한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계 (3) **논 술 예 시 답 안** **1번**

1. S는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이고, α, β, γ는 모두 원점을 지나는 평면이므로, 교선 C_1, C_2, C_3는 각각의 평면 α, β, γ에 놓인 반지름 1인 원이다. 따라서 원판 A의 넓이는 π이다.
평면 β: $\sqrt{3}y - z = 0$의 법선벡터는 $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, 평면 γ: $-x+\sqrt{2}y=0$의 법선벡터는 $(-1,\ \sqrt{2},\ 0)$로 하고 두 평면이 이루는 예각을 θ라 하면, $\cos\theta = \dfrac{(0,\ \sqrt{3},\ -1)\bullet(-1,\ \sqrt{2},\ 0)}{|(0,\ \sqrt{3},\ -1)||(-1,\ \sqrt{2},\ 0)|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.
따라서 (원판 A의 평면 γ위로의 정사영의 넓이) = (원판 A의 넓이)$\times\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 이다.

2. 점 M_1을 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$, $z=\sqrt{3}y$, $x>0$을 만족한다. 따라서 M_1은 $(1,\ 0,\ 0)$이고, 같은 방법으로 M_2는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, M_3는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$이다. <그림1 참조>
세 점 M_1, M_2, M_3를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=1$로 두고 위 좌표들을 대입해 a, b, c 를 구하면, 평면의 방정식은 $x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z=1$이 되고, 따라서 $a+b+c=\sqrt{3}$ 이다.

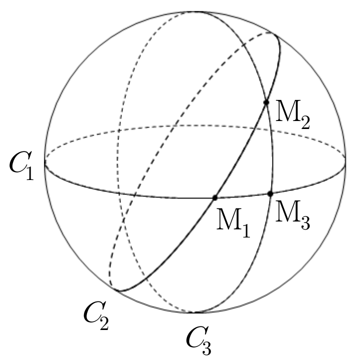


그림 1

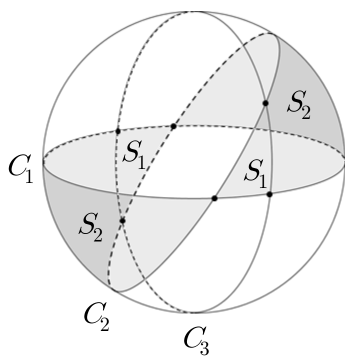


그림 2

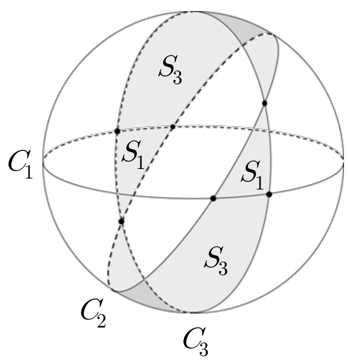


그림 3

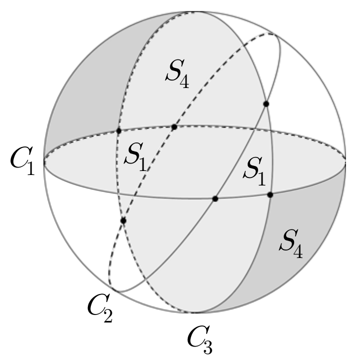


그림 4

3. C_1, C_2, C_3는 S를 8개의 조각으로 나눈다.
평면 α, β, γ의 법선벡터를 각각 $(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $(-1,\ \sqrt{2},\ 0)$으로 하면, 문제 1의 방법을 따라 평면 α, β가 이루는 예각은 $\dfrac{\pi}{3}$, 평면 β, γ가 이루는 예각은 $\dfrac{\pi}{4}$, 평면 γ, α가 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

<그림 2 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_2)=2\times 4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\dfrac{4}{3}\pi$ 이고, 정리하면 $S_1+S_2=\dfrac{2}{3}\pi$ ······ (1)

<그림 3 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_3)=2\times 4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\pi$ 이고, 정리하면 $S_1+S_3=\dfrac{\pi}{2}$ ······ (2)

<그림 4 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_4)=2\times 4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=2\pi$ 이고, 정리하면 $S_1+S_4=\pi$ ······ (3)

구면의 넓이는 $2S_1+2S_2+2S_3+2S_4=4\pi$ 이고, 정리하면 $S_1+S_2+S_3+S_4=2\pi$ ······ (4)

(1), (2), (3), (4)로부터 $S_1=\dfrac{\pi}{12}$, $S_2=\dfrac{7}{12}\pi$, $S_3=\dfrac{5}{12}\pi$, $S_4=\dfrac{11}{12}\pi$ 이고, 따라서 가장 작은 조각의 넓이는

$S_1=\dfrac{\pi}{12}$ 이다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시		
자 연 계 (3)	논 술 예 시 답 안	2번

1. 한 점 $(x_0, f(x_0))$에서 만나면, $0 < x_0 \le 1$이다.

