한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계 **논 술** 오 전

수험번호 (　　　　　　) 성명 (　　　　　)

수험생 유의사항

1. 120분 안에 [문제 1]과 [문제 2]의 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

실수 a, b가 0보다 클 때, a^b과 b^a의 크기를 비교해 보고자 한다. a값을 고정하고 b값을 변화시킬 때, a^b과 b^a의 대소 관계가 어떻게 변하는지 살펴보는 것이다. 가령 $a=3$으로 하고 b값을 변화시켜 보자. $b=2, 3, 4$이면, 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$3^2 > 2^3,\ 3^3 = 3^3,\ 3^4 > 4^3$$

그렇다면 $2<b<3$ 또는 $3<b<4$인 경우는 어떠할까? b가 자연수가 아닐 때 3^b과 b^3의 크기를 어떻게 비교할 수 있을까?

1. $3^{2.5}$과 2.5^3의 크기를 비교하시오.

2. $3^{2.4}$과 2.4^3의 크기를 비교하시오. (단, $\log 2 = 0.30102\cdots$, $\log 3 = 0.47712\cdots$)

3. $x>0$일 때 함수 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$의 증감을 조사하시오.

4. 물음 3의 결과를 이용하여 3^π과 π^3의 크기를 비교하시오.

5. 양의 실수 a에 대하여 $a^x = x^a$을 만족하고 $x \neq a$인 양의 실수 x는 몇 개인지 조사하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 어떤 학생이 점화식으로 주어진 수열의 극한은 쉽게 결정할 수 있다고 생각했다. 다음은 이 학생이 예를 들어 설명한 방법이다.

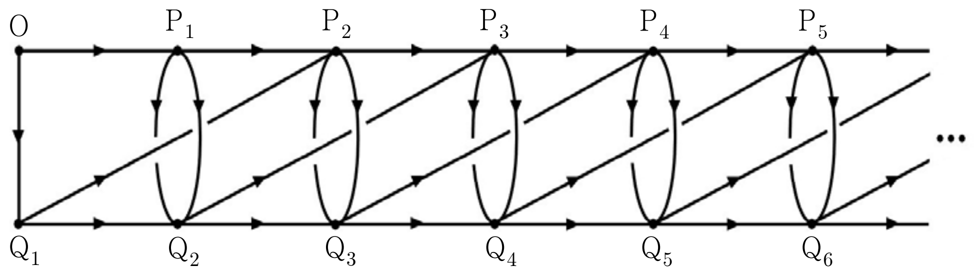
■ 점화식 $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 주어진 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴한다고 가정하고, 그 극한값을 α라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$ 이므로,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2a_n + 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{2\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1} = \frac{\alpha}{2\alpha + 1}$$ 이고, 따라서 $\alpha = 0$ 이다.

■ 점화식 $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 1}{b_n - 1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 주어진 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴한다고 가정하고, 그 극한값을 β라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \beta$ 이므로,

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + 1}{b_n - 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n - 1} = \frac{\beta^2 + 1}{\beta - 1}$$ 이고, 따라서 $\beta = -1$ 이다.

<나> 아래 그림에서 점 O로부터 화살표를 따라 점 P_n, Q_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 으로 갈 수 있는 경로의 수를 각각 x_n, y_n 이라 하자.



예를 들면, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 7$ 이다.

<다> 위 <나>에 주어진 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 에 대해, 수열 $\{z_n\}$ 은 $z_n = \dfrac{y_n}{x_n}$ 으로 정의된다.

1. 제시문 <가>에 주어진 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 실제로 α, β 로 수렴하는지 판정하고, 이 학생이 제시한 방법이 타당한지 설명하시오.

2. 제시문 <나>에 주어진 경로의 수 x_n, y_n 에 대해, 수열 $\{y_n + \sqrt{2}x_n\}$, $\{y_n - \sqrt{2}x_n\}$ 의 일반항을 각각 구하시오.

3. 제시문 <다>에 주어진 수열 $\{z_n\}$ 의 일반항을 구하시오. 이를 이용해 이 수열의 극한값을 구하시오.

4. 물음 2~3의 과정을 관찰하면, 같은 방법으로 임의의 자연수 c 에 대해 $\sqrt{c}$ 로 수렴하는 유리수들의 수열을 구할 수 있다. 이 방법으로 $\sqrt{5}$ 로 수렴하는 수열을 구했을 때, 이 수열의 첫 다섯 항을 쓰시오.