한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
305819

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:970301)	

수 험 생 유 의 사 항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1-1) 원 C위의 점 (x, y)가 (x', y')으로 옮겨진다면 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow x'=2x,\ y'=3y$

$\Rightarrow x=\frac{x'}{2},\ y=\frac{y'}{3}$이다. $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 에서 이를 적용하면 $(\frac{x'}{2}-1)^2+(\frac{y'}{3}-2)^2=1$

이다. $\frac{1}{4}(x'-2)^2+\frac{1}{9}(y'-6)^2=1 \Rightarrow \frac{(x'-2)^2}{4}+\frac{(y'-6)^2}{9}=1$ 이므로 A의 식은

$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ 이다.

1-2) A_n을 이루는 임의의 점을 (x_n, y_n)이라 하자. 이때 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} \Rightarrow x_{n+1}=2x_n,\ y_{n+1}=3y_n$

A_n의 식이 $\frac{(x_n-p)^2}{r^2}+\frac{(y_n-q)^2}{s^2}=1$ 이면 $(r, s>0)$ 이때 $\frac{(\frac{x_{n+1}}{2}-p)^2}{r^2}+\frac{(\frac{y_{n+1}}{3}-q)^2}{s^2}=1$ 이고

$\frac{(x_{n+1}-2p)^2}{4r^2}+\frac{(y_{n+1}-3q)^2}{9s^2}=1$ 이 A_{n+1}의 식이 된다. A_n의 넓이인 S_n은 $rs\pi$ 이고

S_{n+1}은 $6rs\pi$ 이므로 $S_{n+1}=6S_n$임을 알 수 있다. $S_1=6\pi$ 이므로

$S_n=6\pi\cdot 6^{n-1}=6^n\pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$

A_n의 식이 $\frac{(x_n-p)^2}{r}+\frac{(y_n-q)^2}{s}=1$ 꼴을 하는 것은 A_1에서 그러함이 나와 있고 A_n에서 그러면 A_{n+1}에서도 그러함으로 귀납적으로 증명할 수 있다.

1-3) $f\circ g$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}$이다. B_n을 이루는 점을 (x_n, y_n)이라고 하면 $\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$이고 B_{n+1}에 있는 (x_{n+1}, y_{n+1})이 있다.

$2y_n=x_{n+1}$ 이고 $-3x_n=y_{n+1}$ 이므로 B_n이 $\frac{(x_n-p)^2}{r^2}+\frac{(y_n-q)^2}{s^2}=1$ 이면

$\frac{(y_n+3p)^2}{9r^2}+\frac{(x_n-2q)^2}{4s^2}=1$ 이다. B_0이 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 이면 B_1은

$\frac{(y+3)^2}{9}+\frac{(x-4)^2}{4}=1$ 이고 모든 B_n은 $\frac{(x-p)^2}{r^2}+\frac{(y-q)^2}{s^2}=1$ 의 꼴을 가진다.

$T_n=\pi rs$면 $T_{n+1}=6\pi rs$ 이므로 $T_n=T_1\cdot 6^{n-1}$, $T_1=6\pi$ 이므로

$T_n=6^n\pi$ 이다 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $A(\theta)$는 좌표평면에서 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 을 $\left[r\cos\frac{\theta}{2}, r\right]$ 구간에서 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피와 같다

$$A(\theta)=\pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r} r^2-x^2\,dx = \pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-r^3\cdot\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}r^3\cdot\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{16-9\sqrt{3}}{24}\pi r^3$$

2. 원 C의 중심을 M 이라고 하면,

$\overline{OM}=r\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{OR}=\frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}}$ 이므로

$$\overline{MR}=r\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

그리고 원 C의 반지름의 길이는 $r\sin\frac{\theta}{2}$ 이므로

㉮의 부피를 $C(\theta)$ 라고 할때,

$$C(\theta)=\frac{\pi r^3\cdot\sin^4\frac{\theta}{2}}{3\cos\frac{\theta}{2}}$$

$C(\theta)-A(\theta)=B(\theta)$ 이므로

$$\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\frac{A(\theta)}{C(\theta)-A(\theta)}=\frac{\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)}{\pi r^3\left\{\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{3\cos\frac{\theta}{2}}-\left(\frac{2}{3}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)\right\}}$$

$\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$ 를 정리하면, $\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=3$$

3.

