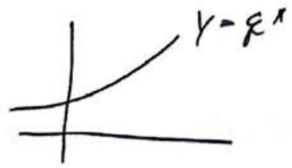
1-2 에서, $pq=1$ 임을 구하였으니 $p = \frac{1}{q}$ 이다.

$\therefore f'(x) = \left(\ln \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q}\right)^x + (\ln q)\, q^x$

$= -\ln q\, (q)^{-x} + (\ln q)\, q^x$

$= \ln q\, (q^x - q^{-x})$ 이다. 여기서 $f'(0) = \ln q\, (1-1) = 0$ 이다

i) $q = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, $p = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$



$\ln q > 1$ 이며,

$g(x) = q^x - q^{-x}$ 라 하면, $g'(x) = \ln q\, (q^x + q^{-x}) > 0$.

$\therefore$ $g(x)$는 증가함수.

이때, $g(0) = 0$, $g(1) = q - \frac{1}{q} = q - p = \sqrt{5}$.

따라서 $f'(x) = (\ln q)(g(x))$ 이므로

$f'(0) = 0$, $f'(1) = \sqrt{5}\ln q > 1$ 인 증가함수이다.

$f'(x)$는 연속함수 이므로, 중간값 정리에 의해,

어떤 $a \in (0,1)$ 이 있어 $f'(a) = 1$ 이다.

또, $f'(x)$는 증가함수 이므로 그러한 a는 유일하다.

$\therefore$ $[0,1]$ 에서 $f'(a)=1$ 인 a는 유일하게 한개 존재한다.

ii) $p = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, $q = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$f'(x) = \ln q\, (q^x - q^{-x}) = \ln p\, (p^x - p^{-x})$ 이니, i)과 같은 방식으로 a는 유일하게 존재한다.

$\therefore$ $[0,1]$ 에서 $f'(a)=1$ 인 a는 유일하게 1개 존재한다.

[문제 2-1]

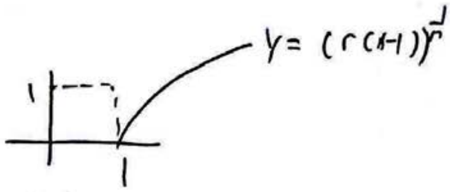
$y=a^{\frac{1}{m}}$ 의 그래프 $(m\in N)$ 는 $a\geq 0$ 일때만 정의된다.

즉, $f(x) = y=(r(x-1))^{\frac{1}{m}}$ 의 그래프는 r의 부호에 따라 정의역이 변한다.

i) $r>0$

$r(x-1)\geq 0$, 즉 $x\geq 1$ 일때 함수가 정의된다.

그래프는, 오른쪽과 같다.

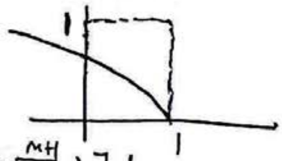


임의의 자연수 m에 대하여, $a_{m,1}=1$, $b_{m,1}=0$ 이다.

$\therefore \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

ii) $-1\leq r<0$.

$f(0)=(-r)^{\frac{1}{m}}$ 이니 그래프는 오른쪽과 같다.



$a_{m,1} = \int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = \left[\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{m}{m+1}\cdot(r(x-1))^{\frac{m+1}{m}}\right]_0^1$

$= 0 - \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{m+1}{m}} = \dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

$b_{m,1} = 1-a_{m,1} = 1-\dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$

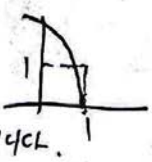
이때, $-r>0$ 이니 $\lim\limits_{m\to\infty}(-r)^{\frac{1}{m}}=1$ 이다 (∵ 제시문 (나))

$\therefore \lim\limits_{m\to\infty} a_{m,1} = \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}} = 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} b_{m,1} = 1-\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,1} = 0.$

$\therefore$ 제시문 (다) 에 의해 $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = \dfrac{\lim b_{m,1}}{\lim a_{m,1}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

iii) $r<-1$.

$f(0)=(-r)^{\frac{1}{m}}>1$ 이니 그래프는 오른쪽과 같다.



이때, $f(x)=1$ 인 x는 $r(x-1)=1$, 즉 $x=1+\frac{1}{r}$ 일 때이다.

$a_{m,1} = 1\cdot(1+\frac{1}{r}) + \int_{1+\frac{1}{r}}^{1}(r(x-1))^{\frac{1}{m}}dx = 1+\frac{1}{r}+\left(0-\frac{1}{r}\frac{m}{m+1}(1)^{\frac{m+1}{m}}\right) = 1+\frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}$

$b_{m,1} = 1-a_{m,1} = -\frac{1}{r}\frac{m}{m+1}$. $\therefore \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = -\dfrac{\frac{1}{r}}{1+\frac{1}{r}} = -\dfrac{1}{r+1}$

$\therefore \begin{cases} a_{m,1}=1,\ b_{m,1}=0,\ \lim \dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = 0 & (r>0) \\ a_{m,1}=\dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}},\ b_{m,1} = 1-\dfrac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}},\ \lim\dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = 0 & (-1\leq r<0) \text{ 이다.} \\ a_{m,1} = 1+\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{m}{m+1},\ b_{m,1} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{m}{m+1},\ \lim\dfrac{b_{m,1}}{a_{m,1}} = -\dfrac{1}{r+1} & (r<-1)\end{cases}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

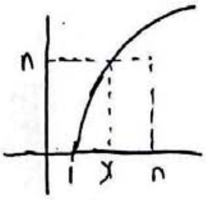
[문제 2-2]

$n>1$, $r>0$ 일때는 $x\geq 1$ 일 때 함수가 정의된다.

