한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1/2

[문제 1-1]

$a_1=2$ 이므로 $\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$.

i) $n=1$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

ii) $n=k$ 일 때 $a_n=2n$ 이라 가정한다.

$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$을 곱하면

$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2k+2\\0 & 1\end{pmatrix}$

이므로 $n=k+1$ 때 또한 $a_n=2n$ 이 성립하게 된다.

$\therefore \forall n\in N$ 에 대하여 $a_n=2n$ 이다. (N은 자연수집합)

따라서 $C_n=\dfrac{2n}{2n+1}$ 이다.

그러면 $C_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}$ 이고 $C_n=\dfrac{2n}{2n+1}$ 이다.

$\therefore C_{n+1}-C_n=\dfrac{2n+2}{2n+3}-\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{2}{(2n+3)(2n+1)}$

이 때, n이 자연수이므로 $(2n+3)(2n+1)>0$ 이다.

$\therefore C_{n+1}-C_n>0$, $C_{n+1}>C_n$.

한 편, $C_n=\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{(2n+1)-1}{2n+1}=1-\dfrac{1}{2n+1}$

이다. 이 때, $d_n=-\dfrac{1}{2n+1}$ 이라고 놓으면

$C_n=1+d_n$ 이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n=0$ 이므로 제시문 (가)에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+d_n)=1+0=1$ 이므로

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} C_n=1$.

[문제 1-2]

i) $n=1$

$b_2=\dfrac{b_1+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\therefore b_2<b_1$

ii) $n=k$ 일 때 다음 식이 성립한다고 가정한다.

$b_{k+1}<b_k$ ⋯ ㉡

한편, $b_{k+1}=\dfrac{b_k+1}{2}$ 을 정리하면

$b_k=2b_{k+1}-1$ 이 되므로

$b_{k+1}=2b_{k+2}-1$, $b_k=2b_{k+1}-1$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2b_{k+2}-1<2b_{k+1}-1$ 이므로

$\therefore b_{k+2}<b_{k+1}$

$\therefore \forall n\in N$ 에 대하여 $b_{n+1}<b_n$ 이 성립한다.

(단, N는 자연수 집합)

한 편, $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$ 이므로

$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(b_n-1)$ 이다.

$\therefore b_n-1=(b_1-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ (단, $n\geq1$) ⋯ ($\because b_1=2$)

이 때, $e_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이라 놓으면 $b_n=1+e_n$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty} e_n=0$ 이다.

$\therefore$ 제시문 (가)에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+e_n)=1$.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2/2

[문제 1-3]

$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{x\to 1-0} f(x)$ 이므로 ($\because$ 1-(1) 에서

$c_n = 1+d_n$ 인데, $d_n<0$ 이다.)

$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1$ 이다.

또, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{x\to 1+0} f(x)$ 이므로 ($\because$ 1-(2)에서

$b_n = 1+e_n$ 인데, $e_n>0$ 이다.)

$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{x\to 1+0} x = 1$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ 이다.

한편, $c_n = \frac{1}{2n+1}$ 이고 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2-1}{\frac{2n}{2n+1}-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-4n-1}{4n^2+4n+1}}{-\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+6n+1}{4n^2+4n+1} = 2 \text{ 이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} \neq \lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b} \text{ 이다. } (b=c=1)$$

$\therefore$ 제시문 (나)의 대우가 성립하므로

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이고, $c_n\neq 1$, $b_n\neq 1$을

만족시키는 수열 $\{c_n\}$과 수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)-f(1)}{c_n-1} \neq \lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(1)}{b_n-1}$ 이 성립하므로

함수 $f(x)$는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/2

[문제 1-1]

자연수 n에 대하여

$n=1$ 일때 : $\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$n=2$ 일때 : $\begin{pmatrix}1 & a_2\\0 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 2a_1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a_2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$n=3$ 일때 : $\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1 & 2a_1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & 3a_1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a_3\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

따라서 $a_n = na_1$ 이므로 $a_n = 2n$이다.

이를 수학적 귀납법으로 증명하면

i) $n=1$ 일때 : $\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 일때 $a_1=2$이므로 성립

ii) $n=k$일때 (단, k는 자연수) $\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}1 & a_k\\0 & 1\end{pmatrix}$이면 $a_k=2k$가 성립한다고 가정하면, $n=k+1$ 일때

$\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix}1 & a_{k+1}\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & a_k\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a_1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a_k+a_1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 이고

$a_1=2$이므로 $\quad a_{k+1} = a_k+2 \quad \therefore a_{k+1} = 2(k+1)$

따라서 모든 자연수에 대하여 성립한다.

$C_n = \dfrac{a_n}{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}$ 이고 $C_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1}$ 이다.