$x = x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $\frac{1}{x_0} = 2x_0$이며 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$이다.

$h(x_0) = \frac{1}{2} + b = f(x_0) = 1 - \frac{1}{2} ln\, 2$이므로 $b = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$이다.

따라서 $b < \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$일 때 두 점에서 만난다.

2. 한 점 $(x_0, f(x_0))$에서 만나면, $x_0 \ge 1$이다.

$x = x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $-\ln 2 \cdot 2^{x_0} = 2ax_0$이고

$h(x_0) = ax_0^2 + 3 = 3 - 2^{x_0} = f(x_0)$이므로 $x_0 = \frac{2}{\ln 2} > 1$이고, $a = -\frac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4}$이다.

따라서 $a < -\frac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4} = -\frac{(\ln 2)^2 2^{\frac{2}{\ln 2}}}{4}$일 때 두 점에서 만난다.

3. $F(x) = f(x) - tx^2$라 하면 $F'(x) = f'(x) - 2tx$이다.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x < 1) \\ -\ln 2 \cdot 2^x & (x > 1) \end{cases}$과 $y = 2tx$의 그래프는 t의 값의 범위에 따라

i) $0 < t \le \frac{1}{2}$인 경우

$x = 1$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $F(x)$는 $x = 1$에서 극대가 된다.
$g(t) = F(1) = f(1) - t = 1 - t$

ii) $t > \frac{1}{2}$이고 $x < 1$인 경우

$F(x) = f(x) - tx^2$라 하면 $F'(x) = \frac{1}{x} - 2tx = 0$ 이고 $x = \frac{1}{\sqrt{2t}} < 1$

$t > \frac{1}{2}$이고 $x > 1$인 경우 $F'(x)$는 음수이다. $F(x)$는 $x = 1$에서 연속이고

$x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $x = \frac{1}{\sqrt{2t}} < 1$에서 극댓값이 있다.

$F(\frac{1}{\sqrt{2t}}) = g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln(2t))$이다. $g(\frac{e}{2}) = 0$이므로

$$\lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{g(t)}{2t - e} = \frac{1}{2} \lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{g(t) - g(\frac{e}{2})}{t - \frac{e}{2}} = \frac{1}{2} g'(\frac{e}{2}) = -\frac{1}{2e}$$

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계 (3)	**출제 의도 및 평가 지침**	1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 (3) [문제 1번]에서는 고교수학과정 중 '기하와 벡터'의 '공간도형과 공간좌표' 및 '벡터' 단원에 속하는 내용인 정사영, 벡터의 내적, 구와 평면의 방정식 등을 다루고 있다. 주어진 평면의 법선벡터를 이용해 두 평면이 이루는 각을 구하고, 이를 적절히 이용해 정사영의 넓이, 평면의 방정식, 평면들에 의해 나누어진 구면의 조각들의 넓이를 구할 수 있는지 묻고 있으며, 다음 3개의 문항으로 구성되어 있다.

1. 정사영의 넓이를 구하기.
2. 주어진 조건을 만족하는 평면의 방정식을 구하기.
3. 세 평면이 구면을 나누고 있을 때, 평면의 위치관계를 분석하고 이를 이용해 구면 조각들의 넓이를 구하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	두 평면 β와 γ가 이루는 각을 구한다.	20
		두 평면이 만날 때, 한 평면에 놓여있는 원판의 다른 평면 위로의 정사영의 넓이를 구한다.	10
2	30	구면 위의 주어진 조건을 만족하는 세 점을 구한다.	15
		위에서 구한 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구한다.	15
3	40	평면 α와 β, β와 γ, γ와 α가 이루는 각을 구한다.	20
		세 원에 의해 나누어진 구면 조각들의 넓이를 구한다.	20

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서의 다음 단원의 내용을 다루고 있다.
(1) 정사영 (기하와 벡터 - 공간도형과 공간좌표 - 공간도형)
(2) 구의 방정식 (기하와 벡터- 공간도형과 공간좌표- 공간좌표)
(3) 내적 (기하와 벡터 - 벡터 - 벡터의 내적)
(3) 평면의 방정식과 두 평면이 이루는 각 (기하와 벡터 - 벡터 - 직선과 평면의 방정식)

