한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계 (2) **논 술 예 시 답 안** **1번**

1. 조건 (1), (2)를 만족하는 일차 변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$에서 $\begin{matrix} 2a+b=1 \cdots ① \\ 2c+d=2 \cdots ② \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$에서 $a^2+c^2=1 \cdots ③$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$에서 $b^2+d^2=1 \cdots ④$

①, ②, ③, ④로 부터

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$또는 $\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ 이다. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$이고 $\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 17/5 \end{pmatrix}$ 이므로

점 $(3,2)$가 옮겨지는 점은 $(2,3)$ 또는 $(6/5, 17/5)$이다.

2. 먼저 각각의 h_α, h_β, h_γ를 나타내는 행렬을 구하자. 각 α만큼 회전하는 회전변환을 g_α, x축에 대한 대칭변환을 h라 하면 $h_\alpha = g_\alpha h g_\alpha^{-1} = g_\alpha h g_{-\alpha}$이므로, h_α를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ 이고, 같은 방법으로 h_β와 h_γ를 나타내는 행렬은

각각 $\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$가 된다.

합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$이 되고,

따라서 $h_\alpha \circ h_\beta$는 각 $2(\alpha-\beta)$만큼 회전하는 회전변환이다.

$h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta+\gamma) & \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) & -\cos 2(\alpha-\beta+\gamma) \end{pmatrix}$

이므로 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$는 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$인 직선에 대한 대칭변환이다.

3. $a_n - a_{n+1} + a_{n+2} = 1$이므로 문제 2에 의해 임의의 자연수 n에 대해 $f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$는 원점을 지나고

기울기가 $\tan\left(\frac{a_n\pi}{12} - \frac{a_{n+1}\pi}{12} + \frac{a_{n+2}\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12}$ 인 직선에 대한 대칭변환이다. 이를 f라 하자.

즉, 임의의 자연수 n에 대해 $f = f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$이다.

$2014 = 3 \times 671 + 1$이고 $f \circ f$는 항등변환이므로

$$f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014} = f_1 \circ (f_2 \circ f_3 \circ f_4) \circ (f_5 \circ f_6 \circ f_7) \circ \cdots \circ (f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}) = f_1 \circ \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{671\text{개}} = f_1 \circ f$$

이다. f_1은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\frac{5\pi}{12}$인 직선에 대한 대칭변환이므로, 문제 2에 의해 $f_1 \circ f$는

각 $2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환이다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시		
자 연 계 (2)	논 술 예 시 답 안	2번

1. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-f(x)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+6x=f'(0)+6x$

따라서 $f(x)=3x^2+f'(0)x+C$ 이다. (여기서 C는 적분상수이다)

- $f(0)=0=C$이다.
- $f(1)=1=3+f'(0)$이므로 $f'(0)=-2$이다.

그러므로 $f(x)=3x^2-2x$이다.

2. 중간값의 정리에 의해 $f(x)=\frac{1}{2}$인 x_0가 0과 1사이에 존재한다.

구간 $[0,x_0]$와 $[x_0,1]$에 대하여 평균값의 정리를 적용하면,

$f'(c_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0}$와 $f'(c_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}$인 $0<c_1<x_0$과 $x_0<c_2<1$가 존재한다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{f'(c_1)}+\frac{1}{f'(c_2)}=2 &\Leftrightarrow \frac{x_0}{f(x_0)}+\frac{1-x_0}{1-f(x_0)}=2\\ &\Leftrightarrow x_0(1-f(x_0))+(1-x_0)f(x_0)=2f(x_0)(1-f(x_0))\\ &\Leftrightarrow (1-2f(x_0))(x_0-f(x_0))=0\end{aligned}$$

그런데, $f(x_0)=\frac{1}{2}$이므로, $1-2f(x_0)=0$이다. 따라서 $(1-2f(x_0))(x_0-f(x_0))=0$이 성립한다.

그러므로 $\frac{1}{f'(c_1)}+\frac{1}{f'(c_2)}=2$이다.

3. $n=1$인 경우는 구간 $[0,1]$에서 평균값 정리를 적용하면, $f'(c_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$인 c_1이 0과 1사이에 존재한다. $n=2$인 경우는 (2)에서 이미 증명하였는데, 증명의 아이디어는 다음과 같다.

