한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		1/2

[문제 2-1]

$f(x) = \frac{\pi}{4}\int_2^{x+2} f(t)\,dt$ 이므로

양변을 미분하면,

$f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 이다.

$$\int_0^2 x f(x+2)\,dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{4}{\pi} f'(x)\,dx \quad \left(\because f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^2 x f'(x)\,dx$$

$u = x,\ v' = f'(x)$ 부분적분법을쓰면

$u' = 1,\ v = f(x)$.

$$= \frac{4}{\pi}\left\{ \left[x f(x)\right]_0^2 - \int_0^2 f(x)\,dx \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{ 2f(2) - \int_0^2 \frac{4}{\pi} f'(x-2)\,dx \right\}$$

$$= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\int_{-2}^0 f'(t)\,dt$$

$$= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\left[f(t)\right]_{-2}^0$$

$$= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\left(f(0) - f(-2)\right)$$

$f(x)$는 원점 대칭이므로 $f(-x) = -f(x)$

$f(0)=0,\ f(-2) = -f(2) = -1$ 이므로

$$= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2} \times 1 = \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}$$

[문제 2-2]

$f(x) = \frac{\pi}{4}\int_2^{x+2} f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}\left\{F(x+2) - F(2)\right\}$

$(\{F(x)\}' = f(x)$ 일때$)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{4}\left(F(x+h+2) - F(x+2)\right)}{h}$$

$= \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 이므로 $f'(x)$는 존재한다.

$f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 이다.

제시문

(나)에서 미분가능한 두함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$에 대해 합성함수 $y=g(h(x))$는 미분가능하고 그 도함수는 $y' = g'(h(x))h'(x)$ 이므로.

$y = \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 에서 $f(x)$는 미분가능하고 $g(x)=x+2$ 도 미분가능하므로

$\frac{\pi}{4} f(x+2)$도 미분가능하다.

$f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 가 미분가능하므로

$f''(x) = \frac{\pi}{4} f'(x+2) = \frac{\pi^2}{16} f(x+4)$ 이다.

따라서 $f''(x)$는 존재한다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 1		2/2

[문제 2-3]

$f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$ 이면, $f(x)$는 연속, 원점대칭이다.

$f(x) = \frac{\pi}{4}\int_{2}^{x+2} f(t)\,dt$ 에서

$\sin\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{4}\int_{2}^{x+2} \sin\frac{\pi}{4}t\,dt$

$= \frac{\pi}{4} \times \frac{4}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{4}t\right]_{2}^{x+2}$

$= -\cos\frac{\pi}{4}(x+2) + \cos\frac{\pi}{4}\times 2$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}x$ //

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 2		1/2

[문제 2-1]

$\int_2^{x+2} f(t)\,dt = I(x)$ 라고 하자

$I'(x) = f(x+2)$ 가 된다.

$f(x) = \frac{\pi}{4}\int_2^{x+2} f(t)\,dt = \frac{\pi}{4} I(x)$ 가 된다.

$\frac{\pi}{4} I'(x) = f'(x)$ 가 된다.

즉, $\frac{4}{\pi} f'(x) = f(x+2)$ 가 된다.

$$\int_0^2 x f(x+2)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^2 x f'(x)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{\left[x f(x)\right]_0^2 - \int_0^2 f(x)\,dx\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(2f(2) - 0 - \int_0^2 f(x)\,dx\right)$$ 가 된다.

$f(x) = \frac{\pi}{4}\int_2^{x+2} f(t)\,dt$ 에서

$f(-2) = \frac{\pi}{4}\int_2^0 f(t)\,dt = -\frac{\pi}{4}\int_0^2 f(t)\,dt$

$f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-2) = -f(2) = -1$ 이 된다.

즉, $-\frac{\pi}{4}\int_0^2 f(x)\,dx = -1$ 이므로 $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{4}{\pi}$ 가 된다.

$$\therefore \int_0^2 x f(x+2)\,dx = \frac{4}{\pi}\left(2f(2) - \int_0^2 f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(2 - \frac{4}{\pi}\right)$$

$$= \frac{8}{\pi} - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2$$ 이 된다.