아울러 3개의 문항 중 2개 문항은 EBS 수능특강 교재의 내용과 다음과 같이 연계된다.
문항 1: EBS 수능특강 - 수학영역 - 기하와 벡터 - p.80 문제 2 및 다수의 정사영 관련 문제
문항 2: EBS 수능특강 - 수학영역 - 기하와 벡터 - p.129 발전유제 2 및 다수의 평면 및 구면의 방정식 관련 문제

한양대학교 2015학년도 신입학전형 논술고사

자 연 계 (3)	출제 의도 및 평가 지침	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 EBS 수능교재와 연계하여 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 도함수를 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고, 논리적인 사고력을 판단할 수 있도록 하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	접점 x_0 구하기	10
		b 구하기	10
		b의 범위 구하기	10
2	30	접점 x_0 구하기	10
		a 구하기	10
		a의 범위 구하기	10
3	40	$0 < t \le \frac{1}{2}$인 경우와 $t > \frac{1}{2}$인 경우의 $g(t)$ 구하기	20
		극댓값이 있는 점 구하기	10
		극한값 구하기	10

3. 출제 근거

제시문:

로그함수와 지수함수 – 수학 I B형 (EBS 수능특강), pp, 50, 72,

수학 II (EBS 수능완성), p. 57

문제:

(1) 로그함수와 지수함수의 도함수 - 수학 II (EBS 수능특강), pp, 98-101,

도함수의 활용 – 수학 II (EBS 수능특강), pp. 108–111

(2) 로그함수와 지수함수의 도함수 - 수학 II (EBS 수능특강), pp, 98-101,

도함수의 활용 – 수학 II (EBS 수능특강), pp. 108–111

(3) 도함수의 활용 – 수학 II (EBS 수능완성), p. 95

한양대학교

답안지 (자연계)

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

※예 : 1996년2월1일→960201

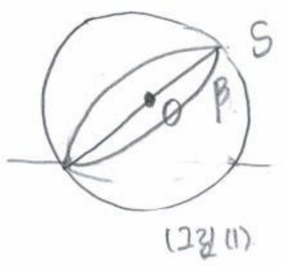
※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
   답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



(그림 (1))

그림(1)에서 구 S의 중심에서 평면 P까지의 거리는 0 이므로 P는 구S의 중심을 지나는 평면이다. 따라서 원판 A의 넓이는 π이다.

A의 γ위로의 정사영의 넓이를 구하기 위해 P와 γ가 이루는 이면각을 θ라고 하면,

$(0,\sqrt{3},1)\cdot(1,\sqrt{2},0) = 2\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다

따라서 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$이다.

2.

C_1과 C_2의 교점은 (p,q,r)이라하면 $p^2+q^2+r^2=1$ $r=0$, $r=\sqrt{3}q$ 이므로 $r=0=q$이다.

따라서 교점은 $M_1(1,0,0)$ 이다.

C_2와 C_3의 교점을 (a,b,c)라 하면 $a^2+b^2+c^2=1$ $c=\sqrt{3}b$, $a=\sqrt{2}b$ 이므로

$2b^2+b^2+3b^2=1$ $6b^2=1$ $\therefore b=\frac{1}{\sqrt{6}}$ $(\because a>0)$

$\therefore M_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

C_3과 C_1의 교점을 (s,k,t)라 하면

$s^2+k^2+t^2=1$, $t=0$, $s=\sqrt{2}k$ 이므로 $k^2=\frac{1}{3}$ 이므로 $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\because a>0)$

따라서 $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ 이다.

세점 M_1, M_2, M_3는 $ax+by+cz=1$ 을 지나므로 이평면의 방정식에 각각의 점을 넣어주면, $a=1$ ... ①

$\frac{a}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{6}}+\frac{c}{\sqrt{2}}=1$ ... ②

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a+\frac{1}{\sqrt{3}}b=1$ ... ③

①, ②, ③식을 연립하면 $a=1$, $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}-1$

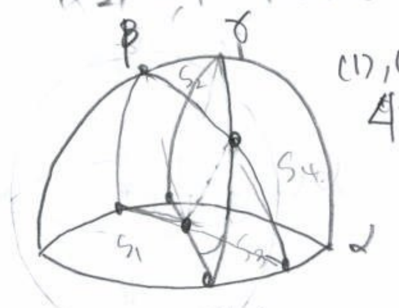
따라서 $a+b+c=\sqrt{3}$ 이다.

3.

