한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1 / 2

[문제 1]

1. $f(x) = x^n + a x^{n-1} + a^2 x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x + a^n$

이라 하면

$(x-a)f(x) = x^{n+1} + a x^n + a^2 x^{n-1} + \cdots + a^{n-2}x^3 + a^{n-1}x^2 + a^n x$

$\quad - (a x^n + a^2 x^{n-1} + \cdots + a^{n-1}x^2 + a^n x + a^{n+1})$

$= x^{n+1} - a^{n+1}$

∴ $x^n - a^n = (x-a)Q(x)$ 이므로

$$\boxed{Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}}$$

$\frac{P(x)}{x-a} = Q(x)$ 이고

두 함수는 연속함수이므로

$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} Q(x) = Q(a)$

∴ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = Q(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i \cdot a^{n-1-i}$

$= na^{n-1}$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ 이므로

$f'(a) = na^{n-1}$

2. $h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$

$\{h(x)\}^n = x^{n+k}$

(나)에 의해 $[\{h(x)\}^n]' = h'(x)\cdot(h(x))^{n-1}\cdot n$ 이다.

i) $n+k \ge 0$

1번에 의해

$(x^{n+k})' = (n+k)x^{n+k-1}$

∴ $n\cdot\{h(x)\}^{n-1} \times h'(x) = (n+k)x^{n+k-1}$

$n\cdot(x^{\frac{n+k}{n}})^{n-1} \times h'(x) = (n+k)x^{n+k-1}$

∴ $h'(x) = \left(\frac{n+k}{n}\right)\cdot x^{\frac{k}{n}}$

ii) $n+k<0$ ---> k가 음의 정수.

$\{h(x)\}^n = x^{n+k}$

양변에 x^{-k}를 곱하면

$\{h(x)\}^n \times x^{-k} = x^n$

제시문 (나) 와 (다)에 의해

$[\{h(x)\}^n \times x^{-k}]' = n\{h(x)\}^{n-1}\cdot h'(x)\, x^{-k} - kx^{-k-1}\{h(x)\}^n$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

∴ $x^{-k-1}\{h(x)\}^{n-1}(n\cdot h'(x)\cdot x - k\cdot(h(x))) = n\cdot x^{n-1}$

$\{h(x)\}^{n-1}\times n\cdot h'(x)\cdot x - \{h(x)\}^{n-1}\cdot k\cdot(h(x)) = nx^{n+k}$

$\{x^{\frac{n+k}{n}}\}^{n-1}\times n\times x\times h'(x) = x^{n+k} + (h(x))^n\cdot k$

$= (k+n)x^{n+k}$

∴ $h'(x) = \left(\frac{k+n}{n}\right)\cdot x^{\frac{k}{n}}$

∴ 두 경우 모두

$h'(a) = \left(\frac{k+n}{n}\right)\cdot a^{\frac{k}{n}}$ //

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2 / 2

3. $h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$ (라)에 의해,

$h(x) = e^{\ln(h(x))}$

$x^{\frac{n+k}{n}} = e^{\ln(x^{\frac{n+k}{n}})}$ $(x>0)$

$\therefore e^{\ln(h(x))} = e^{\ln(x^{\frac{n+k}{n}})}$ $(x>0)$

함수 e^x가 증가함수이므로

$e^{\ln(h(x))} = e^{\ln(x^{\frac{n+k}{n}})}$ $(x>0)$

이려면

$\ln(h(x)) = \ln(x^{\frac{n+k}{n}})$ $(x>0)$

$\therefore \ln(h(x)) = \frac{n+k}{n}\ln x$, 양변을 미분하면

$\frac{h'(x)}{(h(x))} = \frac{n+k}{n} \cdot \frac{1}{x}$ ($\because$ (나)에 의해)

$h'(x) = \left(\frac{n+k}{n}\right) \times x^{-1} \times x^{\frac{n+k}{n}}$ $(x>0)$

$\therefore h'(x) = \left(\frac{n+k}{n}\right) \times x^{\frac{k}{n}}$ $(x>0)$

$\therefore h'(a) = \left(\frac{n+k}{n}\right) \times a^{\frac{k}{n}}$

4. r이 유리수라면, 어떤 자연수 n과 정수 m에 대해

$r = \frac{m}{n}$ 이 성립한다.

$m = n+k$ 라 하면,

$x^r = x^{\frac{n+k}{n}}$ (n은 자연수, k는 정수) 이다.

$\therefore h'(x) = \left(\frac{n+k}{n}\right)x^r = r x^{r-1}$ 로 나타낼 수 있다.

