2013학년도 자연계열 논술

◆ 출제방향 및 문제해설

한양대학교 2013학년도 신입학 전형 수시 논술은 수험생들이 고등학교 3년의 전 과정에서 도달한 학업 성취도와 대학 교육과정에서 요구하는 수학 능력을 평가하는 것이 목적이다.

자연계 논술은 고교 교육과정과 교재에서 경험할 수 있는 개념과 학습경험에 제한하여 출제하였다. 단답형 문제를 지양하고, 학생들이 수학교과서에서 배운 개념들을 상기하게 하거나 이미 학습한 개념들 내에서 이해할 수 있는 제시문을 제공하고, 이에 관련된 문항에 답하도록 하여 자신의 논리적 사고력과 창의력을 발휘하도록 하였다.

자연계 논술의 제시문들은 오전 [문제 1번], 오후 [문제 1번]과 같이 고교 교과과정이라는 문맥에 철저히 속하도록 구성되거나 오전 [문제 2번], 오후 [문제 2번]과 같이 교과서의 내용을 요약하였다. 어떤 경우에는 교과서에 나오는 공식 등을 제시하여 특정사실의 암기 여부가 평가에 영향을 미치지 않도록 하였다.

자연계 오전 [문제 1번]은 '수학Ⅱ'의 '미분법'과 '적분과 통계'에서 나오는 미분과 적분을 다루었다. 접선과 산술평균, 기하평균이 연결되는 문항, 정적분의 상한과 하한을 묻는 문항, 삼각함수에 대한 이해와 산술평균 기하평균 등을 연계한 문항 등으로 구성되어 종합적인 사고력을 측정하도록 하였다.

자연계 오전 [문제 2번]에서는 고교수학과정 중 '기하와 벡터'의 '일차변환과 행렬'에 속하는 내용인 좌표평면에서의 일차변환을 주로 다루고 적분에 관한 지식도 다루었다. 대칭변환과 닮음변환에 의한 곡선의 변환과 일차변환의 합성에 관한 문항, 닮음변환과 회전변환의 기하적 성질을 활용하는 문항 등으로 구성되었다.

자연계 오후 [문제 1번]은 '수학Ⅰ'의 '행렬과 그래프'의 내용인 2차정사각행렬의 연산에 관한 문제이다. 교과서에 소개되는 케일리-해밀턴 정리를 이해하고 활용할 수 있는가를 묻는 문항, '수학'의 '식과 그 연산'에 나오는 다항식의 나눗셈 정리와 행렬의 연산을 연계한 문항 등으로 구성되었다.

자연계 오후 [문제 2번]에서는 사인곡선의 길이에 대한 물음으로부터 출발하여 공간과 평면을 연계한 기하적 추론을 요구한 문제로서 '기하와 벡터'의 '이차곡선'과 '공간도형과 공간좌표'의 내용을 주로하고, '수학Ⅱ'의 '삼각함수'와 '적분과 통계'의 '적분법'의 내용 등도 포함하고 있다. 정적분의 성질을 활용하여 곡선의 길이를 분석하는 문항, 공간에 놓인 평면과 원기둥이 만나 이루는

곡선과 그 곡선의 평면으로의 정사영 등의 관계를 묻는 문항, 주어진 사인곡선과 같은 길이를 갖는 타원을 제시하도록 함으로써 공간적인 상상력과 논리적 사고력을 평가하는 문항 등으로 구성되었다.

◈ 출제의도 및 평가기준

1. 자연계 [(오전)논술 1]

가. 출제의도

고교과정수학 범위에서 가장 중요한 수학적인 생각과 내용을 묻는 문제를 출제하였다. 구체적인 내용으로 미적분에서 접선과 정적분의 문제를 출제하였다. 특히 접선과 산술평균과 기하평균의 연결되는 문제, 어려운 정적분을 이 부등식들을 통한 상하한을 구하는 문제 등이다. 고교과정의 수학에서 중요한 산술평균의 이해를 통한 최소값 및 최대값 문제를 삼각함수와 연계하여 출제하였다. 제시문의 구체적 출처는 문제 1번은 좋은책 신사고 수학 II의 p.156 예제2, 그리고 지학사 수학 II의 p.157 예제1,2번 문제에서 $\ln x$를 e^x로 바꿔서 출제하였다.