① 구간 $[0,1]$의 함수 f에 대한 치역 $f([0,1])$에 포함되는 구간 $[0,1]$을 2등분하여 중간값의 정리를 적용.
② 중간값의 정리의 적용을 통해 구한 값 $x_0\in(0,1)$에 의해 결정된 두 구간 $[0,x_0]$과 $[x_0,1]$에 대해 평균값의 정리를 적용.

$n\geq 3$인 경우에도 위의 아이디어를 적용한다. 우선 치역 $f([0,1])$에 포함되는 구간 $[0,1]$을 n등분하여 얻은 값은 $\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$이다. k는 $1\leq k\leq n-1$인 자연수라고 할 때, 중간값의 정리에 의해 $f(x)=\frac{k}{n}$를 만족시키는 x가 0과 1사이에 적어도 하나 존재한다. 그런 x중에서 제일 작은 수를 a_k라고 하자. 그러면, $f(a_k)=\frac{k}{n}$ $(1\leq k\leq n-1)$이고, 중간값의 정리에 의해 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<1$을 만족함을 알 수 있다.

$a_0=0, a_n=1$이라 하고, 구간 $[a_{k-1},a_k]$에서 평균값의 정리를 적용하면 $f'(c_k)=\frac{f(a_k)-f(a_{k-1})}{a_k-a_{k-1}}$을 만족시키는 c_k가 a_{k-1}과 a_k사이에 적어도 하나 존재한다. 그런데, $f'(c_k)=\frac{f(a_k)-f(a_{k-1})}{a_k-a_{k-1}}=\frac{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}{a_k-a_{k-1}}=\frac{1}{n(a_k-a_{k-1})}$이므로, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}=\sum_{k=1}^{n}n(a_k-a_{k-1})=n(a_n-a_0)=n$이다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계 (2)	**출제 의도 및 평가 지침**	1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

자연계열 (2) [문제 1번]에서는 고교수학과정 중 ‘기하와 벡터’의 ‘일차변환과 행렬’ 단원에 속하는 내용인 회전변환, 대칭변환 등의 일차변환과, 이러한 일차변환을 나타내는 행렬을 다루고 있다. 주어진 일차변환에 대한 몇 가지 정보를 적절히 활용하여, 이 일차변환이 구체적으로 어떤 변환인지 분석하고 추론해 낼 수 있는지 묻고 있으며, 다음 3개의 문항으로 구성되어 있다.

1. 주어진 조건을 만족하는 일차변환을 나타내는 행렬을 모두 구하기.
2. 대칭변환들의 합성변환을 나타내는 행렬을 구하고, 이를 통해 이 일차변환을 이해하기.
3. 귀납적으로 정의된 수열에 의해 결정된 대칭변환들의 합성변환의 규칙성을 발견하고 간단하게 하기.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	주어진 조건을 만족하는 일차변환의 행렬을 구한다.	30
2	30	주어진 두 대칭변환의 합성변환은 각 $2(\alpha-\beta)$ 만큼 회전하는 회전변환임을 보인다.	20
		주어진 세 대칭변환의 합성변환은 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$인 직선에 대한 대칭변환임을 보인다.	10
3	40	임의의 자연수 n에 대하여, 합성변환 $f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$는 원점을 지나고 기울기가 $\tan\frac{\pi}{12}$인 직선에 대한 대칭변환임을 보인다.	20
		합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014}$는 각 $\frac{2\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환임을 보인다.	20

3. 출제 근거

이 문제는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생들은 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 교과서의 다음 단원의 내용을 다루고 있다.

