한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계 (1) **논 술 예 시 답 안** 1번

1. $A_n = \pi\int_0^{2^n a_n}(2^n a_n - y)dy = \pi(2^n a_n y - \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{2^n a_n} = \frac{\pi}{2}4^n a_n^2$이다.

$A_n = 2\pi$이므로 $a_n = \frac{2}{2^n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$

2. $B_n = \int_0^1 (1 - \frac{1}{2^n b_n} ln(x+1))dx = x - \frac{1}{2^n b_n}((x+1)\ln(x+1) - (x+1))\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2^n b_n}(2\ln 2 - 1)$이다.

$B_n = 2\pi$이므로 $b_n = \frac{2\ln 2 - 1}{2^n(1-2\pi)}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2\ln 2 - 1}{1 - 2\pi} = \frac{1 - 2\ln 2}{2\pi - 1} = -\frac{2\ln 2 - 1}{2\pi - 1}$

3. $C_n = \pi\int_0^1 c_n^2 4^{-nx}dx = \frac{\pi c_n^2}{\ln 4^{-n}}4^{-nx}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\ln 2}(1 - \frac{1}{4^n})\frac{c_n^2}{n}$이다.

$C_n = 2\pi$이므로 $c_n = \sqrt{4\ln 2 \cdot n} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}}$이고 $\frac{c_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{4\ln 2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}}$이다.

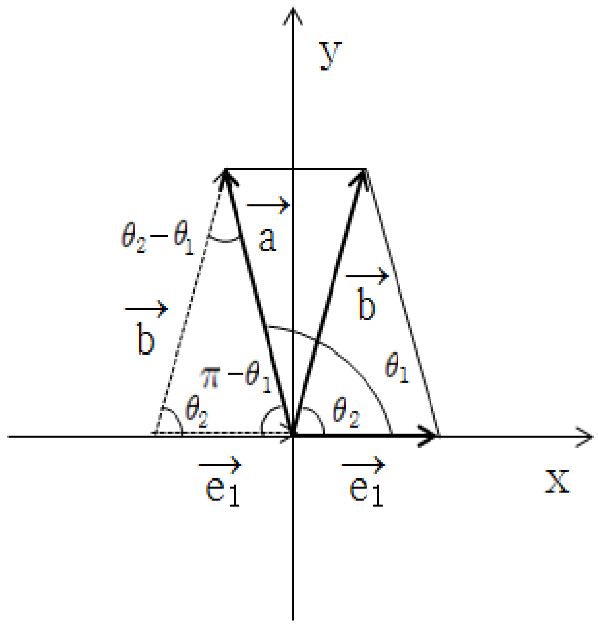
따라서 $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{4\ln 2 \cdot n} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}} = \infty$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{4\ln 2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}} = \sqrt{4\ln 2} = 2\sqrt{\ln 2} \neq 0$이다.

"무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$이다"는 사실에 의하여

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$와 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}}$는 모두 발산한다.

자 연 계 (1)	한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논 술 예 시 답 안	2번



1. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각은 $\theta=\theta_1-\theta_2$이다. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e_1}$이 만드는 삼각형에서 코사인 제2법칙에 의하여

$$|\vec{e_1}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이므로, $1=2+1-2\vec{a}\cdot\vec{b}$이다.

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ 이다.

2. 삼각형의 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sin\theta_2}{|\vec{a}|}=\dfrac{\sin(\pi-\theta_1)}{|\vec{b}|}=\dfrac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{1}$이 성립한다.

따라서 $|\vec{a}|=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$이다.

벡터 벡터 $\vec{a}$가 x축 아래에 놓여있는 경우를 고려하면,

벡터 $\vec{a}$의 x성분은 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cos\theta_1$이고, 벡터 $\vec{a}$의 y성분은 $\pm\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\sin\theta_1$이다.

