한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계

모 의 논 술

수험번호 (　　　　　　) 성명 (　　　　　)

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 무한급수의 값을 구하는 방법으로, 급수의 각 항을 부분 항들의 합 또는 차로 나타내는 것을 생각할 수 있다. 예를 들어, 아래의 무한급수에서

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

k번째 항은 $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ 로 나타낼 수 있으므로, 제1항에서 제n항까지의 부분합 S_n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

따라서, 무한급수의 값은 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ 이 된다.

(나) 다음 무한급수의 값을 구해보자.

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{9}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots$$

급수의 k번째 항을 $\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$의 꼴로 생각한 후, 이를 이용해 제1항에서 제n항까지의 부분합 S_n을 표현한다. 부분항들이 서로 상쇄되는 것을 생각하면, 최종적으로 S_n을 다음과 같이 간단히 쓸 수 있고 무한급수의 값이 $\frac{5}{4}$임을 알 수 있다.

$$S_n=\frac{5}{4}-\frac{D}{n^2+3n+2}$$

(다) 조금 더 복잡한 꼴의 무한급수를 생각해보자.

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+E\right]
\end{aligned}$$

1. 제시문 (나)에 알맞도록 상수 A, B, C를 찾으시오.

2. 제시문 (나)에 알맞도록 n에 대한 다항식 D를 찾으시오.

3. 제시문 (다)에 알맞는 실수 E의 값을 구하시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면, 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)$는 어떤 실수 S로 수렴한다.(단, n은 자연수이고 $x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$) $\int_a^b f(x)\,dx$를 그 실수 S로 정의하고,

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^a f(x)\,dx=0$$

으로 정의한다.

(나) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (c,d)에서 연속이고, a가 (c,d)에 속하는 한 점이면,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

가 (c,d)에서 성립한다.

(다) **(정적분의 기본 정리)** 함수 $f(x)$가 열린 구간 (c,d)에서 연속이고, a,b가 (c,d)에 속하는 두점이라 하자. $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 (c,d)에서 만족하면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

(라) 임의의 실수 x는 어떤 정수 n과 실수 y ($0\le y<2\pi$) 에 대하여 $x=2\pi n+y$로 표현할 수 있다.

1. 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k+n}{n}\right)^{13}$을 구하시오.

2. 계산 '$\int_{-\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-\frac{1}{e}}^{e}=2$'에서 잘못된 점을 설명하시오.

3. 실수전체에서 $f'(x)=\ln(\sin x+2)$과 $f(0)=3$을 만족하는 함수 $f(x)$를 정적분을 이용해서 표현하시오.

4. 어떤 실수 a $(a>1)$에 대해 함수 $f(x)$가 실수전체에서 $f'(x)=\ln(\sin x+a)$를 만족할 때, $f(x)$가 실수전체에서 최댓값과 최솟값을 갖을 필요충분조건이 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$임을 설명하시오.

5. 다음을 읽고 $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx=0$을 만족하는 실수 a $(a>1)$가 오직 하나 있음을 설명하시오.

㉮ $\int_0^{2\pi}\ln(\sin x+a)dx$는 a의 함수로서 열린 구간 $(1,\infty)$에서 연속이다.

㉯ 1보다 큰 실수 a중 $\int_0^{\pi}\ln(a^2-\sin^2 x)\,dx<0$을 만족하는 것이 있다.