(1) 일차변환을 나타내는 행렬 (기하와 벡터 – 일차변환 - 일차변환과 행렬)
(2) 회전변환, 대칭변환을 나타내는 행렬 (기하와 벡터– 일차변환 – 여러 가지 일차변환)
(3) 합성변환과 역변환 (기하와 벡터 - 일차변환의 합성과 역변환 - 일차변환의 합성 / 일차변환의 역변환)
(3) 귀납적으로 정의된 수열 (수학 I - 수열 - 수학적 귀납법)

아울러 3개의 문항 중 2개 문항은 EBS 수능특강 교재의 내용과 다음과 같이 연계된다.
문항 1: EBS 수능특강 - 수학영역 - 기하와 벡터 - p.34 문제 02
문항 3: EBS 수능특강 - 수학영역 - 수학I B형 - p.119 문제 2

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사		
자 연 계 (2)	**출제 의도 및 평가 지침**	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과 교육의 정상화를 위하여 고등학교 교과과정의 범위에서 EBS 수능특강 교재에 있는 문제를 약간 변형하여 출제하였다. 수능을 대비해서 EBS 수능특강과 EBS 수능완성 교재를 충실히 공부를 한 수험생이면 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 함수의 미분과 적분의 정의 및 의미를 잘 이해하여, 주어진 관계식으로부터 미분과 적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는지를 묻는 문항과 고등학교 과정의 함수와 미분 단원에서 제일 중요한 정리인 중간값의 정리와 평균값의 정리를 정확히 이해하여 주어진 함수에 대한 관계식을 증명할 수 있는지를 평가하는 종합적인 문제이다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	주어진 관계식으로부터 미분의 정의를 이용하여 식을 찾을 수 있는가? 미분과 적분의 관계를 이해하고, 조건을 만족시키는 함수를 찾을 수 있는가?	30
2	30	중간값의 정리를 정확히 이해하고 있는가?	10
		평균값의 정리를 적용하여 주어진 식을 유도해낼 수 있는가?	20
3	40	중간값의 정리를 이해하고, 주어진 상황에 적용할 수 있는가?	20
		평균값의 정리를 반복적으로 적용하여 주어진 식을 구할 수 있는가?	20

3. 출제 근거

EBS 수능특강 (2014)

- 적분과 통계: p. 35의 문제 4번

※예 : 1996년2월1일→960201

한양대학교

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

답안지 (자연계)

※ 감독관 확인란	성 명

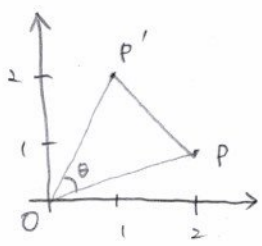
【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
   답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. (2)에서 항상 $\overline{OA}=\overline{OB}$ 가 성립한다고 하였으므로, 이 변환은 원점에서 점까지의 거리는 변화시키지 않는 대칭변환 또는 회전 변환이다.

i) 회전 변환 일 경우,



점 $(2,1)$을 P, 점 $(1,2)$를 P' 이라고 하자.

그리고 $\angle POP'$을 θ 라고 하자. $\overline{OP}=\overline{OP'}=\sqrt{5}$, $\overline{PP'}=\sqrt{2}$

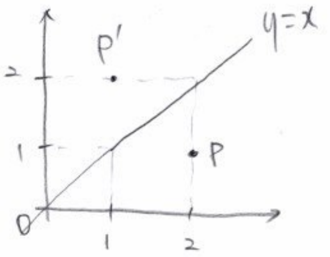
$\triangle OPP'$ 에서 cos 제2법칙을 사용하면,

$$\cos\theta = \frac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

따라서 이 회전 변환은 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 이다.

점 $(3,2)$ 가 옮겨지는 점은 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$ 이다.

ii) 대칭 변환일 경우,



점P'과 점P는 $y=x$에 대해 대칭이므로,

이 대칭 변환은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

따라서 점 $(3,2)$ 가 옮겨지는 점은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ 점 $(3,2)$가 옮겨질수 있는 점 : $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$, $(2,3)$

2. 원점을 지나고 기울기가 $\tan\theta$ 인 직선에 대한 대칭 변환은 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 이다

따라서, $h_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$, $h_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$, $h_r = \begin{pmatrix} \cos 2r & \sin 2r \\ \sin 2r & -\cos 2r \end{pmatrix}$

$$h_\alpha \circ h_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta) & -\sin(2\alpha-2\beta) \\ \sin(2\alpha-2\beta) & \cos(2\alpha-2\beta) \end{pmatrix}$$

즉, $h_\alpha \circ h_\beta$ 는 좌표평면위의 점을 원점 O를 중심으로 각$(2\alpha-2\beta)$ 만큼 회전하여 옮기는 회전 변환이다.