3. $f(\theta)=\sin\theta$, $(0<\theta<\pi)$일 때, $f''(\theta)<0$이다. 따라서 구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(\theta)$는 위로 볼록인 함수이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}
\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2) &\le 2\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\sin(\theta_1-\theta_2)\\
&=3\left[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]\\
&\le 3\sin\left(\frac{2}{3}\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{1}{3}(\theta_1-\theta_2)\right)\\
&=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

한양대학교 2015학년도 신입학전형 논술고사		
자 연 계 (1)	**출제 의도 및 평가 지침**	1번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과를 정상화하기 위하여 철저하게 교과서를 중심으로 EBS 수능교재와 연계하여 출제하였으며, 정상적인 수학교과를 이수한 수험생이면 충분하게 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 정적분과 수열에 대하여 잘 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하고, 논리적인 사고력을 판단할 수 있도록 하였다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	A_n 구하기	20
		$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 구하기	10
2	30	B_n 구하기	20
		$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 구하기	10
3	40	C_n 구하기	20
		$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 발산함 밝히기	10
		$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n}}$ 발산함 밝히기	10

3. 출제 근거

제시문:

(가) 정적분의 활용 – 적분과 통계(EBS 수능완성), p.31

(나) 로그함수의 적분 - 적분과 통계(EBS 수능완성), p.18,

정적분의 활용 – 적분과 통계(EBS 수능완성), pp.25–31

(다) 지수함수의 적분 - 수학 II(EBS 수능완성), p.70,

정적분의 활용 – 적분과 통계(EBS 수능완성), pp.25–31

문제:

(1) 무한급수 - 수학 I B형 (EBS 수능특강), p. 138

(2) 무한급수 - 수학 I B형 (EBS 수능특강), p. 138

(3) 무한급수 - 수학 I B형 (EBS 수능특강), pp.136, 138

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계 (1)	**출제 의도 및 평가 지침**	2번

1. 출제 의도 및 문제 해설

고등학교 수학교과 교육의 정상화를 위하여 고등학교 교과과정의 범위에서 EBS 수능특강(기하와 벡터) 교재에 있는 문제를 약간 변형하여 출제하였기 때문에, 수능을 대비해서 EBS 수능특강과 EBS 수능완성 교재를 충실히 공부를 한 수험생이면 풀 수 있는 문제를 출제하였다. 벡터의 정의와 성질을 잘 이해하고 있으며, 삼각함수와의 관계를 잘 이해하여 벡터와 삼각함수를 종합적으로 사고할 수 있는지를 판단할 수 있도록 출제한 융합형의 문제이다. 또한 2차 도함수를 이용하여 함수의 볼록성을 고찰하고 볼록에 대한 의미를 정확히 이해하고 있는지를 판단하는 종합적인 문제이기도 하다.

2. 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	벡터의 내적의 정의를 이해하고 있는가? 삼각형에서 코사인 제2법칙을 알고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?	30
2	30	두 벡터가 생성하는 삼각형에서 사인법칙을 적용할 수 있는가?	20
		벡터의 크기와 x축과 이루는 각을 알 때, 벡터를 구할 수 있는가?	10
3	40	2차 도함수의 부호를 구하고, 함수의 볼록성을 알아낼 수 있는가?	10
		함수의 볼록성을 이용하여 주어진 부등식을 도출해낼 수 있는가?	30

3. 출제 근거

EBS 수능특강 (2014)
- 기하와 벡터: p. 115의 문제 4번

EBS 수능완성 (2014)
- 기하와 벡터: p. 75의 문제 1번

EBS 수능특강 (2014)
- 수학 II: p.112의 곡선의 오목 · 볼록과 변곡점의 내용

한양대학교

답안지 (자연계)

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

※예 : 1996년2월1일→960201

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
   답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $y=-x^2+2^n a_n$

$A_n=\pi\int_0^{2^n a_n} x^2\,dy$

$=\pi\int_0^{2^n a_n}(2^n a_n-y)\,dy$

$=\pi\left[2^n a_n y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2^n a_n}$

$=\left\{(2^n a_n)^2-\frac{1}{2}(2^n a_n)^2\right\}\pi$

$=\cancel{\pi}\left\{\frac{1}{2}(2^n a_n)^2\right\}=2\cancel{\pi}$

$\therefore (2^n a_n)^2=4$

$4^n(a_n)^2=4$

$a_n^2=\frac{4}{4^n}=\frac{1}{4^{n-1}}$

$a_n>0$ 이므로 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 이다. $\{a_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴 한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 2로 수렴한다.

