한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	1번

1. 답안 1) $(3^{2.5})^2 = 3^5 = 243$, $(2.5^3)^2 = 2.5^6 = \dfrac{5^6}{2^6} > 244$ $\quad \therefore\ \underline{3^{2.5} < 2.5^3}$

   답안 2) $y = \dfrac{2.5^3}{3^{2.5}}$ $\log y = 3\log 2.5 - 2.5\log 3 = 3(1 - 2\log 2) - 2.5\log 3 = 3 - 6\log 2 - 2.5\log 3$

   $\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$ 이므로,

   $\log y > 3 - 6 \times 0.3011 - 2.5 \times 0.4772 = 0.0004 > 0$, $y > 1$

   $\therefore\ \underline{3^{2.5} < 2.5^3}$

2. 답안1) <u>log를 활용한 풀이</u>

   $y = \dfrac{2.4^3}{3^{2.4}}$ $\qquad \log y = 3\log 2.4 - 2.4\log 3 = 0.6\log 3 + 9\log 2 - 3$

   $\log 2 < 0.3011$, $\log 3 < 0.4772$ 이므로,

   $0.6\log 3 + 9\log 2 < (0.6)(0.4772) + 9(0.3011) = 0.28632 + 2.7099 = 2.99622 < 3$

   $\therefore \log y < 0$, $y < 1$ 이므로 $\underline{3^{2.4} > 2.4^3}$

   답안2) <u>거듭제곱을 직접 계산</u>

   $\left(\dfrac{2.4^3}{3^{2.4}}\right)^5 = \dfrac{2.4^{15}}{3^{12}} = \dfrac{504857.3\cdots}{531441} < 1 \qquad \therefore\ 3^{2.4} > 2.4^3$

3. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad \ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$

   양변을 x에 대해 미분하면, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

   $x > 0$ 이므로 $\dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$

   $\therefore$ <u>$0 < x < e$ 이면 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$는 증가하고,</u>

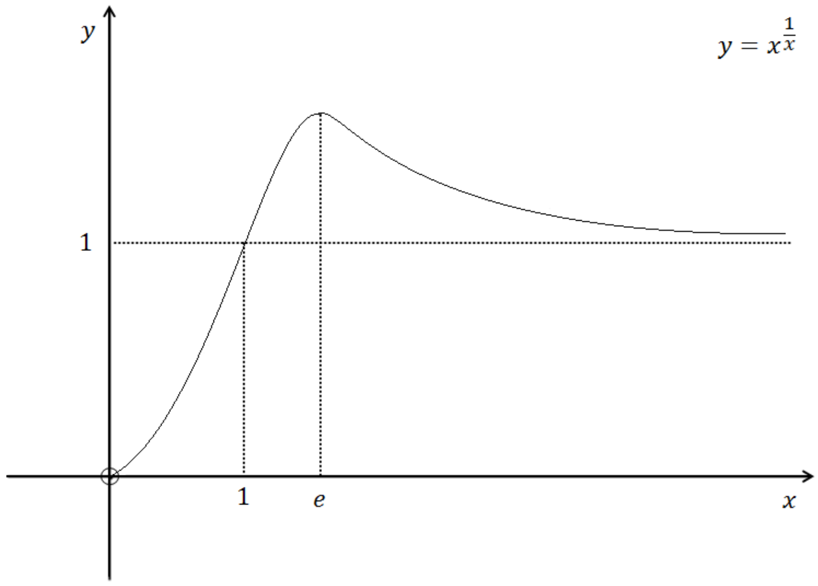
   <u>$x > e$ 이면 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$는 감소한다.</u>

4. $e < 3 < \pi$이므로 물음 3의 결론을 이용하면, $f(3) > f(\pi)$, 즉 $3^{\frac{1}{3}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$, $(3^{\frac{1}{3}})^{3\pi} > (\pi^{\frac{1}{\pi}})^{3\pi}$

   $\therefore\ \underline{3^{\pi} > \pi^3}$

5. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $\ln f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ 이다. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ 이다.

이를 물음 3에서 조사된 $f(x)$의 증감에 적용시켜 $y=f(x)$의 그래프 개형을 그려보면 아래와 같다.



$b^{\frac{1}{b}}=a^{\frac{1}{a}}$ 이면 $(b^{\frac{1}{b}})^{ab}=(a^{\frac{1}{a}})^{ab}$, $b^a=a^b$ 이다.