$(2\alpha-2\beta)=k$ 라고 하자.

$$h_\alpha \circ h_\beta \circ h_r = \begin{pmatrix} \cos k & -\sin k \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2r & \sin 2r \\ \sin 2r & -\cos 2r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k \cdot \cos 2r - \sin k \cdot \sin 2r & \cos k \cdot \sin 2r + \sin k \cdot \cos 2r \\ \sin k \cdot \cos 2r + \cos k \cdot \sin 2r & \sin k \cdot \sin 2r - \cos k \cdot \cos 2r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+2r) & \sin(k+2r) \\ \sin(k+2r) & -\cos(k+2r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta+2r) & \sin(2\alpha-2\beta+2r) \\ \sin(2\alpha-2\beta+2r) & -\cos(2\alpha-2\beta+2r) \end{pmatrix}$$

즉, $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_r$ 는 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha-\beta+r)$인 직선에 대한 대칭변환이다

3. $a_1=5$, $a_2=9$, $a_3=5$, $a_4=-3$, $a_5=-7$, $a_6=-3$, $a_7=5$, $a_8=9$, $a_9=5$, …

즉, a_n은 주기가 6인 수열이다.

또, 2.에 의해, $f_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{a_n\pi}{6} & \sin\frac{a_n\pi}{6} \\ \sin\frac{a_n\pi}{6} & -\cos\frac{a_n\pi}{6} \end{pmatrix}$ 이다.

먼저,

$f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$을 계산해보자.

2.에 의해, $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ 은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{9\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi\right)=\tan\frac{\pi}{6}$ 인 직선에 대한 대칭변환 이므로, $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ 이다.

같은 원리로, $f_4 \circ f_5 \circ f_6 = \begin{pmatrix} \cos\frac{-13}{6}\pi & \sin\frac{-13}{6}\pi \\ \sin\frac{-13\pi}{6} & -\cos\frac{-13}{6}\pi \end{pmatrix}$ 이다.

따라서, $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$ 은 좌표평면위의 점을 원점 O를 중심으로 각$\left(\frac{\pi}{3}-\frac{13\pi}{3}\right)$ $=(-4\pi)$ 만큼 회전하여 옮기는 변환이므로, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

a_n이 주기가 6인 수열이므로, f_n도 주기가 6인 변환이다.

따라서, $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014} = \{f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6\}^{335} \circ f_{2011} \circ f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}$

$= f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ 이다.

$f_1 \circ f_2 \circ f_3$은 $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & -\cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$ 이고, f_4는 $\begin{pmatrix} \cos-\frac{\pi}{2} & \sin-\frac{\pi}{2} \\ \sin-\frac{\pi}{2} & -\cos-\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ 이므로,

$$f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$$

∴ $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{2014}$ 는 좌표평면 위의 점을 원점 O를 중심으로 각 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼 회전시켜 옮기는 회전 변환이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+6xh-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+6xh}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-f(0)}{h-0}+6x\right)=6x+f'(0)$$

$\therefore f(x)=3x^2+f'(0)x+C$

$f(0)=C=0 \Rightarrow C=0$

$f(1)=3+f'(0)+C=1 \Rightarrow f'(0)=-2$

$\therefore f(x)=3x^2-2x$ //

2. $f(a)=\frac{1}{2}$ 라고하자

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(c_1) \quad (0\le c_1\le a) \quad -①$$

$$\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=f'(c_2) \quad (a\le c_2\le 1) \quad -②$$

$① \Rightarrow f'(c_1)=\frac{\frac{1}{2}}{a}=\frac{1}{2a}$

$\therefore f'(c_1)=2a$

$② \Rightarrow f'(c_2)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-a}=\frac{\frac{1}{2}}{1-a}=\frac{1}{2(1-a)}$

