한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계

모 의 논 술

수험번호 (   ) 성명 (   )

[문제 1] 수열의 성질과 미분에 관한 물음에 제시문을 읽고 답하시오. (50점)

(가) 영이 아닌 상수 α와 $\lim_{n\to\infty} d_n = \beta$인 수렴하는 수열 $\{d_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(d_n+\alpha) = \beta+\alpha$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$이다.

(나) 함수 $f(x)$가 $x=d$에서 미분가능하고, $\lim_{n\to\infty}\mu_n = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = d$이고, 임의의 자연수 n에 대하여 $\mu_n \neq d,\ \gamma_n \neq d$를 만족하는 수열 $\{\mu_n\}$과 수열 $\{\gamma_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\mu_n)-f(d)}{\mu_n - d} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\gamma_n)-f(d)}{\gamma_n - d}$가 성립한다.

1. $a_1 = 2$이고 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$일 때 a_n을 구하고 수학적 귀납법으로 증명하시오. 모든 자연수 n에 대하여 $c_n = \frac{a_n}{2n+1}$이라할 때 모든 자연수 n에 대하여 $c_n < c_{n+1}$을 보이고 $\lim_{n\to\infty} c_n = c$를 구하시오.

2. $b_1 = 2,\ b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2}\quad (n = 1,2,3,\cdots)$로 정의되는 수열 $\{b_n\}$이 있다.
모든 자연수 n에 대하여 $b_n > b_{n+1}$임을 수학적 귀납법으로 증명하고 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구하고 $\lim_{n\to\infty} b_n = b$를 구하시오.

3. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & |x| \le 1 \\ x & |x| > 1 \end{cases}$에 대하여, $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$을 증명하시오.
$\lim_{n\to\infty}\frac{f(c_n)-f(c)}{c_n - c}$와 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(b)}{b_n - b}$을 비교·설명하고, $x=c$에서 함수 $f(x)$의 미분가능성을 제시문 (나)의 관점에서 설명하시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

(가) 좌표평면에서 일차변환 f와 g를 나타내는 행렬을 각각 A와 B라 하자. E를 2차 단위행렬이라고 할 때, 행렬 A, B는 다음을 만족시킨다.

(1) $A+B=2E$ (2) $A^2+B^2=4E$

(나) 일차변환 $h:(x,y)\to(x',y')$ 을 나타내는 식이 $\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y \\ y'=a_{21}x+a_{22}y \end{cases}$ (a_{ij}는 실수, $i,j=1,2$)로 주어졌을 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$를 일차변환 h를 나타내는 행렬이라고 한다.

1. 일차변환 f가 역변환을 가질 때 행렬 A와 B를 구하시오.

2. 일차변환 f가 점 $(1,0)$을 점 $(1,a)$로 보낼 때 실수 a가 만족해야 할 조건을 말하고, 그 조건을 충족하는 경우 행렬 A와 B의 쌍을 구하시오.

3. 일차변환 f가 점 $(1,0)$을 점 $(2,b)$로 보낼 때 행렬 A와 B의 쌍을 구하시오.