$C_{n+1} - C_n = \dfrac{(2n+2)(2n+1) - 2n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$

$= \dfrac{2}{(2n+3)(2n+1)} > 0$ (n은 자연수) 이므로 모든

자연수 n에 대하여 $C_n < C_{n+1}$이 성립한다.

또,

$\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{2n}{2n+1} = \cancel{1이다}\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{2n+1}$ 이고

$n\to\infty$일때 $\dfrac{1}{2n+1} \to 0$ 이므로 제시문 (가)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 1$이다.

[문제 1-2]

i) $n=1$ 일때 $\quad b_1 = 2 \quad b_2 = \dfrac{3}{2}$ 이므로

$b_1 > b_2$가 성립한다.

ii) $n=k$ (단, k는 자연수) 일때, $b_k > b_{k+1}$이 성립한다고 할 때,

$n=k+1$ 일때, $b_{k+1} = \dfrac{b_k+1}{2}$ 이고,

$b_{k+2} = \dfrac{b_{k+1}+1}{2}$ 이다. 이때 $b_k > b_{k+1}$이

성립하므로 $\dfrac{b_k+1}{2} > \dfrac{b_{k+1}+1}{2}$ 이고 $b_{k+1} > b_{k+2}$

가 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $b_n > b_{n+1}$이 성립한다.

$b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{1}{2}$이므로 $(b_{n+1}-1) = \dfrac{1}{2}(b_n-1)$

이다. 따라서, 수열 ~~$\{b_{n+1}-1\}$~~ $\{b_n-1\}$은

첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\{b_n-1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $\quad \therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$

또 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$ 이고 $n\to\infty$ 일때

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$ 이므로 제시문 (가)에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		2/2

[문제 1-3]

$c_n < c_{n+1}$ 이므로 c_n은 증가수열이고

$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ 이므로 1에 수렴한다.

$b_n > b_{n+1}$ 이므로 b_n은 감소수열이고

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이므로 1에 수렴한다. 따라서,

$\lim_{n\to\infty} c_n$은 1의 좌극한값, $\lim_{n\to\infty} b_n$은 1의 우극한 값이다. 그러므로

$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1$

$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{x\to 1+0} x = 1$ 이다. 위의 결과로,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n - c} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 - 1}{\frac{2n}{2n+1} - 1}$$

($\because c=1$)

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}+1\right) = 2$$ 마찬가지로,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n - b} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1} = 1$$

($\because b=1$)

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b}$

이다.

제시문 (가)의 대우에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b}$ 일때,

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이고 임의의 자연수 n에 대하여 $c_n \neq 1$, $b_n \neq 1$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/2

[문제 1-1]

$\begin{pmatrix}1&a_1\\0&1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1&a_n\\0&1\end{pmatrix}$ 에서 $n=2$ 일 때

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1&a_2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ 이 되어

$a_2=4$ 가 되고

$n=3$ 일 때 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1&a_3\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$ 이 되어

$a_3=6$ 이 된다.

따라서 $a_n=2n$ 임을 추측할 수있다

이를 수학적 귀납법으로 증명하면

$n=1$ 일 때

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1&a_1\\0&1\end{pmatrix}$ 로 $a_1=2$ 가되어

성립한다

$n=k$ 일 때

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}1&a_k\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}$ 이라고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2(k+1)\\0&1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1&a_{k+1}\\0&1\end{pmatrix}$ 이 되어 $a_{k+1}=2(k+1)$이 된다

따라서 $a_n=2n$ 이 됨을 알 수 있다.

한편 c_n은 $a_n=2n$ 이므로

$c_n = \frac{2n}{2n+1} = 1-\frac{1}{2n+1}$ 임을 알수 있다.

여기서 $c_n = 1-\frac{1}{2n+1}$ 이고 $c_{n+1} = 1-\frac{1}{2n+3}$인데

모든 자연수 n 에서 $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3}$ 이므로

$c_n < c_{n+1}$ 이 된다.

그리고, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\} = 1 = c$ 임을 알수있다.

[문제 1-2]

$b_n > b_{n+1}$ 임을 귀납법으로 증명하면

$n=1$ 일 때

$b_1=2$, $b_2 = \frac{b_1+1}{2} = \frac{3}{2}$ 이 되어

$b_1 > b_2$ 이 성립한다

$n=k$ 일 때

$b_k > b_{k+1} = \frac{b_k+1}{2}$ 이 성립한다고

가정하면 $b_k>1$ 이 된다

$n=k+1$ 일때

$b_{k+2} = \frac{b_{k+1}+1}{2} = \frac{b_k+3}{4}$ 이고

$b_{k+1} = \frac{b_k+1}{2} = \frac{2b_k+2}{4}$ 이다.