$\therefore f'(c_2)=2(1-a)=2-2a \quad (\because 0\le c_1\le a\le c_2\le 1)$

$\therefore f'(c_1)+f'(c_2)=2a+(2-2a)=2 \quad (0\le c_1\le c_2\le 1)$

3. $0=b_1<c_1<b_2<c_2<\cdots<b_n<c_n<b_{n+1}=1$

$f(b_k)=\frac{k}{n}$가 되도록 설정하자. (k는 $1\le k\le n$ 인 자연수)

$$\frac{f(b_k)-f(b_{k-1})}{b_k-b_{k-1}}=f'(c_k) \quad (b_{k-1}<c_k<b_k)$$

$$\therefore f'(c_k)=\frac{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}{b_k-b_{k-1}}=\frac{1}{n(b_k-b_{k-1})}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(c_k)}=n(b_k-b_{k-1})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(c_k)}=\sum_{k=1}^{n}n(b_k-b_{k-1})$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k-1})$$

$$=n\{(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})\}$$

$$=n(b_n-b_1)$$

$$=n(1-0)$$

$$=n$$

$$\therefore \frac{1}{f'(c_1)}+\cdots+\frac{1}{f'(c_n)}=n \quad (0\le c_1<\cdots<c_n\le 1)$$

한양대학교

답안지 (자연계)

※ 예 : 1996년2월1일→960201

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. (2)의 조건을 만족시키는 일치변환 중에는 원점O를 중심으로 회전하는 회전변환이 있다. 조건 (1)을 만족하려면,

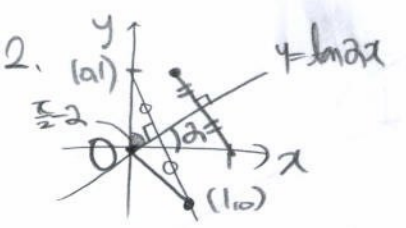
$$\begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ 가능한 일치변환①

$$\begin{cases} 2\cos\theta - \sin\theta = 1 \\ 2\sin\theta + \cos\theta = 2 \end{cases} \quad \therefore \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \tfrac{4}{5} \\ \sin\theta &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

또는 조건(1)과 (2)를 동시에 만족하는 일치변환중 직선 $y=x$에 대한 대칭변환도 가능하다.

② $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

∴ 점(3,2)는 ①,② 에 의해 $\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ or (2,3)으로 옮겨진다.

2. 

(1,0)은 h_α에 의해 2α 회전하고
(0,1)은 h_α에 의해 $2\alpha-\pi$ 회전한다.

$$\therefore h_\alpha = \begin{pmatrix} \cos2\alpha & \sin2\alpha \\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha \end{pmatrix}$$

h_β, h_γ도 h_α와 마찬가지다.

$$h_\alpha \circ h_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta) & , -\sin(2\alpha-2\beta) \\ \sin(2\alpha-2\beta) & , \cos(2\alpha-2\beta) \end{pmatrix}$$ ⇒ 원점 O를 중심으로 $2\alpha-2\beta$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

$$h_\alpha \cdot h_\beta \cdot h_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta+2\gamma) & , \sin(2\alpha-2\beta+2\gamma) \\ \sin(2\alpha-2\beta+2\gamma) & , -\cos(2\alpha-2\beta+2\gamma) \end{pmatrix}$$

⇒ $y=\tan(\alpha-\beta+\gamma)x$ 에 대한 대칭변환이다.

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5$, $a_2=9$. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1$을 만족한다.

$y=\tan\frac{a_n\pi}{12}x$ 에 대한 대칭변환이 f_n일때, 합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots f_{2014}$는 위의 2번에서 구했듯이 대칭변환은 짝수개 합성시 회전변환이 되고 홀수개 합성시 대칭변환이 된다.

$$f_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{a_1\pi}{6}, & \sin\frac{a_1\pi}{6} \\ \sin\frac{a_1\pi}{6}, & -\cos\frac{a_1\pi}{6} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{a_2\pi}{6} & +\sin\frac{a_2\pi}{6} \\ \sin\frac{a_2\pi}{6} & -\cos\frac{a_2\pi}{6} \end{pmatrix} \cdots$$

$\tan\alpha$ 대칭변환 ∘ $\tan\beta$ 대칭변환 = $2(\alpha-\beta)$ 회전변환
$2(\alpha-\beta)$ 회전변환 ∘ $\tan\gamma$ 대칭변환 = $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$ 대칭변환.