이때, $f(x) = (r(x-1))^{\frac{1}{m}}$ 이니,

$r > \frac{n^m}{(n-1)}$ 일 때와 $r \leq \frac{n^m}{(n-1)}$ 일 때 그래프의 개형이 달라진다.

i) $r > \frac{n^m}{(n-1)}$



$f(n) > n$ 이니, 그래프는 왼쪽과 같다.

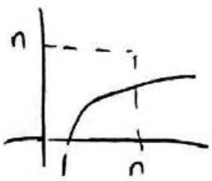
이때, $f(x) = n$ 인 x는 $x = 1 + \frac{n^m}{r}$ 이다.

$$\therefore\ b_{m,n} = \left(n - \left(1+\frac{n^m}{r}\right)\right)\cdot n + \int_1^{1+\frac{n^m}{r}} (r(x-1))^{\frac{1}{m}}$$

$$= n^2 - n - \frac{n^{m+1}}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}\left(n^m\right)^{\frac{m+1}{m}} = n^2 - n - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{n^{m+1}}{r}$$

$$a_{m,n} = n^2 - b_{m,n} = n + \frac{1}{m+1}\,\frac{n^{m+1}}{r}$$

ii) $r \leq \frac{n^m}{n-1}$



$f(n) \leq n$ 이니, 그래프는 왼쪽과 같다.

$$b_{m,n} = \int_1^n (r(x-1))^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}\left(\left(r(n-1)\right)^{\frac{m+1}{m}} - 0\right)$$

$$a_{m,n} = n^2 - b_{m,n} = n^2 - \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}\left(r(n-1)\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

m이 ∞으로 발산할 때는 r은 항상 $\frac{n^m}{(n-1)}$ 보다 작다.

즉, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty}\left(n^2 - \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}\left(r(n-1)\right)^{\frac{m+1}{m}}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(n^2 - \frac{m(n-1)}{m+1}\cdot 1\right)$

$= n^2 - n + 1$ ($\because$ 조건 (나), (다) 에 의해)

$\lim_{m\to\infty} b_{m,n} = n-1$ ($\because$ 조건 (나), (다) 에 의해)

$$\therefore\ \lim_{m\to\infty}\frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = \frac{n-1}{n^2-n+1} = \frac{n-1}{n^2-n+1}\ //$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

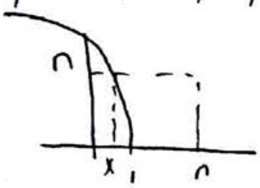
수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$n>1$, $r<0$ 일때는 $x \le 1$ 일때 함수가 정의된다.

이때, $f(0) = (-r)^{\frac{1}{m}}$ 이니, $-r > n^m$ 일때와 $-r \le n^m$ 일때 그래프의 개형이 달라진다.

i) $-r > n^m$, 즉 $r < -n^m$.



$f(0) = (-r)^{\frac{1}{m}} > n$ 이니 그래프는 왼쪽과 같다.

이때, $f(x) = n$ 된 x는

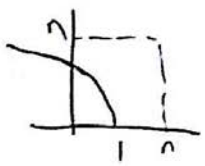
$(r(x-1)) = n^m$ 이니 $x = 1 + \frac{n^m}{r}$ 이다.

$$a_{m,n} = \left(1+\frac{n^m}{r}\right)\cdot n + \int_{1+\frac{n^m}{r}}^{1} (r(x-1))^{\frac{1}{m}}\,dx$$

$$= n + \frac{n^{m+1}}{r} + \left(0 - \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}\cdot n^{m+1}\right) = n + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{n^{m+1}}{r}$$

$$b_{m,n} = n^2 - a_{m,n} = n^2 - n - \frac{1}{m+1}\frac{n^{m+1}}{r}$$

ii) $-r \le n^m$, 즉 $r \ge -n^m$



$f(0) = (-r)^{\frac{1}{m}} \le n$ 이니 그래프는 왼쪽과 같다.

$$a_{m,n} = \int_0^1 (r(x-1))^{\frac{1}{m}}\,dx = 0 - \frac{1}{r}\cdot\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{m+1}{m}}$$

$$= \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$$

$$b_{m,n} = n^2 - a_{m,n} = n^2 - \frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}$$

m이 ∞로 발산할 때는 r은 항상 $-n^m$ 보다 크다.

즉, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}(-r)^{\frac{1}{m}}\right) = 1$ (∵ 제시문 나)

$\lim_{m\to\infty} b_{m,n} = \lim_{m\to\infty}(n^2 - a_{m,n}) = n^2 - 1$

∴ $\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m,n}}{a_{m,n}} = n^2 - 1$ (∵ 제시문 다)