2. $B_n=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2^n b_n}(\ln(x+1))\right)dx$

$=[x]_0^1-\frac{1}{2^n b_n}\int_0^1\ln(x+1)\,dx$ ← $\left(\begin{matrix}x+1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right)$

$=1-\frac{1}{2^n b_n}\int_1^2\ln t\,dt$

$=1-\frac{1}{2^n b_n}[t\ln t-t]_1^2$

$=1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-2+1)=1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-1)=2\pi$

$\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-1)=1-2\pi$

$2^n b_n=\frac{2\ln2-1}{1-2\pi}$

$\therefore b_n=\frac{2\ln2-1}{2^n(1-2\pi)}$; $\{b_n\}$의 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴 한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln2-1}{2^n(1-2\pi)}=\frac{\frac{2\ln2-1}{2(1-2\pi)}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2\ln2-1}{1-2\pi}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 $\frac{2\ln2-1}{1-2\pi}$ 로 수렴한다.

3. $y=C_n 2^{-nx}$는 항상 양의 함숫값을 갖는 함수이다. ($\because C_n>0,\ 2^{-nx}>0$)

$C_n=\pi\int_0^1 y^2\,dx$

$=\pi\int_0^1 C_n^2 2^{-2nx}\,dx$

$=C_n^2\pi\int_0^1 2^{-2nx}\,dx$ ← $\left(\begin{matrix}-2nx=t\\ -2n\,dx=dt\\ dx=-\frac{1}{2n}dt\end{matrix}\right)$

$=\frac{C_n^2\pi}{2n}\int_{-2n}^0 2^t\,dt$

$=\frac{C_n^2\pi}{2n}\left[\frac{2^t}{\ln2}\right]_{-2n}^0$

$=\frac{C_n^2\cancel{\pi}}{2n\ln2}(1-2^{-2n})=2\cancel{\pi}$

$C_n^2=\frac{2\times2n\ln2}{1-2^{-2n}}=\frac{4n\ln2}{1-2^{-2n}}$

$C_n>0$ 이므로 $C_n=2\sqrt{\frac{n\ln2}{1-(\frac{1}{4})^n}}$ 이다.

$\frac{C_n}{\sqrt{n}}=2\sqrt{\frac{\ln2}{1-(\frac{1}{4})^n}}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}C_n=0$ 이 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 이 수렴하기 위한 충분조건 인데, $\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{n\ln2}{1-(\frac{1}{4})^n}}=\infty$ 로, 양의 무한대로 발산하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$은 수렴하지 않는다.

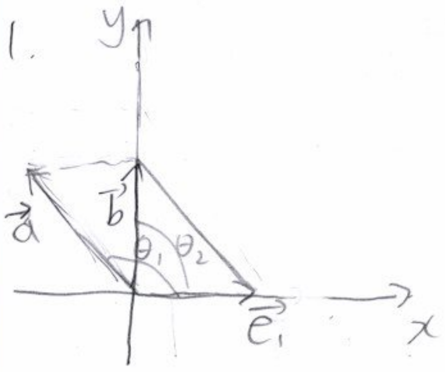
$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}$ 도 위와 마찬가지의 이유로 계산해보면,

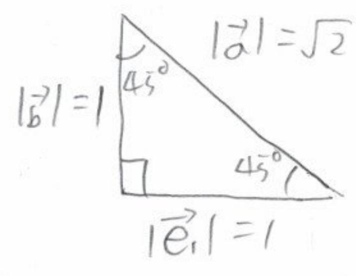
$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{\ln2}{1-(\frac{1}{4})^n}}=2\sqrt{\ln2}\neq0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}$ 역시 수렴하지 않는다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