$$\underbrace{(f_1 \circ f_2 \circ f_3)}_{\frac{1}{6}(a_1-a_2+a_3)} \circ \underbrace{(f_4 \cdot f_5 \cdot f_6)}_{\frac{1}{6}(a_4-a_5+a_6)} = \frac{1}{6}(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5+a_6) \text{ 회전}$$

n의 주기가 6인
= 수열의 점화식에 의해 $\frac{1}{6}(+1-1) = 0°$ 회전 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

즉, $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014} = f_{2011} \circ f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}$

$$= \frac{1}{6}\left((a_{2011}-a_{2012}+a_{2013})-a_{2014}\right) = \frac{1}{6}(1-a_{2014}) \text{ 회전}$$

∴ 합성변환은 $\frac{2\pi}{3}$ 회전 변환이다.

a_n은 $a_1=5$, $a_2=9$, $a_4=-3$. $a_5=-7$. $a_6=-3$. $a_7=5\cdots$
주기 6인 수열로 $a_{2014}=-7$이다. $2(1+7)=16$.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

문제 2-1.

함수 $f(x)$는 미분가능하므로 $y\neq 0$이라 하면 $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)+6xy}{y}$이고,

양변에 $\lim_{y\to 0}$을 씌우자. $f(0)=0$이므로

$f'(x) = f'(0)+6x$ 이다. 양변을 x에 대해 부정적분하면

$f(x) = 3x^2 + f'(0)x + C$ (단, C는 상수) 이고, $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이므로

$C=0$, $f'(0) = -2$이다.

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x$ 이다.

문제 2-2.

$f(x)$는 $[0,1]$에서 연속이고 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이므로

$f(r) = \frac{1}{2}$ 인 r이 $(0,1)$에 존재한다.

또한 $f(x)$는 $[0,1]$에서 연속이며 미분가능하므로

$[0,r]$, $[r,1]$에서도 연속이며 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리에 의해

$\frac{\frac{1}{2}}{r} = f'(c_1)$, $\frac{\frac{1}{2}}{1-r} = f'(c_2)$인 c_1, c_2가

각각 구간 $(0, r)$, $(r,1)$에 존재한다. (단, $0<r<1$이다)

이때 $\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2r + 2(1-r) = 2$ 이다.

따라서 $\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$이고 $0\le c_1 < c_2 \le 1$인

c_1, c_2가 존재한다.

문제 2-3. $f(x)$는 $[0,1]$에서 미분가능하며 연속이다.

$f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 중간값의 정리에 의해

$f(x) = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$을 만족하는 x가 구간 $(0,1)$에 존재한다.

그 x값을 각각 $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}$이라 하자. (단, $d_1<d_2<\cdots<d_{n-1}$)

$f(x)$는 구간 $[0,d_1]$, $[d_1,d_2]$, $\cdots$, $[d_{n-1},1]$에서 연속이며

열린 구간에서 미분 가능하다.

따라서 평균값의 정리를 순차적으로 사용하면

$\frac{\frac{1}{n}}{d_1-0} = f'(c_1)$, $\frac{\frac{1}{n}}{d_2-d_1} = f'(c_2)$, $\cdots$, $\frac{\frac{1}{n}}{1-d_{n-1}} = f'(c_n)$인 c_k들이

각각 구간 $(0,d_1)$, (d_1,d_2), $\cdots$, $(d_{n-1}, 1)$에 존재한다.

(단, k는 $1\le k\le n$인 자연수)

따라서 이 식들을 역수로 만들면

$n(d_1-0) = \frac{1}{f'(c_1)}$, $n(d_2-d_1) = \frac{1}{f'(c_2)}$, $\cdots$, $n(1-d_n) = \frac{1}{f'(c_n)}$ 이고,

이를 모두 더하면

$n = \frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(c_n)}$ 이다.

따라서 임의의 자연수 n에 대해

$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(c_n)} = n$이고

$0\le c_1 < \cdots < c_n \le 1$인 $c_1 \cdots c_n$이 존재한다.

