한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 오후2 [문제 1번]에서는 고교수학과정 중 ‘기하와 벡터’의 ‘이차곡선’ 단원에 속하는 내용인 타원의 방정식을 중심으로, 좌표평면에 있는 원, 타원, 다각형, 직선 등의 도형들에 대한 주어진 정보를 적절히 해석, 적용하고 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다. 좌표평면에서 주어진 특정 조건을 만족하는 점의 자취인 곡선을 분석하고, 이 곡선의 흥미로운 성질들을 이끌어 내는 것이 주된 내용이며, 다음 3개의 문항으로 구성되어 있다.

문항 1. 좌표평면에 있는 원과 관련된 특정 성질을 만족하는 점의 자취인 곡선의 방정식을 구하기.
문항 2. 주어진 직선이 위에서 구한 곡선의 접선이 되기 위한 조건을 분석하기.
문항 3. 특정 조건을 만족하는 타원 내부의 삼각형의 넓이를 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	주어진 조건을 만족하는 점의 자취가 타원이 됨을 설명한다.	20
		이 타원의 방정식을 구한다.	10
2	30	주어진 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구한다.	10
		이 직선이 위에서 구한 타원의 접선이 되는지 판정한다.	20
3	40	주어진 각에 대한 조건을 삼각형의 변에 대한 조건으로 변형한다.	20
		주어진 각이 최대일 때, 대응되는 삼각형의 넓이를 구한다.	20

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서 기하와 벡터 – 이차곡선 – 타원 단원의 주요내용을 다루고 있다. 각각의 3개 문항은 교과서 및 EBS 수능특강 교재의 내용과 다음과 같이 연계되며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용만으로 구성되어 있다.

문항 1: 교과서 기하와 벡터 (지학사 이강섭 외 3인) – II 이차곡선 - 2. 타원
p.57 타원의 정의, 성질, 방정식. p.61 타원의 평행이동, p.68 종이접기로 만드는 타원
문항 2: 교과서 기하와 벡터 (교학사 김수환 외 13인) – II 이차곡선 – 2. 타원
p.53 타원과 직선의 위치관계, 판별식
문항 3. 2016학년도 수능대비 EBS 수능특강 수학영역 기하와 벡터 – p.53 대표기출문제

한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	출제 의도 및 평가 지침	오후(2)-2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생은 누구나 해결할 수 있는 문제를 고등학교 교과과정의 범위에서 출제하였다. 자연계 오후2의 문제 2번은 정적분으로 함수가 주어졌을 때, 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함수를 구하고, 함수로 만들어진 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이와 이를 회전하여 얻어진 회전체의 부피를 구하는 문제이다. 이 문제는 고등학교 수학교과에서 중요하게 다루어지는 분야에 속할 뿐만 아니라 적분단원의 전형적인 문제이다. 이를 통해 학생들이 학교교육을 성실히 이수했는지를 평가하고자 출제되었다.

세부적으로 정적분으로 주어진 함수를 부정적분을 이용해 구할 수 있는지를 묻는 문항, 함수의 곡선과 직선들로 이루어진 영역을 회전하여 얻은 입체의 부피를 구하는 문항과 곡선과 직선들로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문항으로 이루어져 있다. 그러므로 정적분에 대한 이해와 정적분의 응용인 부피와 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 적분단원의 전형적인 문제이다. 이는 미분과 적분의 이해를 통한 수학적 사고능력의 배양과 문제 해결능력을 키우고, 논리적 사고와 응용에 적용하는 능력을 측정할 수 있다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	정적분으로 주어진 함수를 구했는가?	10
		정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함수를 정확히 구하여 최댓값의 차이를 정확히 구했는가?	10
2	30	함수 $f(x)$와 x축사이의 영역의 회전으로 얻은 입체의 부피를 구했는가?	15
		함수 $g(x)$와 x축사이의 영역의 회전으로 얻은 입체의 부피를 구하여 문제에서 구하고자 하는 부피를 정확히 구했는가?	20
3	40	구간에 따라 달라지는 함수 $g(x)$를 정확히 구했는가?	25
		함수 $g(x)$와 주어진 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구했는가?	20

3. 출제 근거

▶ 교과서:

- ► 적분과 통계 (미래엔, 유희찬),
  - 세부단원: 정적분, 정적분의 활용
  - p. 36−42, 58−70
- ► 적분과 통계 (좋은책 신사고, 황선욱),
  - 세부단원: 정적분, 정적분의 활용
  - p. 39−42, 54−63

▶ EBS교재:

- ► 수능특강 적분과 통계: 정적분
  - p. 40−47
- ► 수능완성 수학 B형: 적분법
  - p. 112−123, 실전편: p. 18−25