-문항1 : (1)번 $e^x \geq 1+x$는 지학사 수학 II에서 p.181 예제 1의 (2)와 (3)번, 그리고 금성출판사 수학 II p.186 예제 3의 (1)과 (2)번과 같은 문제다.
(2)번 정적분을 기하학적으로 이해하는가. 출처는 적분과 통계 지학사 p.33
(3)번 어려운 정적분을 (1)번 문제와 산술평균기하평균 (좋은책 신사고 고등학교 수학 p.147에 기술)을 이용하여 상하한을 구할 수 있는가.

-문항2: 좋은책 신사고 고등학교 수학 p.147에 기술된 산술평균기하평균을 $x \leq e^{x-1}$를 통해서 일반화 할 수 있는가.

-문항3: 삼각함수의 이해와 산술평균기하평균을 통한 최소값을 구하는 문제다.

나. 평가기준

문항	세부 평가 기준
1번 문항	접선을 이해하고 있는가?
	정적분을 기하학적으로 잘 이해하고 있는가?
	어려운 정적분을 기본적인 부등식을 통한 정적분의 근사치의 상하한을 구할 수 있는가?
2번 문항	$x \leq e^{x-1}$를 이용하여 일반적인 산술평균기하평균을 유도할 수 있는가? 등호가 성립하는 경우는 언제인가?
3번 문항	삼각함수를 잘 이해하고 있는가? 2번 문항에서 구한 산술평균과 기하평균을 이해하여 최소값을 구할 수 있는가?

2. 자연계 [(오전)논술 2]

가. 출제의도

이 문제는 고등학교 교육과정의 일차변환에 대한 이해와 그를 사용하여 사고하는 능력을 평가하려는 문제이다. 또한 곡선의 길이에 관한 물음을 포함하여 구체적인 함수의 적분기술의 숙련도도 평가하도록 하였다. 일차변환은 닮음변환, 대칭변환, 회전변환과 그들을 합성한 변환을 다루었으며 특히 닮음변환과 회전변환의 기하적 속성을 잘 이해하고 있는가를 묻고 있다.

제시문은 ‘기하와 벡터’ 과정의 일차변환과 행렬이라는 주제에 관한 교과서 내용(예: 기하와 벡터, 신사고(2009), 11-18쪽)을 정리한 것이다. 또한 곡선의 길이에 관한 교과내용(예: 적분과 통계, 천재교육(2009), 67쪽), 특별한 함수에 대한 미분결과 등을 제시하여 특정한 수학공식의 암기 여부가 평가에 미치는 영향을 최소화하였다

- 문항1 : 일차변환의 합성을 잘 이해하고 있는가, 방정식으로 주어진 곡선의 대칭변환과 닮음변환에 의한 이동을 잘 이해하고 있는가 등을 평가한다.

- 문항2 : 곡선의 길이를 구하도록 함으로써 정적분의 기초기술을 측정하고 닮음변환에 의해 곡선의 길이가 어떻게 변화하는가를 이해하고 물음으로써 닮음변환에 관한 기하 지식을 갖추고 있는지를 평가한다. 그러나 닮음변환에 관한 기초지식이 없이도 해결할 수 있는 문제이다.

- 문항3 : 회전변환의 성질과 평면기하를 활용하여 추리력과 창조력을 발휘하게 하는 문제이다.

나. 평가기준

문항	세부 평가 기준
1번 문항	방정식으로 표현된 곡선을 일차변환으로 이동한 곡선의 방정식을 구할 수 있는가? 일차변환을 행렬로 표현하고 그를 통해 일차변환의 합성을 다룰 수 있는가?
2번 문항	다소 복잡한 적분을 계산할 수 있는가? 닮음변환에 의한 곡선의 길이의 변화를 알고 있는가?(유한한 길이의 곡선의 일차변환을 잘 다룰 수 있고 그 길이를 구할 수 있는가?)
3번 문항	회전변환의 기하적 성질을 잘 이해하고 있는가? 회전변환과 평면기하의 성질을 활용하여 논리적으로 추론할 수 있는가?

3. 자연계 [(오후)논술 1]

가. 출제의도

2×2 행렬의 합, 곱, 실수 곱 등을 통해 얻어지는 행렬들 사이의 관계식인 케일리-헤밀턴 정리(수학 I p33, 더텍스트)의 의미를 이해하고, 그 역이 성립하는지를 판단하고자 하는 문제이다. 또한 케일리-헤밀턴 정리에서 나타나는 다항식의 특징을 약수, 배수의 개념 (수학 p77. 고려출판)을 통해 이해할 수 있는지를 파악하고자 하는 문제이다.