α와 β의 이면각을 θ_1이라 하면 $\cos\theta_1=\frac{1}{2}$ 이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$이다. ... (1)

β와 γ의 이면각을 θ_2라 하면 $\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 $\theta_2=\frac{\pi}{4}$이다. ... (2)

α와 γ의 이면각을 θ_3라 하면 $\cos\theta_3=0$ 이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}$이다. ... (3)



그림(2)

(1), (2), (3) 을참고하면 세원을 반구 상에 그려보면 그림(2)와 같이 4영역으로 나누어지므로 전체 구상에서는 총 8개의 영역으로 나눠진다

가장작은 조각은 S_3의 영역을 2배한 것에 해당하므로

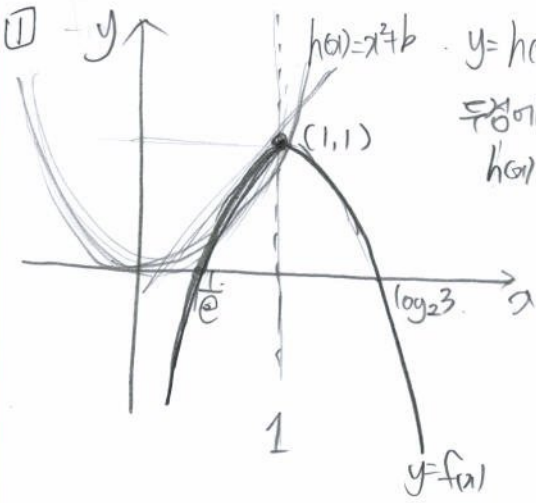
$2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$이다.

$\frac{1}{2\pi}$ $\frac{\pi}{4}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1



$y=h(x)$와 $y=f(x)$의 그래프가 서로다른 두점에서 만나려면 $0<x<1$ 에서 $h(x)$와 $f(x)$가 접할때의 b값보다 작은 y절편을 $h(x)$가 가져야한다.

$h(x)$가 $f(x)$와 $0<x<1$에서 만나는점을 $(t, \ln t+1)$ 이라가정하면 이점에서의 각각의 접선의 기울기가 같다.

$\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{t} \quad g'(t)=2t$

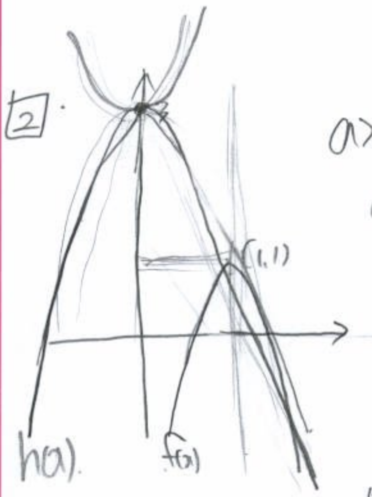
$\frac{1}{t}=2t \quad t^2=\frac{1}{2} \quad t=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (t>0)$

$f(t)=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1 = g(t)=\frac{1}{2}+b$

$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ (접할때!)

$\therefore b<\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

2



$a>0$ 이면 $h(x)$와 $f(x)$는 만나지 않으므로 $a<0$ 이어야한다.

이때 $f(x)$와 $h(x)$가 $x>1$ 인 점에서 접할때의 a값보다 작은값을 가지면 $h(x)$와 $f(x)$는 서로다른두점에서 만날수있다.

$x>1$에서 만나는점을 $(t, 3-2^t)$ 이라가정하면 1번과 마찬가지로 이점에서의 각각의 접선의기울기가 같으므로

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(t)=-(\ln 2)2^t = g'(t)=2at \\ f(t)=3-2^t = g(t)=at^2+3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} at^2=-2^t \\ -(\ln 2)2^t=2at \end{array}\right]$ 두식을 연립하면

$at^2=2at\times\left(\frac{1}{\ln 2}\right) \xrightarrow{t\neq 1} t=\frac{2}{\ln 2}=2\log_2 e$

$3-2^t=3-e^2=a\left(\frac{2}{\ln 2}\right)^2+3$

$a=\frac{-e^2}{4}(\ln 2)^2$ (접할때!)

$\therefore a<-\frac{e^2}{4}(\ln 2)^2$

3 $y=f(x)-tx^2=\begin{cases} 1+\ln x-tx^2 & (0<x\leq 1) \\ 3-2^x-tx^2 & (x>1) \end{cases}$

$\xrightarrow{x\text{에 대해 미분}} y'=\begin{cases} \frac{1}{x}-2tx & (0<x\leq 1) \\ -\ln 2\cdot 2^x-2tx & (x>1) \end{cases}$

$y'=0$ 인 x값은 $x=\frac{1}{\sqrt{2t}}$ $(0<x\leq 1)$

x	$x<\frac{1}{\sqrt{2t}}$	$\frac{1}{\sqrt{2t}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{2t}}$
y'	+	0	−
y	↗		↘

$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2t}}$ 일때 극댓값을 갖는다..