$\therefore h'(a) = r \cdot a^{r-1}$

r이 유리수가 아닌 실수라면,

(라)에 의해

$e^{\ln(h(x))} = e^{\ln(x^r)}$ $(x>0)$

이고

$\ln(h(x)) = \ln(x^r) = r\ln(x)$ $(x>0)$

$\therefore \frac{h'(x)}{h(x)} = r \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore h'(x) = r \cdot x^{r-1}$

양수 a에 대한 미분계수이므로

$h'(a) = r \cdot a^{r-1}$ 로 나타낼 수 있다.

한양대학교	답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1 / 1

[문1]

(1) $P(x)=x^n-a^n$에서, 조립제법 이용

$$\begin{array}{c|cccccccc} & (x^n) & (x^{n-1}) & (x^{n-2}) & (x^{n-3}) & \cdots & (x^2) & (x) & \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^n \\ & & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} & a^n \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

$\therefore Q(x)=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}$

$f(x)=x^n$에서

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}Q(x)=n\cdot a^{n-1}$

(2) i) $n+k\geq 0$

$h(x)=x^{\frac{n+k}{n}}$, $\{h(x)\}^n=x^{n+k}$, 양변 미분

$n\cdot\{h(x)\}^{n-1}\cdot h'(x)=(n+k)x^{n+k-1}$

$\therefore h'(x)=\frac{(n+k)x^{n+k-1}}{n\{h(x)\}^{n-1}}=\frac{n+k}{n}\cdot\frac{x^{n+k-1}}{x^{n+k-\frac{n+k}{n}}}=\frac{n+k}{n}x^{\frac{n+k}{n}-1}$

$\therefore h'(a)=\frac{n+k}{n}a^{\frac{n+k}{n}-1}$

ii) $n+k<0$

$n+k=-m$ 이라하면 $m\in\mathbb{N}$

$h(x)=x^{-\frac{m}{n}}$, $x^m\{h(x)\}^n=1$, 양변 미분

$m\cdot x^{m-1}\{h(x)\}^n+x^m\cdot n\{h(x)\}^{n-1}\cdot h'(x)=0$

$x>0$, $h(x)>0$이므로, $mh(x)+x\cdot nh'(x)=0$

$h'(x)=\frac{-mh(x)}{n\cdot x}=-\frac{m}{n}\cdot x^{-\frac{m}{n}-1}=\frac{n+k}{n}\cdot x^{\frac{n+k}{n}-1}$

$\therefore h'(a)=\frac{n+k}{n}a^{\frac{n+k}{n}-1}$

(3) 양변에 자연로그를 취하면

$\ln h(x)=\ln x^{\frac{n+k}{n}}=\frac{n+k}{n}\ln x$ ($\because h(x)>0$, $x>0$)

$(h(x)=x^{\frac{n+k}{n}}=e^{\ln h(x)}=e^{\ln(x^{\frac{n+k}{n}})})$

양변미분, $\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{n+k}{n}\cdot\frac{1}{x}$

$\therefore h'(x)=\frac{(n+k)h(x)}{n\cdot x}=\frac{n+k}{n}\cdot x^{\frac{n+k}{n}-1}$

$\therefore h'(a)=\frac{n+k}{n}\cdot a^{\frac{n+k}{n}-1}$

(4) $r\in\mathbb{Q}$ 일때

(1)에서 r이 자연수일때, (2)에서 r이 유리수일때

(정수일 때는, $n=1$)

$h(x)=x^r$의 도함수는, $h'(x)=rx^{r-1}$ 이므로,

$h'(a)=r\cdot a^{r-1}$

r이 무리수일때, $h(x)=x^r$에서 양변에 자연로그를 취하면

$\ln h(x)=r\ln x$, 양변미분

$\frac{h'(x)}{h(x)}=r\cdot\frac{1}{x}$. $\therefore h'(x)=\frac{rh(x)}{x}=r\cdot x^{r-1}$

$\therefore h'(a)=r\cdot a^{r-1}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1 / 2

[문제 1]

(1) $(n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$

$P(x) = x^n - a^n$

$P(a) = 0$ 이므로 제시문 (가) 에 의해 $P(x) = (x-a)Q(x)$

만족하는 $Q(x)$ 존재

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & -a^n \\ a & & a & a^2 & a^3 \cdots & a^{n-1} & a^n \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 & a^{n-1} & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법에 의하여 $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$