- 문항1 : 케일리-헤밀턴 정리를 이용하여 역행렬을 갖는 행렬이 될 조건을 올바르게 추론하고 보일 수 있는지를 평가하고자 한 문제이다.

- 문항2 : 행렬의 단순한 계산을 통해, 케일리-헤밀턴 정리의 역이 성립하는지를 파악하도록 한 문제이다.

- 문항3 : 케일리-헤밀턴 정리에서 나타나는 다항식의 특징을 파악하도록 한 문제이다.

나. 평가기준

문항	세부 평가 기준
1번 문항	케일리-헤밀턴 정리를 이용하여 역행렬을 갖는 행렬이 될 조건을 논리적으로 명확하게 보였는가?
2.(1) 문항	행렬의 합, 곱, 실수 곱 등을 통해 k와 l을 구했는가?
2.(2) 문항	행렬의 합, 곱, 실수 곱 등을 통해 k를 모두 구했는가?
3번 문항	문항2의 결과를 이용하여 A가 단위행렬의 상수 곱일 때와 아닐 때로 나누어 올바르게 설명하였는가?

4. 자연계 [(오후)논술 2]

가. 출제의도

이 문제는 어떤 수학적 논증이 주어졌을 때, 고등학교 수학 교과과정에서 배운 다양한 지식을 활용해서, 이 논증을 이해, 비평하고 더 나아가 적절히 응용해서 새로운 결과를 이끌어낼 수 있는지를 평가하는 문제이다. 곡선의 길이에 대한 정적분의 식(적분과 통계 p71. 지학사), 삼각함수(수학 p264. 고려출판)와 원(수학 p184. 고려출판), 타원(기하와 벡터 p48. 좋은책 신사고) 및 정사영(기하와 벡터 p88. 좋은책 신사고)에 대한 정확한 이해를 바탕으로 공간도형을 분석하는 기본적인 능력과 문제 해결을 위한 적절한 응용 및 논증의 전개과정을 살펴보고자 한다.

- 문항1 : 주어진 곡선의 길이 정적분으로 표현하고 이를 적절한 논증을 통해 추정하는 문제이다.

- 문항2 : 원기둥과 평면이 만나 생기는 공간도형에 대한 이해와 해석 및, 이를 정사영한 도형과의 관계에 대한 이해를 묻는 문제이다.

- 문항3 : 삼각함수와 원, 타원에 대한 기본적인 지식을 활용해서, 주어진 곡선과 같은 길이를 갖는 곡선을 만들고 그 과정을 설명하는 문제이다.

나. 평가기준

문항	세부 평가 기준
1번 문항	곡선 C의 길이가 어떤 감소함수의 정적분으로 표현됨을 보였는가?
	넓이를 적절히 비교해서 주어진 부등식이 성립함을 보였는가?
2번 문항	곡선 L을 포함하는 평면을 찾았는가?
	곡선 L의 정사영이 원임을 보이고 이 둘의 관계를 적절히 설명했는가?
3번 문항	주어진 곡선과 같은 길이를 갖는 타원을 찾았는가?
	타원의 장축과 단축의 길이를 구했는가?

◆ 예시답안

한양대학교 2013학년도 신입학 전형 수시

자 연 계	논 술 예 시 답 안	오전 1번

자연계 오전 [문제 1번] 예시 답안

문항 1-1) $c=0$ 즉 점 $(0,\ 1)$에서 접선방정식을 구하면

$$1+x \le e^x.$$

또는 $e^{x-1} \ge x$ 에서 x 대신에 $x+1$을 대입하면

$$1+x \le e^x.$$

문항 1-2) $x=a$에서 $x=b$까지 $y=e^x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 밑변 $(b-a)$와 점$(a,\ e^a)$, 점$(b,\ e^b)$을 잇는 직선으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이보다 작다. 즉

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a < (b-a)\frac{e^a+e^b}{2}$$

$$\frac{e^b-e^a}{b-a} < \frac{e^a+e^b}{2}.$$

문항 1-3) $\int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$의 상하한을 구하기 위하여 피적분함수 $\sqrt{1+e^{2x}}$ 의 상하한을 먼저 구한다.