(c_1의 구간은 $(0,d_1)$, c_2는 (d_1,d_2), $\cdots$, c_n은 $(d_{n-1},1)$에

존재하므로 $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_n$ 이다)

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

※예 : 1996년2월1일→960201

한양대학교

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

답안지 (자연계)

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. 일차변환에 의해 점 (2,1)이 점 (1,2)로 옮겨지고, 원점과 점(2,1)과의 거리와 원점과 옮겨진점(1,2)와의 거리가 같은것으로 보아 $y=x$에 대한 대칭변환 또는 회전변환을 나타내는 일차변환을 통해 옮겨진 점인것을 알 수 있다

점 (3,2)가 $y=x$에 대해 대칭이동 시키면

$y=x$에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이고,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 즉 점(2,3)이 된다

두번째로 점 (2,1)이 점 (1,2)로 옮겨지는 회전변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$로부터

$2\cos\alpha - \sin\alpha = 1$ …① $2\sin\alpha + \cos\alpha = 2$ …② 의 식이 나온다

①, ②의 식을 연립하면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이다

따라서 회전변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$이다

점 (3,2)를 위의 회전변환을 나타내는 행렬을 통해 옮겨진점은

$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix}$ 즉 점 $(\frac{6}{5}, \frac{17}{5})$이 된다.

따라서 점 (3,2)가 옮겨질 수 있는 점은 (2,3)과 $(\frac{6}{5}, \frac{17}{5})$이다

2. 기울기가 $\tan\alpha$인 직선에 대한 대칭변환은 x축에 대한 대칭변환과 원점을 중심으로 각 2α만큼 회전변환의 합성변환이다

따라서 $h_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$

마찬가지로 $h_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$

$h_\gamma = \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$

합성변환 $h_\alpha \cdot h_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\alpha\sin 2\beta & \cos 2\alpha\sin 2\beta - \sin 2\alpha\cos 2\beta \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta - \cos 2\alpha\sin 2\beta & \sin 2\alpha\sin 2\beta + \cos 2\alpha\cos 2\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 2\beta) & -\sin(2\alpha - 2\beta) \\ \sin(2\alpha - 2\beta) & \cos(2\alpha - 2\beta) \end{pmatrix}$

즉 $h_\alpha \cdot h_\beta$는 원점을 중심으로 각 $(2\alpha - 2\beta)$만큼 회전이동시키는 회전변환 이다

합성변환 $h_\alpha \cdot h_\beta \cdot h_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta) & -\sin(2\alpha-2\beta) \\ \sin(2\alpha-2\beta) & \cos(2\alpha-2\beta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta)\cos 2\gamma - \sin(2\alpha-2\beta)\sin 2\gamma & \cos(2\alpha-2\beta)\sin 2\gamma + \sin(2\alpha-2\beta)\cos 2\gamma \\ \sin(2\alpha-2\beta)\cos 2\gamma + \cos(2\alpha-2\beta)\sin 2\gamma & \sin(2\alpha-2\beta)\sin 2\gamma - \cos(2\alpha-2\beta)\cos 2\gamma \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha-2\beta+2\gamma) & \sin(2\alpha-2\beta+2\gamma) \\ \sin(2\alpha-2\beta+2\gamma) & -\cos(2\alpha-2\beta+2\gamma) \end{pmatrix}$

즉 $h_\alpha \cdot h_\beta \cdot h_\gamma$는 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha - \beta + \gamma)$인 직선에 대한 대칭변환이다

3. $a_1=5$, $a_2=9$ $a_3=5$ $a_4=-3$ $a_5=-7$ $a_6=-3$
$a_7=5$. $a_8=9$ $a_9=5$ $a_{10}=-3$ $a_{11}=-7$. $a_{12}=-3$ 으로 부터

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+6}=a_n$의 성질을 지닌다

합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014}$는 문제2를 통해 짝수번 대칭변환을 시키면 회전변환이 됨을 알 수 있고,

$f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6 \circ f_7 \circ f_8 \circ f_9 \cdots \circ f_{2014}$

$= (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6)^{335} \circ f_{2011} \circ f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}$

$= (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6)^{335} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$

$f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$는 $y=\tan\frac{5}{12}\pi$에 대칭이동, $y=\tan\frac{9}{12}\pi$에 대칭이동, $y=\tan\frac{5}{12}\pi$에 대칭이동, $y=\tan\frac{-3}{12}\pi$에 대칭이동, $y=\tan\frac{-7}{12}\pi$에 대칭이동, $y=\tan\frac{-3}{12}\pi$에 대칭이동을 합성하면 결국 자기자신을 나타내는 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 되고, 결국 $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$를 구하면 되고 이는 원점을 중심으로 각 $\frac{6}{12}\pi$만큼 회전이동 시킨 회전변환이다.