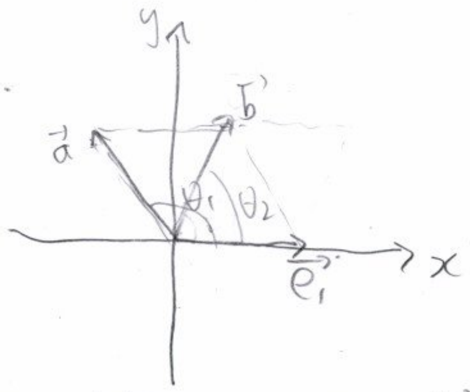
1.





$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 45° = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

2.



let $\vec{a}=(a_x, a_y)$
$\vec{b}=(b_x, b_y)$

$a_x=|\vec{a}|\cos\theta_1$, $a_y=|\vec{a}|\sin\theta_1$

$b_x=|\vec{b}|\cos\theta_2$, $b_y=|\vec{b}|\sin\theta_2$

$a_x+1=b_x$ $\quad\therefore |\vec{a}|\cos\theta_1+1=|\vec{b}|\cos\theta_2$

$a_y=b_y$ $\quad\therefore |\vec{a}|\sin\theta_1=|\vec{b}|\sin\theta_2$

$\therefore |\vec{b}|=|\vec{a}|\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ $\quad\therefore |\vec{a}|\cos\theta_1+1=|\vec{a}|\sin\theta_1\cot\theta_2$

$\therefore |\vec{a}|=\frac{1}{\sin\theta_1\cot\theta_2-\cos\theta_1}$

$\therefore a_x=\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1\cot\theta_2-\cos\theta_1}$

$a_y=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1\cot\theta_2-\cos\theta_1}$

3. let $f(x)=\sin\theta$ $\quad(0<\theta<\pi)$

$f'(x)=\cos\theta$

$f''(x)=-\sin\theta$

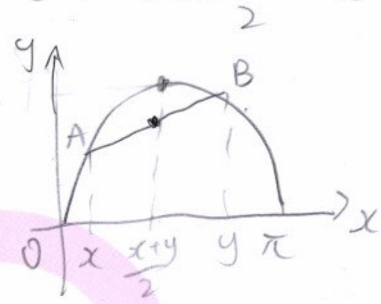
$\therefore f(x)$는 구간 $(0,\pi)$에서 위로 볼록

$\therefore \frac{\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)}{3}\le\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2+\theta_1-\theta_2}{3}\right)$

$\therefore \sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)\le 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

※ $\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\le\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ 증명

먼저 $\frac{\sin x+\sin y}{2}\le\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$를 증명하면



위로 볼록의 정의에 의해
선분 AB는 $\sin x$ 아래에 있다.

$\therefore \frac{\sin x+\sin y}{2}\le\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{3}\le\frac{2}{3}\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin z$

$\le\sin\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{x+y}{2}+\frac{1}{3}z\right)$

$=\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

$\frac{2}{3}\sin\alpha+\frac{1}{3}\sin\beta\le\sin\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta\right)$도
위로 볼록의 정의를 이용해 증명 가능

※예 : 1996년2월1일→960201

한양대학교

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

답안지 (자연계)

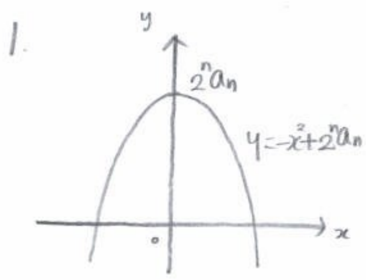
※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다. 답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.



$$A_n = \pi\int_0^{2^n a_n} x^2\,dy$$
$$= \pi\int_0^{2^n a_n} -y+2^n a_n\,dy$$
$$= \pi\left\{\left[-\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{2^n a_n}+(2^n a_n)^2\right\}$$
$$= \pi\cdot\left\{-\tfrac{1}{2}\cdot(2^n a_n)^2+(2^n a_n)^2\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^n a_n)^2\pi \text{ 이다.}$$

모든 자연수 n에 대하여 $A_n = 2\pi$ 이므로

$2\pi = \frac{1}{2}(2^n a_n)^2\pi$ 에서 $a_n = 2^{1-n} = \frac{2}{2^n}$ 를 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 2 에서 수렴한다.