$g(t)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)-t\times\frac{1}{2t}=1+\ln\frac{1}{\sqrt{2t}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2t$

$\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{g(t)}{2t-e} \xlongequal{t-\frac{e}{2}=x\text{로 치환하면}} \lim_{x\to 0}\frac{g\left(x+\frac{e}{2}\right)}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2x+e)}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e}{2x+e}\right)}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln\left(\frac{2}{e}x+1\right)}{4x}$

$=-\frac{1}{2e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2}{e}x+1\right)}{\left(\frac{2}{e}x\right)}$

$=-\frac{1}{2e}$

$\therefore -\frac{1}{2e}$

※예 : 1996년2월1일→960201

한양대학교

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

답안지 (자연계)

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
   답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 평면 β는 원점을 지나므로, 구면 S와 만나서 생기는 원 C_2는 반지름 1인 원이다. 이때, α, β, γ의 법선 벡터를 각각 $\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3}$라 하면,

$\alpha : 0x + 0y + 1 \cdot z = 0, \Rightarrow \vec{n_1} = (0, 0, 1)$

$\beta : 0x + \sqrt{3}y - 1z = 0 \Rightarrow \vec{n_2} = (0, \sqrt{3}, -1)$

$\gamma : 1x - \sqrt{2}y + 0z = 0, \Rightarrow \vec{n_3} = (1, -\sqrt{2}, 0)$

$A = \pi$, β와 γ 사이의 각 θ에 대하여,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_2}\cdot\vec{n_3}|}{|\vec{n_2}||\vec{n_3}|} = \frac{|-\sqrt{6}|}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 정사영의 넓이는 $A\cos\theta = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 세 평면이 모두 원점을 지나므로, C_1, C_2, C_3는 모두 원점을 중심으로 하는 원이다. 이때, C_1과 C_2는 각각 α와 β 위의 곡선이므로, 두 원의 교점은 α와 β의 교선 위에 있게 된다. 마찬가지로, C_2와 C_3의 교점은 β와 γ의 교선 위에 있게 된다. 또한 C_3와 C_1의 교점은 γ와 α의 교선 위에 있다.

i) α와 β의 교선을 구하면,

$$\begin{cases} z = 0 & ① \\ z = \sqrt{3}y & ② \end{cases} \Rightarrow ①에 ②를 대입하면, y = 0$$

$\therefore$ α와 β의 교선은 $y = 0, z = 0$

ii) β와 γ의 교선을 구하면,

$$\begin{cases} z = \sqrt{3}y \\ x = \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow y = t로 매개화, \begin{cases} x = \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$$

$\therefore$ β와 γ의 교선은 $\frac{x}{\sqrt{2}} = y = \frac{z}{\sqrt{3}}$

iii) γ와 α의 교선을 구하면,

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = \sqrt{2}y \end{cases} \therefore \gamma와\ \alpha의\ 교선은,\ z = 0, \frac{x}{\sqrt{2}} = y$$

M_1, M_2, M_3는 구면 S 위의 점이므로, 원점으로부터의 거리가 1이다.

$\therefore M_1 : (x_1, 0, 0), \overline{OM_1} = x_1 \quad \therefore x_1 = 1 \Rightarrow M_1 : (1, 0, 0)$

$M_2 : (\sqrt{2}t, t, \sqrt{3}t), \overline{OM_2} = \sqrt{2+1+3}\,t = \sqrt{6}t = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow M_2 : (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$M_3 : (\sqrt{2}t, t, 0), \overline{OM_2} = \sqrt{2+1}\,t = \sqrt{3}t = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow M_3 : (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$

세 점을 지나는 평면의 방정식을 $ax + by + cz = 1$이라하면, M_1, M_2, M_3를 대입,

$$\begin{cases} a \cdot 1 = 1 \\ a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \\ a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 연립하면 $a = 1, b = \sqrt{3} - \sqrt{2}, c = \sqrt{2} - 1$

$\therefore a + b + c = \sqrt{3}$

3. 평행하지 않은 세 평면이 만났으므로, 공간은 세 평면에 의해 8개의 부분으로 나뉜다. 이때 구면 S의 중심이 원점이고, 세 평면이 모두 만나는 지점 또한 원점이므로, 구면 S는 8개의 공간 모두에 들어가 있다. 따라서 구면 S는 α, β, γ, 즉 C_1, C_2, C_3에 의해 8개의 조각으로 나뉜다.
8개의 조각 중 가장 작은 조각은, 세 평면의 사잇각(α와β 사이, β와γ 사이, γ와α 사이)이 최소인 부분에 존재할 것이다.