$A(x)$의 평균 $=\int_0^\pi \pi r^3\left(\frac{2}{3}-\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\cos^3\frac{x}{2}\right)\frac{\sin x}{2}\,dx$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\int_0^\pi\left(\frac{2}{3}\sin x-\cos\frac{x}{2}\cdot\sin x+\frac{1}{3}\cdot\sin x\cos^3\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\left(\frac{2}{3}\int_0^\pi\sin x\,dx-2\int_0^\pi\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\,dx+\frac{2}{3}\int_0^\pi\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^4\frac{x}{2}\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{15}\pi r^3$$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
305515

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:970301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2x=x'\\3y=y'\end{pmatrix}$ 이므로 $A_1 : \left(\frac{x'}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y'}{3}-2\right)^2=1$

$\Rightarrow \frac{(x'-2)^2}{4}+\frac{(y'-6)^2}{9}=1$ 이다.

2. $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$ 은 $n=1$ 일때 (좌변) $=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$

(우변) $=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$

임으로 성립하고

$n=k$ 일때

$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k&0\\0&3^k\end{pmatrix}$ 가 성립한다고 가정하면

$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k&0\\0&3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&0\\0&3^{k+1}\end{pmatrix}$ 이므로 $n=k+1$ 일때 성립하므로

$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$ 이 성립한다.

따라서

$A_n=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^n C=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}C$ 이고

$\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2^n x=x'\\3^n y=y'\end{pmatrix}$ 이므로 $A_n ; \left(\frac{x'}{2^n}-1\right)^2+\left(\frac{y'}{3^n}-2\right)^2=1$

$\Rightarrow \frac{(x'-2^n)^2}{2^{2n}}+\frac{(y-2\cdot3^n)^2}{3^{2n}}=1$ 이다.

이때 $S_n=2^n\cdot3^n\pi$ (제시문 <다>에 의해) 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$ 이다.

3. $(f\circ g)=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}$

$(f\circ g)^2=\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0\\0&-6\end{pmatrix}=-6E$ 이므로

(i) $n=2k$ 일때

$(f\circ g)^n=(f\circ g)^{2k}=(-6E)^k$

(ii) $n=2k-1$ 일때

$(f\circ g)^{2k-1}=(f\circ g)^{2k-2}(f\circ g)=(-6E)^{k-1}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}$ 이다.

(i)의 경우에는

$B_n=(f\circ g)^n C \Rightarrow \begin{pmatrix}(-6)^k&0\\0&(-6)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}(-6)^k x=x'\\(-6)^k y=y'\end{pmatrix}$ 이므로

$B_n : \left(\frac{x'}{(-6)^k}-1\right)^2+\left(\frac{y'}{(-6)^k}-2\right)^2=1 \Rightarrow \frac{(x'-(-6)^k)^2}{6^{2k}}+\frac{(y'-2\cdot(-6)^k)^2}{6^{2k}}=1$

이므로 반지름이 6^k 이인 ~~원~~원이 된다.

$T_n=r^2\pi=6^{2k}\pi=6^n\pi$ 이다.

(ii)의 경우에는

$\begin{pmatrix}(-6)^{k-1}&0\\0&(-6)^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2(-6)^{k-1}\\-3\cdot(-6)^{k-1}&0\end{pmatrix}$

$B_n=(f\circ g)^n C \Rightarrow \begin{pmatrix}0&2\cdot(-6)^{k-1}\\-3\cdot(-6)^{k-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\cdot(-6)^{k-1}y=x'\\-3\cdot(-6)^{k-1}x=y'\end{pmatrix}$ 이므로

$B_n : \left(\frac{y'}{-3\cdot(-6)^{k-1}}-1\right)^2+\left(\frac{x}{2\cdot(-6)^{k-1}}-2\right)^2=1 \Rightarrow \frac{(y'+3(-6)^{k-1})^2}{(3(6)^{k-1})^2}+\frac{(x-4\cdot(-6)^{k-1})^2}{(2(6)^{k-1})^2}=1$

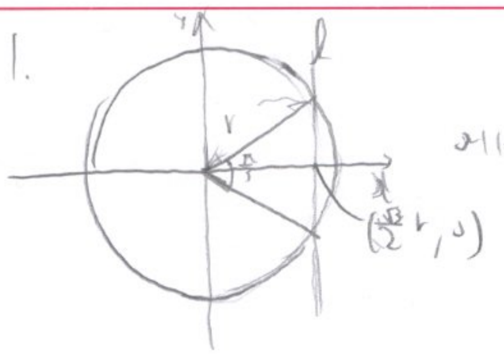
$T_n=6\cdot6^{2k-2}\pi=6^{2k-1}\pi=6^n\pi$ 이다.