2.

$$\int_0^1 \left(1-\frac{1}{2^n b_n}\ln(x+1)\right)dx$$
$$= [x]_0^1 - \frac{1}{2^n b_n}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$$
$$= 1-\frac{1}{2^n b_n}\cdot\left[(x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right]_0^1$$
$$= 1-\frac{\ln 4-1}{2^n b_n} = B_n \text{ 이다.}$$

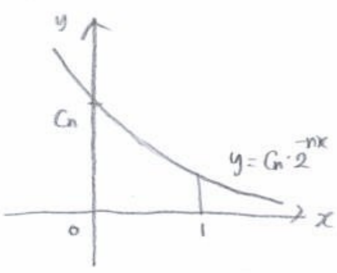
모든 자연수 n에 대하여 $B_n = 2\pi$ 이므로

$2\pi = 1-\frac{\ln 4-1}{2^n b_n}$ 에서 $b_n = \frac{\ln 4-1}{1-2\pi}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 4-1}{1-2\pi} = \frac{\ln 4-1}{1-2\pi}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\ln 4-1}{1-2\pi}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 $\frac{\ln 4-1}{1-2\pi}$ 에서 수렴한다.

3.



$$C_n = \int_0^1 y^2\,dx\cdot\pi$$
$$= \int_0^1 C_n^2\cdot 4^{-nx}\,dx\cdot\pi$$
$$= C_n^2\cdot\frac{1-4^{-n}}{n\ln 4}\pi \text{ 이다.}$$

모든 자연수 n에 대하여 $C_n = 2\pi$ 이므로

$2\pi = C_n^2\cdot\frac{1-4^{-n}}{n\ln 4}\pi$ 에서 $C_n = \sqrt{\frac{2n\ln 4}{1-4^{-n}}}$ $(\because c>0)$ 를 알 수 있다.

수열 $\{d_n\}$이 있고 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 이 수렴하려면 d_n은 $n\to\infty$일 때 0 에 가까워져야 한다.

$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n\ln 4}{1-4^{-n}}}$ 에서 C_n의 분모는 1에 가까워지지만 분자는 무한히 커진다. 따라서 C_n은 0에 수렴하지 않으므로

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 은 수렴하지 않고 발산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2\ln 4}{1-4^{-n}}} = \sqrt{\ln 16}$ 이므로 0에 수렴하지 않는다

따라서 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}$ 는 수렴하지 않고 발산한다.

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1) 제시문 <라> 에 주어진 식을 양변 제곱 해보자.

$|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{e_1}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{e_1}$

$|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{e_1}|=1$ 이므로

$\vec{a}\cdot\vec{e_1} = -1$

그런데 제시문 <가>에 따라서

$\vec{a}\cdot\vec{e_1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{e_1}|\cdot\cos\theta_1 = -1$

$\therefore \cos\theta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta_1<\pi$ 이므로 $\theta_1 = \frac{3}{4}\pi$

점 $E_1(1,0)$과 $\frac{3}{4}\pi$ 만큼의 각도로 벌어져있고 크기가 $\sqrt{2}$인 벡터 $\vec{a} = (-1, \pm1)$

그리고 $\vec{b} = \vec{a}+\vec{e_1} = (0, \pm1)$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0+1 = 1$

2) 제시문에 주어진 조건에 따라 (벡터 $\vec{a}$의 종점을 A, $\vec{b}$의 종점을 B라 하자.) A, B의 좌표를 세워보면

$A = (k_1\cos\theta_1, k_1\sin\theta_1)$

$B = (k_2\cos\theta_2, k_2\sin\theta_2)$

이때 $\vec{b} = \vec{a}+\vec{e_1}$ 이므로

$$\begin{cases} k_1\cos\theta_1 + 1 = k_2\cos\theta_2 \\ k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2 \end{cases}$$ 이다.