i) 먼저, α와 β 사이를 보면, 사잇각 θ_1에 대하여,

$$\cos\theta_1 = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{|-1|}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ α와 β에 의해 나뉜 부분은 $4\pi \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \overset{let}{=} S_1$

ii) 그리고 β와 γ 사이의 사잇각 θ_2에 대하여

$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta_2 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ S_1이 β와 γ에 의해 다시 나뉜 부분은 $S_1 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}\pi \overset{let}{=} S_2$

iii) 마지막으로 γ와 α 사이의 사잇각 θ_3에 대해

$\cos\theta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta_3 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ S_2가 다시 나뉜 부분은 $S_2 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{96}$

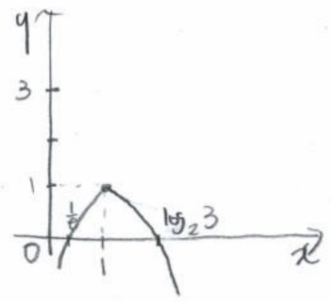
$\therefore$ 가장 작은 부분의 넓이는 $\frac{\pi}{96}$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f(x) = \begin{cases} 1+\ln x & 0<x\le 1 \\ 3-2^x & x>1 \end{cases}$

$f(x)$ 그래프를 좌표평면위에 나타내면 [그림 1] 과 같다



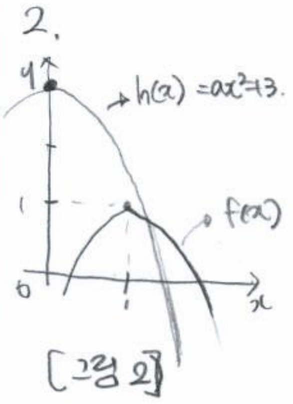
[그림 1]

만약 $h(x)$와 $f(x)$가 한 점에서 접한다면, 그 접점을 $(a, 1+\ln a)$라 했을때, (접점은 $0<x\le1$ 에서만 나올 수 있다) a가 $\frac{1}{\sqrt2}$이면 두 그래프의 접선의 기울기가 같으므로, $1+\ln\frac{1}{\sqrt2} = \frac12+b$ 가 성립하여야 한다. 따라서 이때 $b=\frac12-\ln\sqrt2$ 이다

그러므로 $b<\frac12-\ln\sqrt2$ 이면 항상 서로다른 두점에서 만나는 것을 알 수 있다

따라서, $b<\frac12-\ln\sqrt2$

2.



[그림 2]

우선 $a>0$ 이면 두그래프는 아예 만날수 없다

$a<0$ 일때

$\lim_{x\to\infty}(ax^2+3) > \lim_{x\to\infty}(3-2^x)$ 임을 알수 있다.

따라서 우선 둘이 접할때의 a를 찾아보면,

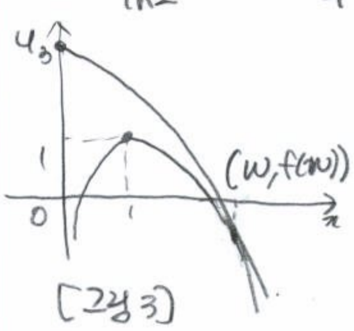
접점을 $(w, 3-2^w)$ 라고 할때, (이때 $w>1$ 인 접점을 찾는다)

$h'(w)=2aw$ $f'(w)=-\ln2\cdot2^w$

$2aw=-\ln2\cdot2^w$ 이고 $3-2^w=aw^2+3$ 이므로

$2aw=\ln2\cdot aw^2$

$w=\frac{2}{\ln2}$ $a=-\frac{(\ln2)^2}{4}\cdot2^{\frac{2}{\ln2}}$



[그림 3]

접할때의 2그래프를 그리면 [그림3] 과같다

따라서 이때 $|a|$는 $\frac{(\ln2)^2}{4}\cdot2^{\frac{2}{\ln2}}$ 보다 커야 하므로

$a<-\frac{(\ln2)^2}{4}\cdot2^{\frac{2}{\ln2}}$

3.