그러므로 $T_n=6^n\pi$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$ 이다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



에서 $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$는 직선 l과 원으로 둘러싸인 부분을 x축을 회전축으로 회전시킨 입체의 부피이므로

$$\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} r^2-x^2\,dx = \pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}r}^{r} = \pi\left(\frac{2}{3}r^3-\frac{3\sqrt{3}}{8}r^3\right)$$

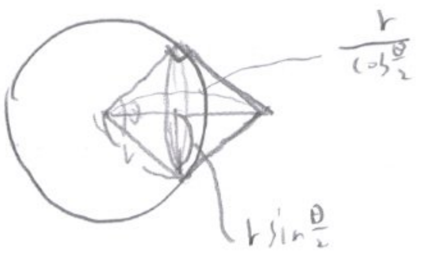
$$= \frac{r^3\pi}{24}\left(16-9\sqrt{3}\right)$$

2. $A(\theta)$는 1의 그림에서 $x=r\cos\frac{\theta}{2}$와 원으로 둘러싸인 부분을 x축을 회전축으로 회전시킨 입체의 부피이므로

$$\pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r} r^2-x^2\,dx = \pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-\left(\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)r^3\right)$$

$$=\pi r^3\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\right) \text{ 이다.}$$



$\angle POQ$가 θ일 때 ㉮의 부피는 원뿔 2개에서 밑면의 반지름의 길이가 $r\sin\frac{\theta}{2}$ 높이가 $\frac{r}{\cos\frac{\theta}{2}}-r\cos\frac{\theta}{2}$인 원뿔 2개 이므로

(㉮의 부피) $\frac{\pi}{3}r^3\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right)$

이고 $B(\theta)$는 (㉮의 부피) $- A(\theta)$ 이므로

$$B(\theta)=\frac{\pi}{3}r^3\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right) - \pi r^3\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\right) \text{ 이다.}$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}+2}{\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2}\right)-\left(\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}+2\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}+2}{\cos\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}-2} = \lim_{\theta\to+0}\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)}{\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos\frac{\theta}{2}+2}{\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}} = 3 \text{ 이다.}$$

3. $A(x)$의 평균은

$$\int_0^{\pi} A(x)\cdot\frac{\sin x}{2}\,dx = \int_0^{\pi}\pi r^3\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sin x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\cos^3\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin x+\frac{2}{3}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\int_0^{\pi}\frac{2}{3}\cos^4\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\left[-\frac{4}{15}\cos^5\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi r^3}{2}\left\{\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{15}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{15}\pi r^3 \text{ 이다.}$$

한양대학교

답안지 (자연계)

답안지 바코드
305445

지원학과	
성 명	
수험번호	
생년월일 (예:970301)	

수험생 유의사항

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오. (빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1-1.

원 C의 점 (x_0, y_0)은 일차변환 f에 의해 x_1, y_1으로 옮겨진다.

$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ 임으로 행렬 f는 역행렬을 가짐으로 $(6-0>0)$

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{2}\\ \frac{y_1}{3}\end{pmatrix}$

따라서, $x_0=\frac{x_1}{2}$ 이고 $y_0=\frac{y_1}{3}$ 이기때문에 이것을

$(x-1)^2+(y-2)^2=1$에 대입하면

$\left(\frac{x_1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y_1}{3}-2\right)^2=1$ 이고 이를 정리하면

$\frac{(x_1-2)^2}{4}+\frac{(y_1-6)^2}{9}=1$ 이다

곡선 A의 방정식은 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$. 이다.

1-2

곡선 A_1의 방정식이 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ 임으로

$S_1=\pi\ 2\cdot3=6\pi$이다

이때 곡선 A_n의 방정식을

$\frac{(x-p_n)^2}{a_n^2}+\frac{(y-q_n)^2}{b_n^2}=1$ 이라하자

곡선 A_n위의 점 (x_n, y_n)은 일차변환 f에의해 (x_{n+1}, y_{n+1})로 옮겨진다. 앞에서 구했던 것처럼

$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_{n+1}}{2}\\ \frac{y_{n+1}}{3}\end{pmatrix}$ 임으로. 곡선 A_n에 대입하게 되면

곡선 A_{n+1}은 $\frac{(x-2p_n)^2}{4a_n^2}+\frac{(y-3q_n)^2}{9b_n^2}=1$. 이다.

