한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	**1번**

1. $a_n = 2 \cdot (\frac{3}{4})^{n-1} + 2$이고 $b_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$ 이므로 $b_n < b_{n+1} < \cdots < 2 < \cdots < a_{n+1} < a_n$ 이 성립하고 $\alpha = \beta = 2$ 이다.

2. $d > 2$인 경우: 개구간 $(-\infty, d)$에서 $P(f(x))$는 다항함수이고 $x = 2$에서 미분가능하다. a_n, b_n은 모두 d보다 작은 2로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$의 $x = 2$에서 미분계수이다.
− $d < 2$인 경우: 개구간 (d, ∞)에서 $P(f(x))$는 다항함수이고 $x = 2$에서 미분가능하다. a_n, b_n은 모두 d보다 큰 2로 수렴하므로, 등식 ①의 우변과 좌변은 같고 그 극한값은 $P(f(x))$의 $x = 2$에서 미분계수이다.
− $d = 2$인 경우: $P(x) = x$라 하면 등식 ①의 좌변은 -1, 우변은 1로 서로 다르므로, 등식 ①은 성립하지 않는다.
따라서 구하는 집합은 $\{ d \in R \mid d \neq 2 \}$이다.

3. $d = 2$인 경우: $\frac{P(f(x)) - P(f(2))}{x-2} = \frac{P(|x-2|) - P(0)}{x-2}$이고 $P(x)$의 일차항의 계수 $\gamma_1 \neq 0$이면,
극한 $\lim_{x \to +2} \frac{\gamma_1 |x-2|}{x-2} = \gamma_1 \neq -\gamma_1 = \lim_{x \to -2} \frac{\gamma_1 |x-2|}{x-2}$이다.
그리고 1보다 큰 자연수 k에 대하여 극한 $\lim_{x \to 2} \frac{\gamma_k |x-2|^k}{x-2}$는 존재하므로
일차항의 계수가 0인 다항함수 $P(x)$는 등식 ①의 양변의 극한이 존재하고 그 극한값은 같다.

4.(20점) $P(2) - d = 0$인 경우: $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이고, 이때
$\lim_{n \to \infty} \frac{f(P(a_n)) - f(P(2))}{a_n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n - 2| \cdot |Q(a_n)|}{a_n - 2} = |Q(2)|$이고 $\lim_{n \to \infty} \frac{f(P(b_n)) - f(P(2))}{b_n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{|b_n - 2| \cdot |Q(b_n)|}{b_n - 2} = -|Q(2)|$이다.
− $P(2) - d \neq 0$인 경우: $\lim_{x \to 2} \frac{|P(x) - d| - |P(2) - d|}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(P(x)-d)^2 - (P(2)-d)^2}{(x-2)(|P(x)-d| + |P(2)-d|)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(P(x)-d) - (P(2)-d)}{(x-2)} \cdot \frac{(P(x)-d) + (P(2)-d)}{(|P(x)-d| + |P(2)-d|)} = P'(2) \frac{P(2)-d}{|P(2)-d|} .$$

따라서, $P(2) - d = 0$인 경우 $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식) 이고 $Q(2) \neq 0$이면, 등식 ②의 등호는 성립하지 않는다.

5. $P(2) - d = 0$인 경우: $P(x) - d = (x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)이고 $Q(2) = 0$이면,
문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 0이다.
− $P(2) - d > 0$인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $P'(2)$이다.
− $P(2) - d < 0$인 경우: 문항 4의 풀이에 의해, 등식 ②의 양변의 극한값은 $-P'(2)$이다.

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	2번

1. $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{d}$

$$=2-(-1)+2\cdot 3-2\cdot 2=5$$

2. 좌표평면에서 점 $A(a_1,a_2)$ 와 $B(b_1,b_2)$ 를 택하면 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 가 성립하고 $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2)$ 이다. $\triangle OAB$에 코사인법칙을 적용하고 정리하면

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

그런데 $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}$ 이고

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

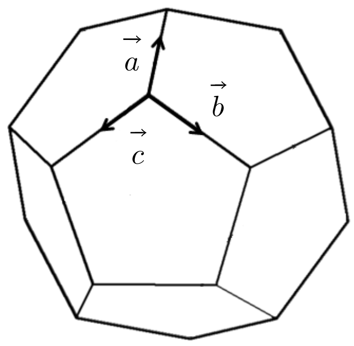
따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ 이 성립한다.

3. 정삼각형의 한 내각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. 마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$. 그리고 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$는 단위벡터이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$.
그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$ 에서

$$1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}l=0$$
$$\frac{1}{2}+k+\frac{1}{2}l=0$$

따라서 $k=1,\ l=-3$.

4. $\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=\alpha$ 라 두자.



그림과 같이 정십이면체의 한 꼭지점을 시점으로 하는 세 개의 단위벡터를 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 라 두고 $\vec{v}=a+k\vec{b}+l\vec{c}$ 가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 수직인 벡터라고 하자.

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{3\pi}{5}$이므로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}=-\alpha\ .$$

마찬가지로 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-\alpha$. 그리고 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$는 단위벡터이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1$.
그러므로 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 과 $\vec{v}\cdot\vec{b}=0$ 에서

$$1-\alpha k-\alpha l=0$$
$$-\alpha+k-\alpha l=0$$

따라서 $k=1,\ l=\frac{1-\alpha}{\alpha}$. 그러므로 $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\vec{c}$ ($\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}+\sqrt{5}\,\vec{c}$)가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 수직인 벡터, 즉, $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 모두 평행한 오각형에 수직인 벡터임을 알았다. 이 오각형에 인접한 면으로 $\vec{a}$와 $\vec{c}$에 모두 평행한 오각형이 있다. 이 오각형에 수직인 벡터 $\vec{w}$를 위와 마찬가지로 구하면 $\vec{w}=\vec{a}+\frac{1-\alpha}{\alpha}\vec{b}+\vec{c}$ ($\vec{w}=\vec{a}+\sqrt{5}\,\vec{b}+\vec{c}$).

이로부터 $\vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{1}{\alpha^2}(-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 이고 $|\vec{v}|^2=|\vec{w}|^2=\frac{1}{\alpha^2}(2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1)=\frac{\sqrt{5}+5}{2}$.

그러므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$
$$=\frac{-2\alpha^3-\alpha^2+\alpha}{2\alpha^2-\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

($\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$도 가능한 값)