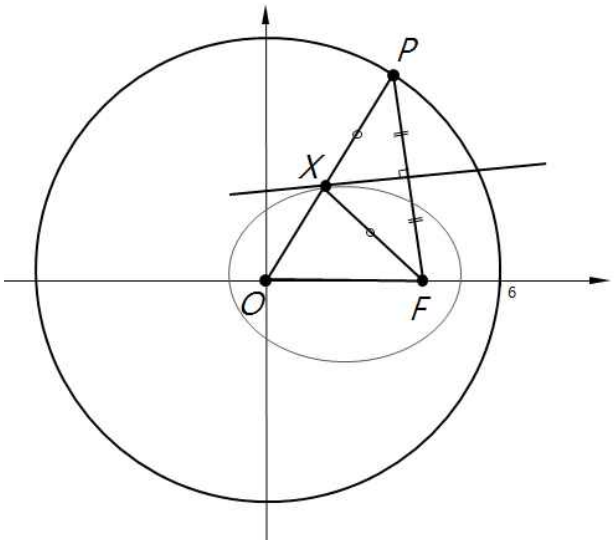
문항 1: 정적분으로 주어진 함수의 계산과 정적분과 미분과의 관계를 이용한 함수 계산 및 최댓값을 계산하는 문제

문항 2: 곡선과 직선들로 둘러싸인 영역을 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구하는 문제

문항 3: 곡선과 직선들로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 문제

자 연 계	한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	오후(2)-1번

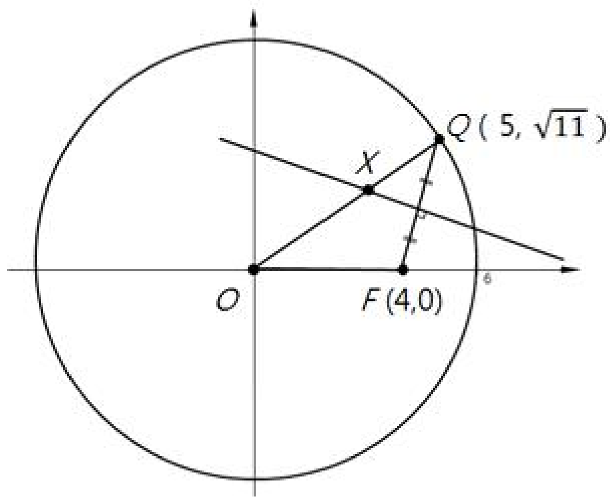
1.



(1) 원 위의 임의의 점 P에 대해 점 X는 항상 $\overline{XP}=\overline{XF}$을 만족하고 $\overline{OX}+\overline{XF}=\overline{OX}+\overline{XP}=\overline{OP}=6$으로 일정하므로 점 X의 자취 C는 두 점 O와 F로부터 거리의 합이 6인 점들의 집합, 즉 타원이다.

(2) 이 타원 C는 초점이 $(-2,0)$과 $(2,0)$이고 거리의 합이 6인 타원인 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$를 x축으로 2만큼 평행 이동한 타원이므로 그 방정식은 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 이다.

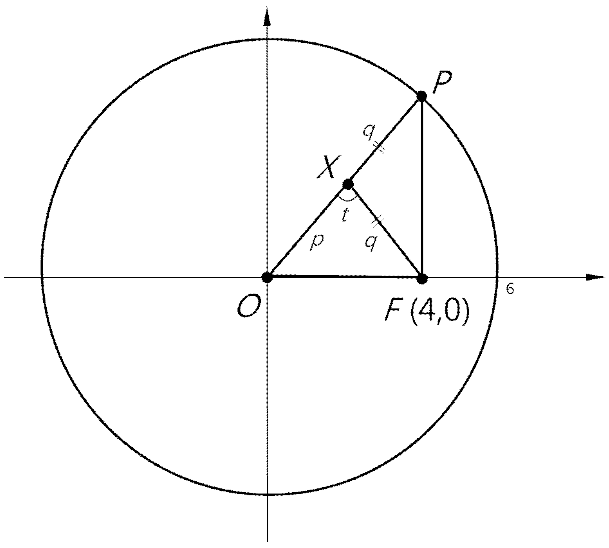
2.



(1) 선분 QF의 중점은 $\left(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$이고 기울기는 $\sqrt{11}$이므로 선분 QF의 수직이등분선의 방정식은 $y-\frac{\sqrt{11}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{11}}\left(x-\frac{9}{2}\right)$이고 정리하면 $y=-\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{10}{\sqrt{11}}$이다. 따라서 $a=-\frac{1}{\sqrt{11}}, b=\frac{10}{\sqrt{11}}$ 이다.