$f(x) = x^n$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

$$= \underline{n \cdot a^{n-1}}$$

(2) $(a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z})$ $h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수

i) $(n+k \geq 0)$

$$(h(x))^n = x^{n+k}$$

제시문 (나) 에 의하여

$h(x) \to x=a$에서 미분가능

$x^n \to$ 〃

$$\therefore ((h(x))^n)' = n \cdot h^{n-1}(x) \cdot h'(x)$$

$$n \cdot h^{n-1}(x) \cdot h'(x) = \underline{(n+k)x^{n+k-1}}$$ → (∵ (1)에 의하여)

$$h'(x) = \frac{(n+k)x^{n+k-1}}{n \cdot h^{n-1}(x)}$$

$$h'(a) = \frac{(n+k)a^{n+k-1}}{n \cdot a^{(\frac{n+k}{n})(n-1)}} = \underline{\frac{n+k}{n} a^{\frac{n+k}{n}-1}}$$

ii) $(n+k < 0)$

$$h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$$

$$h^n(x) = x^{n+k}$$

$$h^n(x) \cdot x^{-k} = x^n$$

$k < -n$ 이므로 k는 음수

$-k = t$로 치환

$(t > 0)$

$$h^n(x) \cdot x^t = x^n$$

제시문(다) → ~~$n \cdot h^{n-1}(x) \cdot h'(x)$~~

$$n \cdot h^{n-1}(x) \cdot h'(x) \cdot x^t + h^n(x) \cdot t \cdot x^{t-1} = n \cdot x^{n-1}$$

$$h'(x) = \frac{nx^{n-1} - h^n(x) \cdot t \cdot x^{t-1}}{nh^{n-1}(x) \cdot x^t}$$

$$h'(a) = \underline{\frac{n+k}{n} a^{\frac{n+k}{n}-1}}$$

(3) $a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$

$$h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$$

$$e^{\ln h(x)} = e^{\ln x^{\frac{n+k}{n}}}$$

$$(\ln h(x))' = \left(\frac{n+k}{n} \ln x\right)'$$

제시문 (나) → $h(x)$: $x=a$에서 미분가능

$\ln x$: 〃

$$\therefore \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{n+k}{n} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore h'(a) = \frac{n+k}{n} \cdot \frac{a^{n+k}}{a}$$

$$= \frac{n+k}{n} \cdot a^{n+k-1}$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2 / 2

(4)

$y=x^r$ $(r \in \mathbb{Q})$ 도 $y=x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$와

마찬가지로 미분계수를 구하는 데

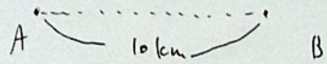
$y'=rx^{r-1}$로 구하면 된다.

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1 / 2

[문제 2]

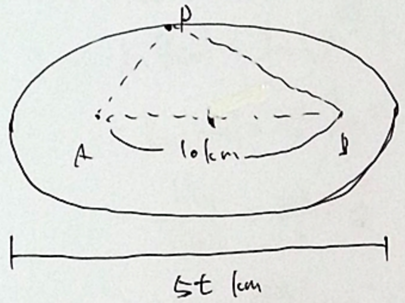
1. 이 사람이 움직인 거리는 $5t$ (km) 이다.



보물을 숨긴 장소를 P라 하면,

$\overline{AP} + \overline{BP} \le 5t$ 이다.

따라서 이를 만족하는 P의 위치는 두 초점 사이 거리가 10km 이고, 장축이 $5t$ km 인 타원의 내부가 된다.



2. 따라서 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{\left(\frac{5}{2}t\right)^2 - 5^2}$

$= \sqrt{25t^2 - 100}$ 이다.

장반경과 단반경의 길이가 a, b인 타원의 넓이가 πab 이므로

구하는 넓이 $= \pi \times \frac{5}{2}t \times \frac{1}{2}\sqrt{25t^2-100}$ 이다.

$$\therefore \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{4}\pi \times t \times \sqrt{25t^2-100}}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{4}\pi \times \frac{t}{t} \times \sqrt{25\frac{t^2}{t^2} - \frac{100}{t^2}}}{\frac{t^2}{t^2}} = \frac{5}{4}\pi \times 1 \times \sqrt{25}$$

$$= \boxed{\frac{25}{4}\pi}$$

$\therefore$ $\frac{25}{4}\pi$에 한없이 가까워진다.

3. 넓이 $= \pi \times \frac{5}{4} \times t \times \sqrt{25t^2-100}$ 이므로

t가 4 라면,

넓이 $= \pi \times \frac{5}{4} \times 4 \times 5\sqrt{16-4}$

$= 25\sqrt{12}\pi$

$= 50\sqrt{3}\pi$

$\therefore$ $50\sqrt{3}\pi$ 이다.

$\because$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서

타원의 넓이는

$2\int_{-a}^{a} y\, dx$ 이다.

