

[문제 1] 함수 $y = x^n$ (n 은 정수), $y = x^r$ (r 은 유리수), $y = x^r$ (r 은 실수)의 도함수를 구하는 과정에 대한 물음에 제시문을 읽고 답하시오. (50점)

- (가) 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(a) = 0$ 이면 $P(x) = (x-a)Q(x)$ 인 다항식 $Q(x)$ 가 존재하며, 다항함수는 도함수가 존재하며 연속이다.
- (나) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 함수 $g(x)$ 가 $x=f(a)$ 에서 미분가능할 때, 합성함수 $g(f(x))$ 의 $x=a$ 에서 미분계수는 $g'(f(a))f'(a)$ 이다.
- (다) 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=a$ 에서 미분계수는 $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ 이다.
- (라) 양수 c 에 대하여 $e^{\ln c} = c$ 이다.

1. 자연수 n 과 실수 a 에 대하여 $P(x) = x^n - a^n$ 라 할 때, $P(x) = (x-a)Q(x)$ 인 다항식 $Q(x)$ 가 존재함을 설명하고 다항식 $Q(x)$ 를 구하는 방법을 설명하시오. 이를 이용하여 다항함수 $f(x) = x^n$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구하시오.

2. 양수 a , 자연수 n , 정수 k 에 대하여, 함수 $h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 $n+k \geq 0$ 인 경우와 $n+k < 0$ 인 경우로 나누어서 제시문 (가), (나), (다)를 이용하여 구하시오.

3. 양수 a , 자연수 n , 정수 k 에 대하여, 함수 $h(x) = x^{\frac{n+k}{n}}$ 에 대하여 $x=a$ 에서 미분계수를 제시문 (가), (나), (라)를 이용하여 구하시오.

4. 양수 a 와 유리수 r 에 대하여 $h(x) = x^r$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구하는 방법을 위의 결과의 관점에서 설명하고, 양수 a 와 유리수가 아닌 실수 r 에 대하여 $h(x) = x^r$ 의 $x=a$ 에서 미분계수를 구할 수 있는지를 위의 결과의 관점에서 설명하시오.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하십시오. (50점)

한없이 넓은 초원이 있다고 가정하자. 이 초원 위에 10km의 거리를 두고 A마을과 B마을이 있다. 한 사람이 A마을을 출발해서 B마을로 가는 도중에 초원의 한 곳에 보물을 숨겼다고 하자. 초원엔 별다른 장애물이 없고 이 사람이 이동하는 속력은 시속 5km로 일정하다. 또한 보물을 숨기는 데 걸리는 시간은 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정하자.

1. 이 사람이 B마을에 도착하기까지 걸린 시간이 t 시간($t > 2$)일 때 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 모양은 어떻게 되는가?
2. 이 사람이 B마을에 도착하기까지 걸린 시간이 t 시간일 때 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이를 $A(t)$ 라 하자. t 가 한없이 커질 때 $\frac{A(t)}{t^2}$ 은 어떤 수에 한없이 가까워지겠는가?
3. 이 사람이 4시간 만에 B마을에 도착했다면 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이는 얼마나 되겠는가?