한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	1번

1. k번째 항은,

$\dfrac{2k+1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1}+\dfrac{C}{k+2}$ 이므로, $A=\dfrac{1}{2}$, $B=1$, $C=-\dfrac{3}{2}$ 이다.

2.

$$S_n=\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}}{3}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{3}-\frac{\frac{3}{2}}{4}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{2}}{5}\right]+\cdots$$
$$+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{\frac{3}{2}}{n}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n-1}+\frac{1}{n}-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$

부분 항들 중, $-\dfrac{\frac{3}{2}}{k}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{\frac{1}{2}}{k}=0\ (k\geq 3)$을 만족하는 세 짝을 찾을 수 있으므로, 이것들을 상쇄하면,

$$S_n=\left[\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{\frac{1}{2}}{2}\right]+\left[-\frac{\frac{3}{2}}{n+1}\right]+\left[\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}\right]$$
$$=\frac{5}{4}-\frac{\frac{1}{2}}{n+1}-\frac{\frac{3}{2}}{n+2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{n^2+3n+2}\left(2n+\frac{5}{2}\right)$$

3.

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]$$

$$2S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$
$$\cdots$$

$$2S=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$$E=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$=\left[\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\right]+\left[\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}+\frac{7}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$

자 연 계	한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시 모 의 논 술 예 시 답 안	2번

1. (15점) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}$에서 $\frac{2k+n}{n}=1+k\frac{2}{n}=1+k\frac{3-1}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+k\frac{3-1}{n}\right)^{13}=\frac{1}{2}\int_1^3 x^{13}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{14}x^{14}\right]_1^3=\frac{1}{28}(3^{14}-1)$$

2. (15점) 정적분의 기본정리를 사용하고 있는데, 이 정리를 사용하려면 피적분함수는 적분구간에서 연속이어야 한다. 그런데 함수 $\frac{1}{x}$는 $x=0$에서 연속이 아니고 0은 적분구간 $[-\frac{1}{e},e]$에 속한다. 정적분의 기본정리를 사용할 수 없다.

3. (15점) $f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+2)dt+C$ (C는 상수)이다. $f(0)=C$이므로 $C=3$. 그러므로 $f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+2)dt+3$.

4. (30점) $f(x)=\int_0^x \ln(\sin t+a)dt$라 놓아도 일반성을 잃지 않는다. 어떤 정수 n에 대해 $x=2n\pi+y$, $0\le y<2\pi$라 쓸 수 있다. 그러면, $f(x)=\int_0^{2n\pi+y}\ln(\sin t+a)dt=\int_0^{2n\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_{2n\pi}^{2n\pi+y}\ln(\sin t+a)dt$이고, $\ln(\sin x+a)$는 x대신 $x+2n\pi$를 대입해도 변함없는 함수이므로 $f(x)=n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_0^{y}\ln(\sin t+a)dt$라 쓸 수 있다.

그런데, $\int_0^y \ln(\sin t+a)dt$는 y에 대해 닫힌 구간 $[0,2\pi]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 따라서 $0\le y<2\pi$ 인 범위에서 $\int_0^y \ln(\sin t+a)dt$는 유한한 범위의 값을 갖는다. 만약 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx>0$이면, $n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt$은 정수 n이 커지면 무한히 커지고, n이 무한히 작은 음수로 되면 무한히 작은 음수가 된다. $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx<0$이면, $n\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt$은 n에 대해 반대로 움직인다. 따라서 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx\neq 0$이면 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가질 수 없다. 즉, $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$인 것은 $f(x)$가 최댓값과 최솟값을 가질 필요조건이다.

만약 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$이면

$$f(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\ln(\sin t+a)dt=\int_0^{2\pi}\ln(\sin t+a)dt+\int_{2\pi}^{x+2\pi}\ln(\sin t+a)dt=\int_0^{x}\ln(\sin t+a)dt=f(x)$$

이므로 $f(x)$는 x대신 $x+2n\pi$를 대입해도 변함없는 함수이다. 따라서 $[0,2\pi]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이 실수전체에서의 최댓값과 최솟값이 된다. 그런데 $f(x)$는 $[0,2\pi]$에서 연속이므로 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 즉, $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$인 것은 $f(x)$가 실수전체에서 최댓값과 최솟값을 가질 충분조건이다.

5. (25점) $1<a<b$이면 $\ln(\sin x+a)<\ln(\sin x+b)$가 모든 x에 대해 성립한다. 따라서, $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx<\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+b)dx$가 성립한다. 그러므로 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$인 a가 있다면 그것은 오직 하나이다.

또한, $\ln(\sin x+3)>0$이 모든 x에 대해 성립하므로 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+3)dx>0$이 성립한다.

한편 ㉯의 조건에 의해 $a_0\,(a_0>1)$에 대해 $\int_0^{2\pi}\ln(a_0^2-\sin^2 x)dx<0$이 성립한다고 하자. 그런데,

$$\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a_0)dx=\int_0^{\pi}\ln(\sin x+a_0)dx+\int_{\pi}^{2\pi}\ln(\sin x+a_0)dx$$

이고, $x=y+\pi$로 치환하면 $\int_{\pi}^{2\pi}\ln(\sin x+a_0)dx=\int_0^{\pi}\ln(-\sin y+a_0)dy=\int_0^{\pi}\ln(a_0-\sin x)dx$이므로

$$\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a_0)dx=\int_0^{\pi}\ln(\sin x+a_0)dx+\int_{\pi}^{2\pi}\ln(\sin x+a_0)dx=\int_0^{\pi}\ln(a_0+\sin x)dx+\int_0^{\pi}\ln(a_0-\sin x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}(\ln(a_0+\sin x)+\ln(a_0-\sin x))dx=\int_0^{\pi}\ln(a_0^2-\sin^2 x)dx<0.$$

이제 ㉮의 조건에 의해 중간값의 정리를 적용하면 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$이 성립하게 하는 a가 a_0과 3사이에 존재한다.

위에서 관찰한 것을 함께 고려하면, $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$이 성립하게 하는 a가 오직 하나 있다는 것을 알 수 있다