(2) X의 자취인 타원 C의 방정식과 (1)에서 구한 수직이등분선의 방정식으로부터 y를 소거하면 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}x+\frac{10}{\sqrt{11}}\right)^2}{5}=1$이다. 이를 정리 하면 x에 대한 이차방정식 $64x^2-400x+625=0$를 얻는다. 그 판별식은 $D/4=200^2-64\cdot625=0$이므로 선분PF의 수직이등분선은 타원의 접선이다.

3.



(1) $\angle OPF$가 최대이면 $\angle OXF$도 최대이다.

$\angle OXF = t \ (0 < t < \pi)$, $\overline{OX} = p, \overline{FX} = q$라 하면 $\triangle OXF$에서

$4^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos t = (p+q)^2 - 2pq - 2pq\cos t$ 이고

$p + q = 6$ 이므로 $\cos t = \dfrac{10}{pq} - 1$이다.

(2) $\angle OXF = t$가 최대이면 $\cos t = \dfrac{10}{pq} - 1$은 최소이고 이때 pq는 최대이다. 합이 6으로 일정한 두 양수 p, q의 곱은 $p = q$일 때 최대이고 이때, $p = q = 3$이다. 따라서 $\angle OPF$가 최대($\angle OXF$가 최대)일 때, $\triangle OXF$는 각 변의 길이가 $3, 3, 4$인 이등변삼각형이므로 그 넓이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

	한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시	
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오후(2)-2번

1. 제시문에서 주어진 함수 $f(x)$를 적분하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \cos^2 t\, dt + \int_0^{2\pi - x} \sin^2 t\, dt = \int_0^x \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt + \int_0^{2\pi - x} \frac{1 - \cos 2t}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi - x} = \frac{1}{2}\sin 2x + \pi \end{aligned}$$

이므로, 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $a = \frac{1}{2} + \pi$이다. 제시문에서 주어진 함수 $g(x)$를 미분하면,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{1 - \sin^2 x}\, \cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x}\, (-\sin x) \\ &= |\cos x| \cos x - |\sin x| \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{aligned}$$

이므로, $g(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $g(x)$의 최댓값은 $b = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$이다.

(※ $C = g(0) = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$)

그러므로 $a - b = \frac{3}{4}\pi$이다.

2. $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$인 경우는 $g'(x) = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1$이므로, $g(x) = -x + C = -x + \frac{3}{4}\pi$이다.

(※ $g(\frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + C,\ C = \frac{3}{4}\pi$)

따라서 $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \pi \ge |-x + \frac{\pi}{2}| = |g(x) - \frac{\pi}{4}|$이다.

구하고자 하는 회전체의 부피 V는 곡선 $y = f(x)$와 세 직선 $y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V_1에서 $y = g(x) - \frac{\pi}{4}$와 세 직선 $y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 x축 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V_2를 뺀 값이다. 즉, $V = V_1 - V_2$이다.

먼저 부피 V_1을 구하면,

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^\pi f(x)^2\, dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \pi\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\sin^2 2x + \pi \sin 2x + \pi^2\right) dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\frac{1 - \cos 4x}{2} + \pi \sin 2x + \pi^2\right) dx \\ &= \pi \left(\left[\frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\right]_0^\pi - \left[\frac{\pi}{2}\cos 2x\right]_0^\pi + \left[\pi^2 x\right]_0^\pi\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \pi^4 \end{aligned}$$

이고, $V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2x\, dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}$이다.

그러므로, $V = V_1 - V_2 = (\frac{\pi^2}{8} + \pi^4) - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \pi^4$이다.

3. $g'(x)=|\cos x|\cos x-|\sin x|\sin x$이므로,

① $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$인 경우는 문항1에서 $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{4}$임을 알 수 있다.

② $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$인 경우는 문항2에서 $g(x)=-x+\frac{3}{4}\pi$임을 알 수 있다.

③ $\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$인 경우

$g'(x)=-\cos^2 x+\sin^2 x=-\cos 2x$이므로, $g(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+C=-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\pi}{4}$이다.

(※ $g(\pi)=\int_0^{-1}\sqrt{1-t^2}\,dt=-\frac{\pi}{4}=C$)

④ $\frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi$인 경우

$g'(x)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$이므로, $g(x)=x+C=x-\frac{7}{4}\pi$이다.

(※ $g(2\pi)=\int_0^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}=2\pi+C,\ \ C=-\frac{7}{4}\pi$)

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-(-x+\frac{3}{4}\pi)\right)dx\\
&\quad+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{\pi}{4}-(-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\pi}{4})\right)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}-(x-\frac{7}{4}\pi)\right)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\,dx\\
&=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\pi}{2}x\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}+\left[2\pi x-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\\
&=1+\frac{1}{2}\pi^2
\end{aligned}$$