$n=k$ 일 때 b_k가 1 크다고 했으므로

$b_{k+2} = \frac{b_k+3}{4} < b_{k+1} = \frac{2b_k+2}{4}$ 이 성립한다

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n > b_{n+1}$ 이 됨을 알수있다

한편 $b_{n+1} = \frac{b_n+1}{2}$ 에서

$b_{n+1}-1 = \frac{b_n-1}{2}$ 이 된다 따라서

$b_{n+1}-1 = \frac{b_n-1}{2} = \cdots = \frac{b_1-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

이 되고 $b_{n+1} = \frac{1}{2^n}+1$ 이된다.

따라서 수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n = \frac{1}{2^{n-1}}+1$ 이 된다.

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2^{n-1}} = 1 = b$ 임을

알수있다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2/2

[문제 1-3]

$\lim_{n\to\infty} f(c_n)$ 을 보면 [문제 1-1]에서

$c_n = 1-\frac{1}{2n+1} < 1$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$ 임을

이용하면 $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{x\to 1-0} f(x)$ 임을

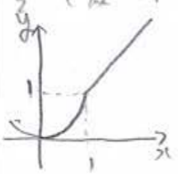
알수있다

한편, $\lim_{n\to\infty} f(b_n)$을 보면 [문제 1-2]에서

$b_n = 1+\frac{1}{2^{n-1}} > 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 임을

이용하면 $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{x\to 1+0} f(x)$ 임을

알 수 있다.



왼쪽그림은 함수 $f(x)$ 인데

여기서

$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$ 임을 알수있다.

한편 $c_n < 1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} = \lim_{n\to\infty} \frac{(c_n)^2-1}{c_n-1}$$

$= \lim_{n\to\infty} (c_n+1) = 2$ 가 된다.

또한 $b_n > 1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n-1}{b_n-1} = 1$ 이 된다

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b}$ 이다.

제시문(나)의 관점에서 $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이고,

임의의 자연수 n에 대하여 $c_n \neq 1$, $b_n \neq 1$을 만족하는

수열 $\{c_n\}$과 수열 $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n)-f(c)}{c_n-c} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)-f(b)}{b_n-b}$ 이므로

함수 $f(x)$가 $x=c=1$ 에서 미분가능하지 않음을 알수 있다.

▶ 2번 문항 답안은 3Page 부터 작성

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1/2

[문제 2-1]

(1)에서 $B=2E-A$

이식을 (2)에 대입하면

$A^2+(2E-A)^2=4E$

$\Leftrightarrow 2A^2-4A+4E=4E$

$\Leftrightarrow 2A^2-4A=0.$

f가 역변환을 가진다 했으므로 A는 역행렬 가짐.

$\therefore A(2A-4E)=0$

$\Leftrightarrow A^{-1}A(2A-4E)=A^{-1}\cdot 0$

$\Leftrightarrow 2A-4E=0.$

$\therefore A=2E.$

그러므로 $B=2E-A=2E-2E=0.$

$\therefore A=2E, B=0.$

[문제 2-2]

(1), (2)에서 $2A^2-4A=0$

$f:(1,0)\to(1,a)$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

이때, $(2A^2-4A)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=0.$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

여기에서 $a=0$ 이면 A는 존재하지 않으므로

$\underline{a\neq 0}$: 실수 a가 만족할 조건.

$\therefore A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{cases} A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{a}\\a&1\end{pmatrix} \\ B=2E-A=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{a}\\-a&1\end{pmatrix}\end{cases}$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　명	페 이 지
우수답안 1		2/2

[문제 2-3]

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix},$

(1).(2)에서 $2A^2-4A=0$ 이므로

$(2A^2-4A)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=2A\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\b\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=0$

i) $b=0$ 이면 $A=\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&\beta\end{pmatrix}$ (α, β는 임의의 실수)

$2A^2-4A=\begin{pmatrix}8&4\alpha+2\alpha\beta\\0&2\beta^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&4\alpha\\0&4\beta\end{pmatrix}$

$=0$

$\therefore \alpha\beta=0,\ 2\beta^2=4\beta$

$\Rightarrow \beta=0$ 또는 $\alpha=0, \beta=2$

$A=\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\0&2\end{pmatrix},\ 0$

$(A,B)=\left(\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-\alpha\\0&2\end{pmatrix}\right)$, ($\alpha$는 실수)

$\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$.

ii) $b\neq0$ 이면. $A=\begin{pmatrix}2&0\\b&0\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0&0\\-b&2\end{pmatrix}$

$(A,B)=\left(\begin{pmatrix}2&0\\b&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-b&2\end{pmatrix}\right)$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/2

[문제 2-1]

$B = 2E - A$

$A^2 + B^2 = A^2 + A^2 - 4A + 4E = 4E$

$\therefore 2A^2 = 4A$

양변에 A^{-1}을 곱하면

$2A = 4E$

$\therefore A = 2E$

$B = O$

[문제 2-2]

$A^2 = 2A$

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$라 하자.