$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$\therefore$ $2 \times \frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = 4 \times \frac{b}{a}\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

$x = a\sin\theta$ 로 치환하면

$dx = a\cos\theta\, d\theta$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= a|\cos\theta|$ 이다.

$\therefore$ $4 \times \frac{b}{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a|\cos\theta| \cdot a\cos\theta\, d\theta$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2 / 2

$$= 4 \times \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot a^2 \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 4ab \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= 2ab \times \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab \times \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right)$$

$$= \pi ab_{\,,,}$$

4

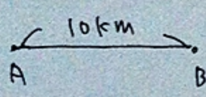
한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1 / 1

[문제 2]

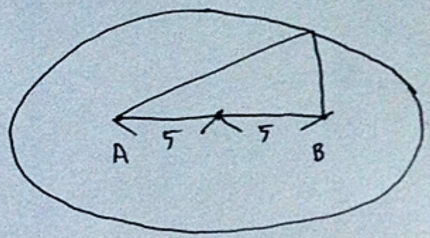
1.



사람의 이동속력 : 5km 걸린시간 : t 시간

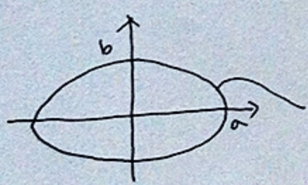
∴ 이동거리 = 5t

가장 최단으로 가는 방법은 직선이므로 직선거리의 합이 5t 이내인 지점에 보물이 숨겨져 있다.



A, B를 두 초점으로 하고, 장축의 길이가 5t 인 타원 내부가 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역이다.

2. ~~타원의 넓이는 일반적으로~~



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$2 \times \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

$$= 4b \times \int_{0}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

$x = a\sin\theta$

$dx = a\cos\theta \cdot d\theta$

~~(준식) =~~

$$(\text{준식}) = 4b \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\theta}{a^2}} \cdot a\cos\theta\, d\theta$$

$$= 4ab \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4ab \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4ab\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = ab\pi$$

타원의 넓이는 일반적으로 $ab\pi$ 가 된다.

장축의 길이가 5t 이므로 $a = \frac{5}{2}t$

단축의 길이는 $b = \sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}$

$$A(t) = \frac{5}{2}t \cdot \sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}$$

$$\therefore \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{2}t \cdot \sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}}{t^2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{25}{t^2}}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} \qquad \therefore \frac{25}{4}$$

3. $t = 4$ 일때 이므로

$a = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$

$b = \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 16 - 25} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75}$

$$\therefore ab\pi = 10 \cdot \sqrt{75} \cdot \pi$$

$$= 50\sqrt{3}\pi$$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1 / 1

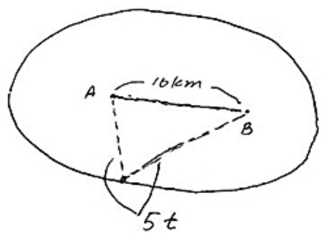
[문제 2]

1. 이 사람이 간 거리 = $5t$ (km)

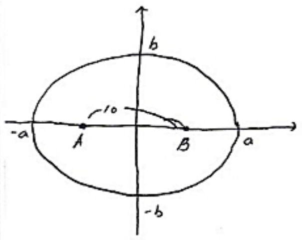
이 사람이 갈 수 있는 범위 : A에서 부터의 거리 + B에서부터의거리 $\le 5t$

→

타원모양



2. $A(t)$ = 타원의 넓이



타원의 방정식

$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2a = 5t$, $b^2 = a^2 - 25$

$\therefore a = \frac{5}{2}t$, $b = \sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}$

$4\int_0^a \sqrt{-\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2}\, dx = 4b\int_0^a \sqrt{-\frac{1}{a^2}x^2 + 1}\, dx$

$\rightarrow x = a\sin\theta$ $\quad dx = a\cos\theta \cdot d\theta$

$\therefore A(t) = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$

$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$

$= 4ab\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$

$\rightarrow ab\pi = \frac{5}{2}t\sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}\ \pi$

$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t^2}$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{5}{2}t\sqrt{\frac{25}{4}t^2 - 25}}{t^2} = \frac{5}{2} \times \sqrt{\frac{25}{4}} = \boxed{\frac{25}{4}\pi}$

3. $A(\cancel{t})$ $(t=4)$

$A(4) = \left(\frac{5}{2}\times 4 \times \sqrt{\frac{25}{4}\times 4^2 - 25}\right)\pi$

$= 10 \times \sqrt{75}\ \pi$

$= \boxed{50\sqrt{3}\pi}$