연립방정식을 풀어보면 $k_1 = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$

$k_2 = k_1 \cdot \frac{1}{\sin\theta_2}$

이를 A, B의 좌표에 대입하면

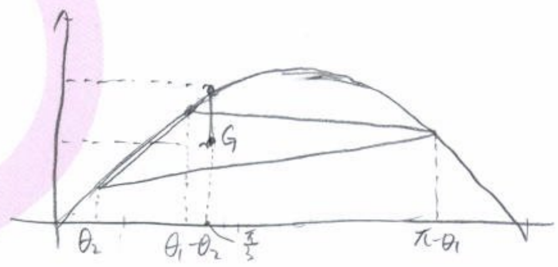
$A\left(\frac{\sin\theta_2\cdot\cos\theta_1}{\sin(\theta_1-\theta_2)}, \frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\right)$

$B\left(\frac{\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}, \frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\right)$

3) $\sin(\pi-\theta_1)$, $\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1-\theta_2)$ 는 각각

$y=\sin x$ 에 $(\pi-\theta_1)$, θ_2, $(\theta_1-\theta_2)$ 를 x좌표로 갖는 점들의 y좌표값이다. 이를 그림으로 나타내보자.

$(\pi-\theta_1), \theta_2, (\theta_1-\theta_2) \in [0, \pi]$)



세점을 연결해 삼각형을 만들었을 때, 삼각형의 무게 중심G의 좌표는 $G\left(\frac{(\pi-\theta_1)+\theta_2+(\theta_1-\theta_2)}{3}, \frac{\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)}{3}\right)$

무게 중심의 x좌표를 정리하면 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

그런데 $y=\sin x$ 그래프의 이계도함수는 $[0,\pi]$ 에서 0보다 작거나 같으므로 항상음수 이므로 $y=\sin x$는 범위에서 위로 볼록이다.

이계도함수의 정의에 의해 구간 내에서 $y=\sin x$ 위의 두점 사이 선분은 $y=\sin x$ 밑에 항상 위치함을 알수있으므로 세 점을 이은 삼각형도 $y=\sin x$ 밑에 존재하며 그 무게중심도 밑에 존재한다.

따라서 무게중심의 y좌표 $\leq$ sin(무게중심의 x좌표)

$\therefore \frac{\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2)}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

한양대학교

답안지 (자연계)

지 원 학 과	수 험 번 호	생 년 월 일

※예 : 1996년2월1일→960201

※ 감독관 확인란	성 명

【유의사항】

1. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하십시오.(빨강색이나 파랑색 사용금지)
2. 답안지를 수정할 경우 지우개(연필, 샤프 사용 시)를 사용하거나 두 줄을 긋고(볼펜 사용 시) 그 위에 재 작성하십시오.
3. 답안과 관련 없는 표현이나 표시를 한 답안지는 "0"점 처리 됩니다.
4. 본 고사는 답안지 1장 이내에 답안을 작성하여야 합니다.
   답안지 교체는 가능하지만 기존 답안지 제출은 불가합니다.

문제 1번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

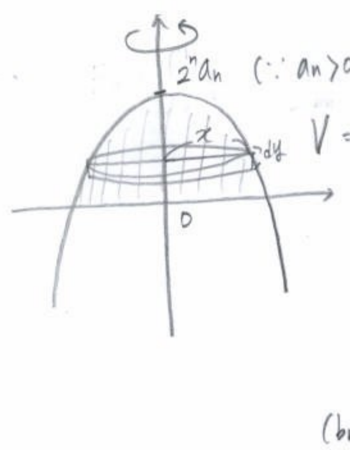
1. A_n은 $y=-x^2+2^n a_n$ 과 x축 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전한 것이므로

$$A_n=\pi\int_0^{2^n a_n} x^2\,dy = \pi\int_0^{2^n a_n} 2^n a_n - y\,dy = \pi\left[2^n a_n y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{2^n a_n}$$

$$=\pi\left[(2^n a_n)^2 - \tfrac{1}{2}(2^n a_n)^2\right] = \pi\tfrac{1}{2}\times(2^n a_n)^2 = 2^{2n-1} a_n^2 \pi$$