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(h) + 6xh - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + 6x$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} + 6x \quad (\because f(0) = 0)$

$= 6x + f'(0)$

$f(x) = \int 6x + f'(0)\, dx$

$= 3x^2 + f'(0)x + C$

$f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = 3x^2 + f'(0)x$

$f(1) = 1$ 이므로 $1 = 3 + f'(0)$

$f'(0) = -2$

$\therefore f(x) = 3x^2 - 2x$

2. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 이고 $f(x)$가 미분가능, 연속이므로
중간값 정리에 의하여 $f(c) = \frac{1}{2}$인 c가 존재 $(0 < c < 1)$

$f(0) = 0$, $f(c) = \frac{1}{2}$ 이고 $f(x)$는 미분가능이므로
평균값 정리에 의하여 $\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(c_1) \quad (0 < c_1 < \frac{1}{2})$

$f(c) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$ 이고 $f(x)$는 미분가능이므로
평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(c_2) \quad (\frac{1}{2} < c_2 < 1)$

$f'(c_1) = \frac{\frac{1}{2}}{c}$, $f'(c_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - c}$ 이므로

$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2c + 2(1 - c) = 2$를 만족

$\therefore 0 \le c_1 < c_2 \le 1$인 c_1, c_2가 존재한다.

3. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(x)$가 미분 가능이므로
중간값 정리를 쓰면 $f(d) = \frac{1}{2}$인 c가 존재 $(0 < c < 1)$
$f(0) = 0$, $f(c) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$ 이므로
중간값정리를 각각 쓰면 $f(c_1) = \frac{1}{3}$, $f(c_2) = \frac{2}{3}$인
c_1, c_2가 각각 존재
$(0 < c_1, c_2 < 1)$

⋮

$f(0) = 0$, $f(c_1) = \frac{1}{n}$, $f(c_2) = \frac{2}{n}$, ----, $f(c_{n-1}) = \frac{n-1}{n}$인
$c_1, c_2, ---, c_{n-1}$이 존재
$(0 < c_1, c_2, ---, c_{n-1} < 1)$

각각의 사이에 평균값 정리를 사용하여
$\frac{f(c_1) - f(0)}{c_1 - 0} = f'(d_1)$, $\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = f'(d_2)$ --- $\frac{f(1) - f(c_{n-1})}{1 - c_{n-1}} = f'(d_n)$
$(0 < d_1 < c_1)$ $(c_1 < d_2 < c_2)$ $(c_{n-1} < d_n < 1)$

$\frac{1}{f'(d_1)} + \frac{1}{f'(d_2)} + --- + \frac{1}{f'(d_n)}$

$= \frac{c_1}{f(c_1) - f(0)} + \frac{c_2 - c_1}{f(c_2) - f(c_1)} + --- + \frac{1 - c_{n-1}}{f(1) - f(c_{n-1})}$

$= \frac{c_1}{\frac{1}{n} - 0} + \frac{c_2 - c_1}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}} + --- + \frac{1 - c_{n-1}}{1 - \frac{n-1}{n}}$

$= n(c_1 + (c_2 - c_1) + --- + (c_{n-1} - c_{n-2}) + (1 - c_{n-1}))$
$= n$가

성립하므로 $0 \le d_1 < d_2 < --- < d_n \le 1$인
$d_1, d_2, ---, d_n$이 존재한다.

$\Rightarrow \therefore \frac{1}{f'(c_1)} + --- + \frac{1}{f'(c_n)} = n$이고
$0 \le c_1 < --- < c_n \le 1$인 $c_1, ---, c_n$이 존재한다.