한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1번

1. 행렬의 곱셈에 의하여 $a_n = 2n$이다.
$a_1 = 2\times 1 = 2$가 성립하고 $a_k = 2k$가 성립한다고 가정하면, 행렬의 곱셈에 의하여 $a_{k+1} = a_k + a_k = 2k + 2k = 2(k+1)$이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n$이 성립한다.

$c_n = \dfrac{2n}{2n+1}$이므로 $c_n = \dfrac{2n}{2n+1} < \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = c_{n+1}$이 성립하고 $c=1$ 이다.

2. (감소수열)

$b_1 = 2 > b_2 = \dfrac{3}{2}$가 성립한다.

$b_k > b_{k+1}$이 성립한다고 가정하자.

$b_{k+2} = \dfrac{b_{k+1}+1}{2} < \dfrac{b_k+1}{2} = b_{k+1}$이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 $b_n > b_{n+1}$이 성립한다.

(일반항과 극한 구하기)

$b_{n+1} - \alpha = \dfrac{1}{2}(b_n - \alpha)$에서 $\alpha = 1$이고 따라서

$b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} + 1$이다.

$b = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+1}{2} = \dfrac{b+1}{2}$가 성립하므로 $b=1$이다.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^2}{(2n+1)^2} = 1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = 1$이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(c_n)-f(c)}{c_n - c} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n^2 - 1}{c_n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n+1) = 2$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(b_n)-f(b)}{b_n - b} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n - 1}{b_n - 1} = 1$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(c_n)-f(c)}{c_n - c} \neq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(b_n)-f(b)}{b_n - b}$이다.

그러므로 제시문(다)에 의하면 $x=1$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. 먼저 $B=2E-A$이므로 $AB=A(2E-A)=(2E-A)A=BA$이다.
$AB=BA$이고 $A+B=2E$이므로 $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB=4E$이다.
따라서 $AB=O$이다. (단, O는 영행렬)
일차변환 f의 역변환이 존재하면 A^{-1}이 존재하므로 $A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=EB=B$.
즉 $B=O$. 또한 $A+B=2E$에서 $A=2E$.

2. $A^2+B^2=4E$에 $B=2E-A$를 대입하여 정리하면 $A^2-2A=O$이다.
f는 점 $(1,0)$을 점 $(1,a)$로 보내므로 $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ a & y\end{pmatrix}$라 둘 수 있다.

$$A^2-2A=\begin{pmatrix}ax-1 & xy-x\\ ay-a & ax+y^2-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$(1,2)$성분을 고려할 때 $x(y-1)=0$이므로 $x=0$ 혹은 $y=1$.
그런데 $(1,1)$성분을 고려할 때 $x=0$일 수 없으므로 $y=1$.
이때 $(2,1)$성분에 관한 등식이 성립한다.
$(2,2)$성분을 고려하면 $ax-1=0$. 따라서 $a\neq 0$이면 $x=\frac{1}{a}$, $y=1$이고 이때

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{a}\\ a & 1\end{pmatrix}\text{이고 } B=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{a}\\ -a & 1\end{pmatrix}$$

$a=0$이면 조건을 만족하는 f와 g는 존재하지 않는다.

3. f는 점 $(1,0)$을 점 $(2,b)$로 보내므로 $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ b & y\end{pmatrix}$라 둘 수 있다. 문항 2에서와 마찬가지로

$$A^2-2A=\begin{pmatrix}bx & xy\\ by & bx+y^2-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$(1,1)$성분을 고려할 때, $bx=0$이므로 $(2,2)$성분으로부터 $y^2-2y=0$.
그러므로 $y=0$ 혹은 $y=2$.
(i) $y=0$인 경우 $bx=0$이면 $A^2-A=O$이 성립한다.
$b=0$일 때, $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이고 $B=\begin{pmatrix}0 & -x\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (x는 임의의 실수).
$b\neq 0$일 때, $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$이고 $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -b & 2\end{pmatrix}$.
(ii) $y=2$인 경우 $b=0, x=0$이어야 한다.
즉, $b=0$일 때, $A=2E$이고 $B=O$가 가능하다.

(i), (ii)를 b의 값에 따라 정리하면
$b=0$일 때, $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이고 $B=\begin{pmatrix}0 & -x\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (x는 임의의 실수) 혹은 $A=2E$이고 $B=O$.
$b\neq 0$일 때, $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$이고 $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -b & 2\end{pmatrix}$.