곡선 A_n의 넓이는 $\pi a_n b_n$ 이고.

곡선 A_{n+1}의 넓이는 $\pi(2a_n)(3b_n)$ 이다.

즉 S_n은 초항이 6π 이고 공비가 6인 등비 수열이다.

∴ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{6}\left(1+\left(\frac{1}{6}\right)^1+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots\right.\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{6}}$

$=\frac{1}{6}\times\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{S_n}=\frac{1}{5}$

1-3.

일차변환 f∘g는 $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 임으로 $\begin{pmatrix}0&2\\-3&0\end{pmatrix}$이다.

일차변환 h를 f∘g 라하자. 즉 h = f∘g

원 C 위의 점 (x_0, y_0)은 일차 변환 h에의해 (x_1, y_1)으로 옮겨진다.

$h\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, h는 역행렬이 존재 $(0-(-6)>0)$이 함으로

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=h^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-3\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{y_1}{2}\\ \frac{x_1}{3}\end{pmatrix}$ 이다.

$x_0=-\frac{y_1}{2}$, $y_0=\frac{x_1}{3}$을 원 C의 방정식에 대입해 곡선 B_n의 방정식을 구하면

$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ 이다.

∴ 조건 (다)에 의해 T_1은 6π. 이다.

곡선 B_n의 방정식을

$\frac{(x-p_n)^2}{a_n^2}+\frac{(y-q_n)^2}{b_n^2}=1$ 이라하면

같은 방식으로 곡선 B_{n+1}의 방정식은

$\frac{(x-3q_n)^2}{(3b_n)^2}+\frac{(y+2p_n)^2}{(2a_n)^2}=1$이다.

곡선 B_n의 넓이는 $\pi\cdot a_n b_n$ 이고

곡선 B_{n+1}의 넓이는 $\pi\cdot(3b_n)(2a_n)=6b_na_n\pi$ 이다.

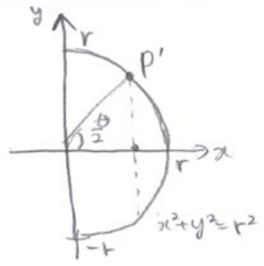
따라서 T_n은 $T_1=6\pi$이고 공비가 6인 등비수열이다.

∴ 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{T_n}=\frac{1}{5}$ (문제 1-2와 계산과정이 같음)

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$P'(r\cos\frac{\theta}{2}, r\sin\frac{\theta}{2})$ 이고

㈏의 부피인 $A(\theta)$는 원 $x^2+y^2=r^2$ 의 $[r\cos\frac{\theta}{2}, r]$ 에 해당하는 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 부피와 같으므로

$$A(\theta)=\pi\int_{r\cos\frac{\theta}{2}}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-r^3\cos\frac{\theta}{2}+\frac{r^3}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\left(2-3\cos\frac{\theta}{2}+\cos^3\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)$$

$$\therefore A\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{r^3}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\left(2-\frac{9}{8}\sqrt{3}\right)$$

2.

$A(\theta)+B(\theta)=$ (㈎의 부피) 이므로

$$(\text{㈎의 부피})=\pi r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times\left(r\sin\frac{\theta}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\pi}{3}r^3\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$ (∵ (밑면의넓이)×(높이)×$\frac{1}{3}$=(㈎의부피))

$$B(\theta)=\frac{\pi}{3}r^3\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}-A(\theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{r^3}{3}\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)}{\frac{\pi}{3}r^3\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{r^3}{3}\pi\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{12\sin^4\frac{\theta}{4}}{\sin^3\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}-12\sin^4\frac{\theta}{4}}\times\frac{\frac{\theta^4}{4^4}}{\frac{\theta^4}{4^4}}\right)$$

$$=\frac{12}{16-12}$$

$$=3$$

3. 연속확률변수 X 에대해

$A(x)$의 평균은

$$\int_0^{\pi}A(x)F(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{r^3}{3}\pi\left(2-3\cos\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2}\right)\frac{\sin x}{2}\,dx$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\int_0^{\pi}(-2)\left(2-3\cos\frac{x}{2}+\cos^3\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\times\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{2}\,dx$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\left[-2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos^3\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos^5\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{r^3}{3}\pi\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{2}{15}r^3\pi$$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