$f(x)-tx^2 = \begin{cases} 1+\ln x-tx^2 & (0<x\le1) \\ 3-2^x-tx^2 & (x>1) \end{cases}$

$f'(x)-2tx = \begin{cases} \frac1x-2tx & (0<x\le1) \\ -\ln2\cdot2^x-2tx & (x>1) \end{cases}$

이때, $f(x)-tx^2=R(x)$ 라고 하면

$R'(0)=\infty$ $R'(1-0)=1-2t$ $R'(1+0)=-2\ln2-2t$ $R'(\infty)=-\infty$

임을 알 수 있다. 이때 t는 무한히 $\frac{e}{2}$로 수렴하므로

$R(x)$는 $0<x\le1$ 사이에서 극댓값을 가진다는 것을 알 수 있다

$0<x\le1$ 일때 $R(x)=1+\ln x-tx^2$ 이므로

$R'(x)=\frac1x-2tx$

$=\frac1x(1-2tx^2)$

따라서 $x=\frac{1}{\sqrt{2t}}$ 일때 극댓값을 가지므로

$R\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)=1+\ln\frac{1}{\sqrt{2t}}-t\times\frac{1}{2t}$

$=1-\ln\sqrt{2t}-\frac12$

$=\frac12-\ln\sqrt{2t}$

$=g(t)$ 이다.

$\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{g(t)}{2t-e}$

$=\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac{\frac12-\frac12\ln2t}{2t-e}$

$=\lim_{t\to\frac{e}{2}}\frac12\left(\frac{1-\ln2t}{2t-e}\right)$

$=\lim_{t-\frac{e}{2}\to0}\frac14\left(\frac{1-\ln2t}{t-\frac{e}{2}}\right)$ 이때 $t=r+\frac{e}{2}$로 치환하면

$=\lim_{r\to0}\frac{1-\ln(2r+e)}{4r}$

$=-\frac{1}{2e}$

따라서 구하는 값은 $-\frac{1}{2e}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계)

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

※예 : 1996년2월1일→960201

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 먼저 구면 S를 구하면 $x^2+y^2+z^2=1$ 이다. 평면 β가 원점을 지나므로 구면 S와 평면 γ의 교선은 반지름의 길이가 1인 원이다. 따라서 원판 A의 면적은 π 이다. 이때 원판 A의 평면 γ위로의 정사영의 면적을 구하기 위해 원판A가 속한 평면인 평면 β와 평면 γ의 이면각을 구하면 다음과 같다.

평면β의 법선벡터 $(0, \sqrt{3}, -1)$

평면γ의 법선벡터 $(1, -\sqrt{2}, 0)$

$\Rightarrow (0, \sqrt{3}, -1)\cdot(1, -\sqrt{2}, 0) = \sqrt{3+1}\sqrt{1+2}\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 β와 γ가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 원판A의 평면 γ위로의 정사영의 넓이는 $\pi \times \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 이다.

2. 먼저 평면 α, β, / β, γ / γ, α 의 교선을 각각 구하면 다음과 같다.

$\alpha, \beta : x=1 \rightarrow l_1$

$\beta, \gamma : \frac{x}{\sqrt{2}} = y = \frac{z}{\sqrt{3}} \rightarrow l_2$

$\gamma, \alpha : x=\sqrt{2}y,\ z=0 \rightarrow l_3$

M_1은 직선 l_1과 $x^2+y^2+z^2=1$의 교점중 x좌표가 양수인 점이므로 $M_1(1, 0, 0)$ 이다.

M_2는 직선 l_2와 $x^2+y^2+z^2=1$의 교점 중 x좌표가 양수인 점이므로 $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

M_3는 직선 l_3와 $x^2+y^2+z^2=1$의 교점 중 x좌표가 양수인 점이므로 $M_3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 이다.

이때 평면 $ax+by+cz=1$ 이 M_1, M_2, M_3를 모두 지나므로 각좌표를 넣어 a, b, c의 값을 구하면 다음과 같다

$a=1,\ b=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ c=\sqrt{2}-1$ 이다.

따라서 $a+b+c=\sqrt{3}$ 이다.

3.

먼저 C_1으로 구면을 나눈다고 생각하면 구면은 2부분으로 나누어진다. 그리고 C_2를 추가하면 구면은 4부분으로 나누어진다 그곳에 C_3를 추가해 나누면 C_1, C_2로 나누어진 4부분을 C_3가 모두 지나면서 두부분으로 나누므로 C_1, C_2, C_3에 의해 구면은 8부분으로 나뉜다. 그때의 구면의 잘린 조각의 넓이는 각 평면이 이루는 각을 중심각으로 하는 구의 껍질모양 이다.