$1+x \le e^x$ 를 이용하면 $\sqrt{2+2x} \le \sqrt{1+e^{2x}}$ 이며,

$\sqrt{a_1\,a_2} \le \dfrac{a_1+a_2}{2}$ 을 이용하면 $\sqrt{1+e^{2x}} \le \dfrac{1}{2}+\dfrac{1+e^{2x}}{2} = 1+\dfrac{e^{2x}}{2}$ 이다. 따라서

$$\sqrt{2}\int_a^b \sqrt{1+x}\,dx \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le \int_a^b \left(1+\frac{e^{2x}}{2}\right)dx$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+b)^{3/2}-(1+a)^{3/2}\right] \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le b-a+\frac{e^{2b}-e^{2a}}{4}.$$

문항 2) 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $\dfrac{a_k}{M} \ne 1$ $\left(a_k \ne M\right)$이면 $\dfrac{a_k}{M} < e^{\frac{a_k}{M}-1}$, $\dfrac{a_k}{M}=1$이면 $\dfrac{a_k}{M}=e^0=1$ 이므로 $\dfrac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1}$이 성립한다. 따라서 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해 $a_k \ne M$ 라면

$$\frac{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n}{M^n} < e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{M}-n} = 1 \qquad (*)$$

(⋆)식에서 부등식(<)이 등호(=)가 성립하는 경우는 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해 $a_k = M$일 때 (⋆)식으로부터 즉

$$\frac{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n}{M^n} = e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{M}-n} = 1$$

또는 $\frac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1}$을 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 n번 연속적으로 사용하고 그 부등식들을 각각 변변 곱하면 다음 부등식이 된다.

$$\frac{a_1\ a_2\ \cdots\ a_n}{M^n} \le e^{\frac{a_1}{M}-1}\ e^{\frac{a_2}{M}-1}\ \cdots\ e^{\frac{a_n}{M}-1} = e^0\ e^0\ \cdots\ e^0 = 1 \qquad (**)$$

$$(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(⋆⋆)식으로부터 등호는 모든 $k=1,2,\cdots,n$ 대하여 $a_k = M$ 즉 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 일 때 성립한다.

문항 3) $\tan C = \tan(\pi-(A+B)) = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}$ 이므로 다음 식이 된다.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\ \tan B\ \tan C. \qquad (\#)$$

예각이므로 $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$는 양수이다. $(a_1\ a_2\ a_3)^{\frac{1}{3}} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$을 이용하면

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} = \frac{\tan A\ \tan B\ \tan C}{3} \ge (\tan A\ \tan B\ \tan C)^{1/3}$$

(##)

$$\tan A\ \tan B\ \tan C \ge \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

(#)식으로부터 $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$ 등호는 $\tan A = \tan B = \tan C$ $\left(A = B = C = \frac{\pi}{3}\right)$ 일 때 즉, 정삼각형일 때 $\tan A + \tan B + \tan C$ 는 최소값 $3\sqrt{3}$을 갖는다.

위식 (##)에서

$\frac{(\tan A + \tan B + \tan C)}{3} \ge \{\tan A + \tan B + \tan C\}^{1/3}$, 즉 $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$ 을 얻는다.

한양대학교 2013학년도 신입학 전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오전 2번

자연계 오전 [문제 2번] 예시 답안

문항 1) 포물선 $2y=x^2$ 을 직선 $y=x$ 에 대해 대칭이동하면 $2x=y^2$

닮음변환 $\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$ 의 역변환은 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{k}x' \\ y=\dfrac{1}{k}y' \end{cases}$

$2x=y^2$ 에서 $2kx'=y'^2$. 이것이 $8x=y^2$ 과 같은 곡선을 나타내려면, $k=4$. 따라서,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

이 구하는 행렬 중 하나. 또한 포물선 $8x=4y^2$ 은 x 축에 대칭이므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

도 조건을 만족.