[문제 2-2]

$g(x) = f(x)$

$h(x) = x+2$ 라고 하자

$g(x), h(x)$는 모두 미분가능 하므로

합성함수 $y = g(h(x))$ 는 미분 가능하고

그 도함수는 $y' = g'(h(x))h'(x)$ 로 주어진다.

즉, $g(h(x)) = f(x+2) = \frac{4}{\pi} f'(x)$ 는 미분 가능하고

$g'(h(x))h'(x) = f'(x+2) = \frac{4}{\pi} f''(x)$ 로 주어진다.

따라서 $f''(x)$ 가 모든 실수 x에 대해서 정의된다.

한양대학교	답안지 (자연계열)	
수 험 번 호	**성 명**	**페 이 지**
우수답안 2		2/2

[문제 2-3]

(가)의 조건

① $f(x)$는 연속

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(x) = \frac{\pi}{4}\int_{2}^{x+2} f(t)\,dt$

④ $f(2) = 1$ 이다.

$y = \sin\frac{\pi}{4}x$ 라고 하자.

$y = \sin\frac{\pi}{4}x$는 연속이다.

$f(2) = \sin\frac{\pi}{4}\times 2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$f(-x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) = -\sin\frac{\pi}{4}x$

$$\frac{\pi}{4}\int_{2}^{x+2}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx = \left[-\cos\frac{\pi}{4}x\right]_{2}^{x+2}$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{4}(x+2)\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}x.$$

$\therefore$ $y = \sin\frac{\pi}{4}x$는 (가) 조건을 모두 만족한다.

그러므로 $y = \sin\frac{\pi}{4}x$는 $f(x)$가 될 수 있다.

한양대학교	답안지 (자연계열)	
수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		1/2

[문제 2-1]

$f(x)$를 적분한 함수를 $F(x)$라 하면

$f(x) = \frac{\pi}{4}\{F(x+2) - F(2)\}$ 이다.

$F(x)$는 미분 가능한 함수 이므로

$f(x)$도 미분 가능한 함수이다.

$f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)$

$\int_0^2 x f(x+2)\,dx = \int_0^2 x \frac{4}{\pi} f'(x)\,dx$

$= \frac{\pi}{4}\left(\left[f(x)x\right]_0^2 - \int_0^2 f(x)\,dx\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left(2f(2) - \int_0^2 f(x)\,dx\right)$

$f(-2) = \frac{\pi}{4}\int_2^0 f(t)\,dt$

$-f(-2) = \frac{\pi}{4}\int_0^2 f(t)\,dt.$

그래프가 원점 대칭이므로

$f(-2) = -1$, $-f(-2) = 1$ 이다.

$\therefore \frac{\pi}{4}\left(2 - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ 이다.

따라서 $\int_0^2 x f(x+2)\,dx$는

[문제 2-2]

2. [문제 2-1]에서 $f(x)$가

미분 가능한 함수라 하였~~으므로~~다.

미분가능한 함수 $y = f(z)$와

$z = x+2$에 대해

합성함수 $y = f(x+2)$는 미분 가능

하고 그 도함수는

$y' = f'(x+2)$ 이다.

$\frac{\pi}{4} f(x+2)$가 $\frac{\pi}{4} f'(x+2)$로

미분 가능하므로 $f'(x)$도

미분 가능하다.

따라서 $f'(x)$가 모든 실수

x에 대해 정의 된다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
우수답안 3		2/2

[문제 2-3]

함수 $f(x)$는 연속이고 그래프가 원점에 대하여 대칭이고

$f'(x) = \frac{\pi}{4} f(x+2)$ 이며 $f(2)=1$

이 성립하는 함수는 $\sin\frac{\pi}{4}x$이다.

$\sin\frac{\pi}{4}x$는 연속이고, 원점에 대하여 대칭이며

$$\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}(x+2)$$
$$= \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)$$
$$= \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}x$$ 이다.

또한 $\sin\frac{\pi}{4}\cdot 2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ 이다.

따라서 $\sin\frac{\pi}{4}x$는 제시문 (가)의 조건들을 모두 만족한다.