α, β가 이루는 각 $\frac{\pi}{3}$

β γ가 이루는 각 $\frac{\pi}{4}$

γ α가 이루는각 $\frac{\pi}{2}$

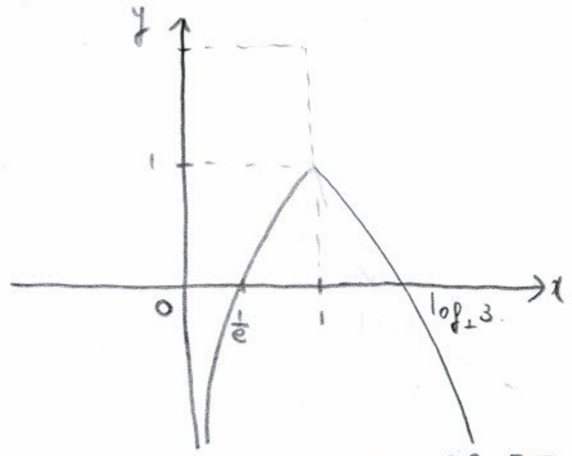
따라서 α, β가 이루는각을 중심으로 할때 최소이며 그값은 $4\pi \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\pi$ 이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

[문제2]

1. $f(x)$의 그래프를 그려보면 이와 같이 그려진다.



$h(x)$와 $f(x)$의 그래프가 서로 다른 두점에서 만나기위해서는

$h(x)$와 $f(x)$가 접하기 직전까지 가능하다

$h(x)$와 $f(x)$의 접점을 $(t, 1+\ln t)$라 두자

$h(x) = x^2 + b$ $\quad h'(x) = 2x$ $\quad$ 점 t에서의 기울기는 $2t$

$f(x) = 1 + \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ 점 t에서의 기울기는 $\frac{1}{t}$ $\quad$ (단 $0<t\le1$)

$2t = \frac{1}{t}$ 이므로 $\quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이나온다

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{2}\ln 2\right)$를 $h(x)$에 대입하면

$1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} + b \quad b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

$\therefore$ $h(x)$와 $f(x)$의 그래프가 서로 다른 두점에서 만나기 위해서

b의 범위는 $\quad b < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$ 이다.

2. 위의 $f(x)$의 그래프를 다시 활용하여

$h(x) = ax^2 + 3$ 과 $f(x)$가 서로 다른 두점에서 만나기위해서는

$(1 < x)$ 인 범위에서 $h(x)$가 $f(x)$와 접하기 직전까지이다.

$h(x)$와 $f(x)$의 접점을 $(t, 3-2^t)$라 두자

$h(x) = ax^2 + 3$ $\quad h'(x) = 2ax$ $\quad x=t$에서의 접선의 기울기는 $2at$

$f(x) = 3 - 2^x$ $\quad f'(x) = -2^x \ln 2$ $\quad x=t$에서의접선의기울기는 $-2^t \ln 2$

$2at = -2^t \ln 2 \cdots$ ①

$f(t) = h(t)$ 이므로

$3 - 2^t = at^2 + 3 \cdots$ ②

① 과 ② 식을 연립하면 $\quad t = \frac{2}{\ln 2}$ 가 나온다.

$t = \frac{2}{\ln 2}$ 를 ① 식에 대입한 후 a의 값을 구하면

$a = -2^{\frac{2}{\ln 2}-2}(\ln 2)^2$ 이 나온다.

$|a|$는 접할때 보다는 커야한다

따라서 $\quad a < -2^{\frac{2}{\ln 2}-2}(\ln 2)^2$

3. $f(x) - tx^2 = g(x)$라 두자. (단, $t > 0$)

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \ln x - tx^2 & (0 < x \le 1) \\ 3 - 2^x - tx^2 & (x > 1) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2tx & (0 < x \le 1) \\ -2^x \ln 2 - 2tx & (x > 1) \end{cases}$$

단, $-2^{\alpha}\ln 2 - 2t\alpha$

x	0	⋯	$\frac{1}{\sqrt{2t}}$	⋯	1	⋯	α	⋯
$g'(x)$	+	+	0	−	−	−	0	+
$g(x)$								

$g(x)$의 극댓값은 $\quad x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$ 일때 의 함수값이다.

$g(t) = 1 + \ln \frac{1}{\sqrt{2t}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2t$

$$\lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1 - \ln 2t)}{2t - e} = \lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{\frac{1}{2}\left(\ln \frac{e}{2t}\right)}{2t - e}$$

$2t - e = x$ 로 치환하자 $\quad t \to \frac{e}{2} \quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{e}{x+e}\right)}{2x} = -\frac{1}{2e}$$