$A_n=2\pi$로 일정하다면 $\pi 2^{2n-1} a_n^2=2\pi$ 이므로 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

a_n은 등비수열 임을 알 수 있고 공비가 $-1<\frac{1}{2}<1$ 이므로 수렴 함을 알수있고 수렴값은 2 이다.



$(\because a_n>0,\ 2^n>0)$

$V=\pi\int_0^{2^n a_n} x^2\,dy$

$(b_n\neq 0$, 분모이므로$)$

2. $B_n=\int_0^1 1-\frac{1}{2^n b_n}\ln(x+1)\,dx$ 이므로 계산의 편의를 위해 $x+1=t$로 치환하자. $dx=dt$ 이므로 $B_n=\int_1^2\left(1-\frac{1}{2^n b_n}\ln t\right)dt$ 이다.

$B_n=[t]_1^2-\frac{1}{2^n b_n}\int_1^2 1\times\ln t\,dt$ 부분적분을 활용하여 $\int_1^2 1\times\ln t\,dt$를 구해보면

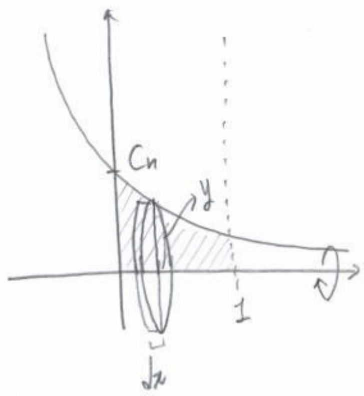
$\int_1^2 1\times\ln t\,dt=[t\ln t]_1^2-\int_1^2 t\times\frac{1}{t}\,dt=[t\ln t-t]_1^2=2\ln2-2-(-1)$
$=2\ln2-1$ 임을 알수있고

$\therefore B_n=2-1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-1)=1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-1)$ 이다.

$B_n=2\pi$로 일정하다면 $1-\frac{1}{2^n b_n}(2\ln2-1)=2\pi$ 이므로

$b_n=\frac{2\ln2-1}{1-2\pi}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다. b_n은 등비수열임을 알수 있고 등비수열의 합은 공비가 $-1<r<1$ 사이 일때 수렴하므로 $-1<\frac{1}{2}<1$ 이므로 수렴함을 알 수 있고 수렴값은 $\frac{2\ln2-1}{1-2\pi}$ 이다.

3. $C_n>0$ n은 자연수 이므로 $y=C_n2^{-nx}$는 아래그림과 같다



$$\therefore C_n=\pi\int_0^1 y^2\,dx=\pi\int_0^1 C_n^2 4^{-nx}\,dx$$

$$=\left[C_n^2 4^{-nx}\times\frac{1}{\ln4}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right]_0^1$$

$$=\left[-C_n^2\frac{4^{-nx}}{\ln4}\times\frac{\pi}{n}\right]_0^1$$

$$=\frac{-C_n^2\pi}{n\ln4}\left[4^{-nx}\right]_0^1$$

$$=\frac{-C_n^2\pi}{n\ln4}\left(4^{-n}-1\right)$$

$$=\frac{C_n^2\pi}{n\ln4}\left(1-4^{-n}\right) \text{ 이다.}$$

이때 $C_n=2\pi$로 일정하다면 $C_n=\sqrt{\frac{2\ln4n}{1-4^{-n}}}$ 인데

$\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}$이 수렴 한다면 $\lim_{n\to\infty}C_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}=0$ 일것이다.

하지만 대우로 $\lim_{n\to\infty}C_n\neq0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}\neq0$ 이라면 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}$은 발산할 것이다.

