# 한양대학교 2015학년도 논술전형

# 자 연 계 열 (2)

| 성명 | | 지원 학부·학과 | | 수험 번호 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

## 유의 사항

1. 75분 안에 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

**※ 감독의 지시가 있을 때까지 다음 장으로 넘기지 마시오.**

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 좌표평면 위의 일차변환 $h:(x,y)\rightarrow(x',y')$를 나타내는 식이

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \quad (a,\ b,\ c,\ d\text{는 상수})$$

로 주어졌을 때, 일차변환 $h$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이다.

<나> 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 원점 O를 중심으로 각 $\alpha$만큼 회전하여 점 $\mathrm{P}'(x',y')$로 옮기는 변환을 각 $\alpha$만큼 회전하는 회전변환이라 한다. 회전변환은 일차변환이고, 이를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$이다. 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 원점을 지나는 어떤 직선에 대하여 대칭인 점 $\mathrm{P}'(x',y')$로 옮기는 대칭변환도 일차변환이다. 특히 $x$축과 $y$축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬은 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이다.

1. 다음의 조건 (1)과 (2)를 모두 만족시키는 일차변환에 의해 점 $(3,2)$가 옮겨질 수 있는 점을 모두 구하시오.
   (1) 일차변환에 의하여 점 $(2,1)$이 점 $(1,2)$로 옮겨진다.
   (2) 일차변환에 의하여 좌표평면 위의 임의의 점 A가 점 B로 옮겨질 때, 항상 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$가 성립한다.

2. 원점을 지나고 기울기가 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$인 세 직선에 대한 대칭변환을 각각 $h_\alpha$, $h_\beta$, $h_\gamma$라 할 때, 합성변환 $h_\alpha \circ h_\beta$와 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$를 나타내는 행렬을 각각 구하고 어떤 일차변환인지 설명하시오.

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5$, $a_2=9$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1$을 만족시키는 수열이다. 원점을 지나고 기울기가 $\tan\frac{a_n\pi}{12}$인 직선에 대한 대칭변환을 $f_n$이라 할 때, 합성변환 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_{2014}$는 어떤 일차변환인지 설명하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 중간값의 정리는 다음과 같다.

함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$일 때, $g(a)$와 $g(b)$ 사이의 임의의 실수 $r$에 대하여 $g(c) = r$인 실수 $c$가 열린 구간 $(a, b)$에서 적어도 하나 존재한다.

<나> 평균값의 정리는 다음과 같다.

함수 $h(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a, b)$에서 미분가능하면,

$\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c)$인 실수 $c$가 $a$와 $b$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

<다> 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

① 함수 $f(x)$는 미분가능하고, 도함수 $f'(x)$가 연속이다.

② $f(0) = 0, f(1) = 1$이다.

1. 제시문 <다>의 조건과 임의의 실수 $x, y$에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하시오.

2. 함수 $f(x)$가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면, $\dfrac{1}{f'(c_1)} + \dfrac{1}{f'(c_2)} = 2$이고 $0 \leq c_1 < c_2 \leq 1$인 $c_1$, $c_2$가 존재함을 보이시오.

3. 함수 $f(x)$가 제시문 <다>의 조건을 만족시키면, 임의의 자연수 $n$에 대하여 $\dfrac{1}{f'(c_1)} + \cdots + \dfrac{1}{f'(c_n)} = n$이고 $0 \leq c_1 < \cdots < c_n \leq 1$인 $c_1, \cdots, c_n$이 존재함을 보이시오.