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$x = 1,\ z = a$

$A = kE$ 꼴 (k는 상수) 일 때

$k^2E = 2kE$

$k^2 = 2k$

$k = 2$ or $k = 0$

$A = 2E$ 일 때 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$A = O$ 일 때 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$

$\therefore A \neq kE$

케일리-해밀턴 정리에서

$x + w = 2$

$xw - yz = 0$

$w = 1$

$1 - ya = 0 \quad y = \frac{1}{a}$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$

A^{-1}이 존재하지 $\times$

$\frac{1}{a}$은 상수 $\therefore \underline{a \neq 0}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		2/2

[문제 2-3]

$A^2 = 2A$

i) $A=0$ 일 때

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$

ii) $A = 2E$ 일 때

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b=0$ 일 때 성립

iii) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix}$

$x=2,\ z=b$

$x+w=2$

$xw-yz=0$

$\therefore w=0$

$yz=0$

$b\neq 0$ 일 때 $y=0$

$b=0$ 일 때 $y=c$ (c는 임의의 상수)

$A = \begin{pmatrix} 2 & y \\ b & 0 \end{pmatrix}$

<A와 B의 쌍>

i) $b=0$

$\left\langle A=2E,\ B=0 \right\rangle$ …… ①

$\left\langle A=\begin{pmatrix} 2 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ … ②

(단, c는 임의의 상수)

ii) $b\neq 0$

$\left\langle A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ … ③

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/2

[문제 2-1]

제시문 (가)의 (1)에서

$B = 2E - A$ 식을 얻을 수 있다.

$B^2 = (2E-A)^2 = 4E - 4A + A^2$

(2)에서 $B^2 = 4E - A^2$ 이므로

$B^2 = 4E - A^2 = 4E - 4A + A^2$

$2A^2 - 4A = 0$

$A(A-2E) = O$ 이다. … ①

이때 일차변환 f가 역변환을 갖는다 하였으므로

A의 역행렬은 존재하고

①식에 적용하면

$A^{-1}A(A-2E) = A^{-1}O$

$A - 2E = O$

따라서 $A = 2E$ 이다.

이때

$B = 2E - A = 2E - 2E$ 이므로

B는 영행렬이다.

[문제 2-2] $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라고 하겠다.

제시문 (나)를 참고하였을 때

$f : (1, 0) \rightarrow (1, a)$ 이므로 이를 식으로 나타내면

$\begin{cases} 1 = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p \\ a = r \cdot 1 + s \cdot 0 = r \end{cases}$ 이다.

따라서 $A = \begin{pmatrix} 1 & q \\ a & s \end{pmatrix}$ 이다.

[문제 2-1]에서

$A(A-2E) = O$ 임을 구하였다.

이 식에 대입하면

$A(A-2E) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ a & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & q \\ a & s-2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 + aq & q + q(s-2) \\ -a + as & aq + s(s-2) \end{pmatrix} = O$ 이다.

$-a + as = 0$ 이므로 $s = 1$ 이다.

이 때 $aq + s(s-2) = 0$ 이므로 $aq = 1$

따라서 $\underline{a \neq 0}$ 이고, $q = \frac{1}{a}$ 이다.

이를 정리하면 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

이 때 $A + B = 2E$ 이므로

$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 $a \neq 0$ 이어야 되고.

행렬 A와 B의 쌍은

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2/2

[문제 2-3]

행렬 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라고 할 때

[문제 2-2]와 마찬가지로 제시문 (나)를 참고하면

$f: (1,0) \rightarrow (2,b)$ 이므로 이를 식으로 나타내면

$$\begin{cases} 2 = p\cdot 1 + q\cdot 0 = p \\ b = r\cdot 1 + q\cdot 0 = r \end{cases}$$ 이다.

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & q \\ b & s \end{pmatrix}$ 이다.

$A(A-2E)=O$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 2 & q \\ b & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q \\ b & s-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qb & 2q+q(s-2) \\ sb & bq+s(s-2) \end{pmatrix} = O$$

이다.

이 식을 정리하면 $\begin{pmatrix} qb & sq \\ sb & bq+s(s-2) \end{pmatrix} = O$ 이다. …①

i) $b=0$ 일때

① 식은 $\begin{pmatrix} 0 & sq \\ 0 & s(s-2) \end{pmatrix} = 0$ 이다.

이때 $s=0$, q는 모든 실수 또는 $q=0$, $s=2$ 이다.

따라서 $b=0$ 일때

$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (α는 모든 실수), 또는 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

이때 각 A의 B의 쌍은 각각

$B=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (α는 모든실수), 또는 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

ii) $b\neq 0$ 인 모든 실수 일때

$qb=0$, $sb=0$ 이므로 $q=s=0$ 이다.

따라서, $b\neq 0$ 인 모든 실수 일 때

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ 이고 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ 이다.