$\lim_{n\to\infty}C_n=\sqrt{\frac{2n\ln4}{1-4^{-n}}}$ 인데 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}4^{-n}=0$ 이므로

$=\infty\neq0$ 발산함을 알수있다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2\ln4}{1-4^{-n}}}$ 인데 $\lim_{n\to\infty}4^{-n}=0$ 이므로

$=\sqrt{2\ln4}\neq0$ 임을 알수있다. 이를 통해 무한급수는 위의 명제를 통해 발산하며 수렴하지 않음을 알 수 있다.

1

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨

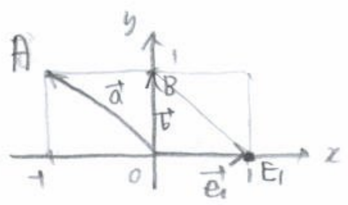
문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1.

$\vec{b} = \vec{a} + \vec{e_1}$ 에서 양 변을 제곱하면

$|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{e_1} + |\vec{e_1}|^2$

$\vec{a}\cdot\vec{e_1} = -1$ 을 알 수 있다.



따라서 $\vec{a}=(-1,1)$, $\vec{b}=(0,1)$ 임을 알 수 있다.

그러므로

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OB}|^2 = 1$ 이다.

2.

$|\vec{a}| = k$, $|\vec{b}| = m$ 이라 하자.

$\vec{a} = (k\cos\theta_1, k\sin\theta_1)$, $\vec{b} = (m\cos\theta_2, m\sin\theta_2)$ 에서

제시문 (라)에 의해

$\vec{b} = \vec{a}+\vec{e_1}$

$(m\cos\theta_2, m\sin\theta_2) = (k\cos\theta_1+1, k\sin\theta_1)$ 이므로

$m = \frac{k\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{k\cos\theta_1+1}{\cos\theta_2}$

$k\sin\theta_1\cos\theta_2 = k\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_2$

$k(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) = \sin\theta_2$

$k = \frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$ 이다.

따라서, $\vec{a} = \left(\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cdot\cos\theta_1, \frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cdot\sin\theta_1\right)$.

벡터 $\vec{a}$의 x 성분은 $\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$,

y 성분은 $\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$ 이다.

3.

$|\vec{a}|=1$ 이라 하자.

$\vec{a} = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $\vec{b} = (|\vec{b}|\cos\theta_2, |\vec{b}|\sin\theta_2)$.

$\vec{b} = \vec{a}+\vec{e_1}$ 이므로

$\vec{b} = (\cos\theta_1+1, \sin\theta_1)$ 이다.

$|\vec{b}|\sin\theta_2 = \sin\theta_1$ 에서 $|\vec{b}| = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$ 임을 알 수 있다.

$|\vec{b}|\cos\theta_2 = \cos\theta_1+1$ 이므로

$\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2} = \cos\theta_1+1$

$\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin\theta_2$

$\sin(\theta_1-\theta_2) = \sin\theta_2$ 에서 $\theta_1 = 2\theta_2$ 임을 알 수 있다.

따라서

$\sin(\pi-\theta_1) + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1-\theta_2)$

$= \sin\theta_1 + 2\sin\theta_2$

$= \sin 2\theta_2 + 2\sin\theta_2$ 이다.

$\sin\theta_2 = a$ 라 하면

$2\sin\theta_2(\sqrt{1-\sin^2\theta_2}+1)$

$= 2a\sqrt{1-a^2} + 2a = f(a)$

$f'(a) = 2\sqrt{1-a^2} + 2a\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} + 2 = 0$

$\sqrt{1-a^2} = 2a^2-1$ 에서 $a^2 = A$라 하면

$A = \frac{3}{4}$ 을 얻을 수 있다.

즉 $\sin^2\theta_2 = \frac{3}{4}$. $\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\sin 2\theta_2 + 2\sin\theta_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서,

$\sin(\pi-\theta_1) + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1-\theta_2) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이 성립한다.