따라서, $a^x=x^a$ 에 대해 $x\neq a$인 양의 실수 x는,

<u>$0<a\leq1$ 또는 $a=e$ 일 때는 존재하지 않고, $1<a<e$ 또는 $a>e$ 이면 1개 존재한다.</u>

한양대학교 2014학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	논 술 예 시 답 안	2번

1. $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=2+\frac{1}{a_n}$ 이므로, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차 2, 첫째항 $\frac{1}{a_1}=3$ 인 등차수열이다.

따라서 $\frac{1}{a_n}=3+(n-1)2=2n+1$ 이고 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\frac{1}{2n+1}$ 이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}a_n=0=\alpha$ 이므로 α는 $\{a_n\}$의 극한값이다.

$b_1=2$이고, $b_{n+1}-b_n=\frac{b_n^2+1}{b_n-1}-b_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}=1+\frac{2}{b_n-1}>0$이므로, 임의의 n에 대해 b_n은 양수이다.

('$\{b_n\}$은 첫째항이 2인 증가수열이다' 또는 '$\{b_n\}$은 ∞로 발산한다'라고 써도 인정)

따라서 $\beta=-1$은 수열 $\{b_n\}$의 극한값이 아니다.

따라서 이 학생의 방법이 항상 성립하는 것은 아니다.

2. (1) (점 O 에서 점 P_{n+1} 로 갈 수 있는 경로의 수)

=(점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)+(점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)

따라서 $x_{n+1}=x_n+y_n$

(점 O 에서 점 Q_{n+1} 로 갈 수 있는 경로의 수)

=(점 O 에서 점 P_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)×2 +(점 O 에서 점 Q_n 으로 갈 수 있는 경로의 수)

따라서 $y_{n+1}=2x_n+y_n$

(2)
$$\begin{aligned} y_n+\sqrt{2}x_n &= 2x_{n-1}+y_{n-1}+\sqrt{2}(x_{n-1}+y_{n-1}) \\ &= (1+\sqrt{2})(y_{n-1}+\sqrt{2}x_{n-1}) \\ &= (1+\sqrt{2})^2(y_{n-2}+\sqrt{2}x_{n-2}) \\ &\cdots \\ &= (1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

같은 방법으로, $y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$

(2)의 별해

(1)에서 구한 관계식에 $n=1,2,3,\cdots$ 몇 개의 항을 대입하면 $y_n+\sqrt{2}x_n=(1+\sqrt{2})^n$ 임을 추정할 수 있다.

이를 수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $n=1$ 일 때, $y_1+\sqrt{2}x_1=1+\sqrt{2}$ 이므로 성립.

이제 $n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면,

$(1+\sqrt{2})^{k+1}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^k=(1+\sqrt{2})(y_k+\sqrt{2}x_k)$
$=y_k+\sqrt{2}x_k+\sqrt{2}y_k+2x_k=y_k+2x_k+\sqrt{2}(x_k+y_k)=y_{k+1}+\sqrt{2}x_{k+1}$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

$y_n-\sqrt{2}x_n=(1-\sqrt{2})^n$ 도 같은 방법으로 추정하고 증명.

3. $y_n+\sqrt{2}\,x_n=(1+\sqrt{2})^n$, $y_n-\sqrt{2}\,x_n=(1-\sqrt{2})^n$ 을 연립하여 풀면

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}(1+\sqrt{2})^n+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n)$$

$$x_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n)$$

이다. 따라서 수열 $\{z_n\}$이 일반항은 $z_n=\dfrac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1+0}{1-0}\right)=\sqrt{2}$$

4. $x_1=y_1=1$, $x_{n+1}=x_n+y_n$, $y_{n+1}=5x_n+y_n$ 이라 하자.

문항 2, 3의 과정과 동일한 방법에 의해, 수열 $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$은 $\sqrt{5}$로 수렴함을 알 수 있다.

따라서 첫 다섯 항은 $\dfrac{y_1}{x_1}=1$, $\dfrac{y_2}{x_2}=3$, $\dfrac{y_3}{x_3}=2$, $\dfrac{y_4}{x_4}=\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{y_5}{x_5}=\dfrac{11}{5}$ 이다.