문항 2) $l=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx$, $x=\tan\theta$ 로 치환하면, $-1\le x\le 1$ 일 때, $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$l=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,(\tan\theta)'d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$$=\left[\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\sec\theta)'\tan\theta d\theta$$

$$l=\frac{1}{2}\left[\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}$$

C'은 $8x=y^2$, $-4\le y\le 4$이므로 C'의 길이 l'은

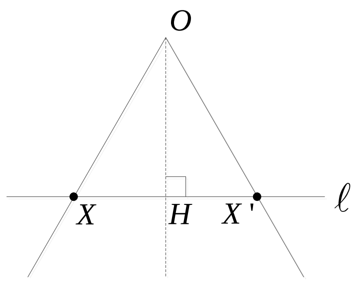
$$l'=\int_{-4}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{8}y^2\right)\right)^2}\,dy=\int_{-4}^{4}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}y\right)^2}\,dy$$

$\frac{1}{4}y=x$로 치환하면

$$l' = 4\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx = 4l$$
$$l' = 4\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}\right)$$

(l'의 길이에 관해 다음도 인정)
문항 1의 일차변환은 대칭변환과 닮음변환의 합성이고,
대칭변환은 길이를 변화시키지 않고 닮음변환이 길이를 4배로 하므로 C'의 길이는 C의 길이의 4배

문항 3)



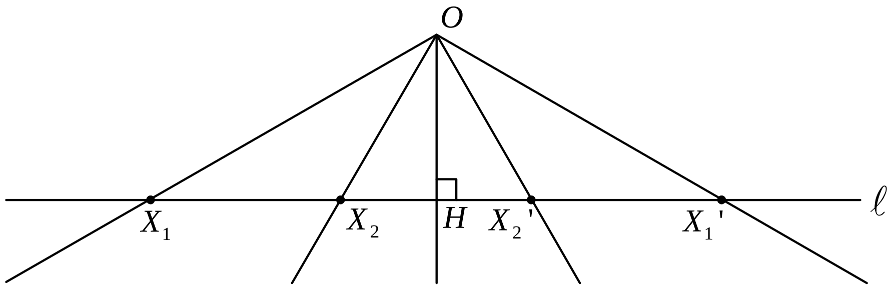
l 위의 점 X 에 f 를 반복 적용하여 X 가 l 위의 다른 점 X' 으로 옮겨졌다고 하자.
f가 O를 회전축으로 하는 회전변환이므로 $OX = OX'$이고
$\frac{\pi}{6}$만큼의 회전이므로 $\angle XOX' = \frac{\pi}{6}n,\ n = 1,2,3,4,5$

$\angle XOX' = \frac{\pi}{6}n$이면 X에 f를 n번 혹은 $(12-n)$번 적용하면 X'으로 옮겨진다. X'도 마찬가지로 X로 옮겨진다.
따라서 10개

(별해1)
l 위의 점 X 에 f 를 반복 적용하여 X 가 l 위의 다른 점 X' 으로 옮겨졌다고 하자.
그런데 H를 O에서 l에 내린 수선의 발이라고 하면, $OX = OX'$으로부터 $\angle HOX = \angle HOX'$. 따라서,
$\angle HOX = \frac{\pi}{12}n,\ n = 1,2,3,4,5$

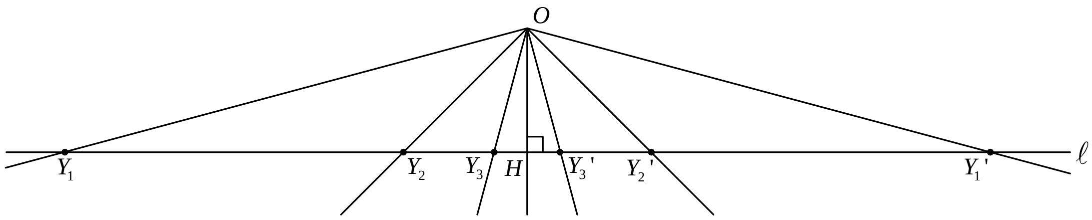
그러므로 X가 H의 왼쪽에 있는 경우, $\angle HOX = \frac{\pi}{12}n,\ n = 1,2,3,4,5$의 다섯가지가 있고 각각은 f를 1번, 2번, ⋯, 5번 적용하면 l 위의 다른 점으로 옮겨진다.
X 가 H 의 오른쪽에 있으면서 $\angle HOX = \frac{\pi}{12}n,\ n = 1,2,\cdots,5$인 경우 각각은 f를 11번, 10번,⋯, 7번 적용하면 l 위의 다른 점으로 옮겨진다.
따라서 10개.

(별해2)



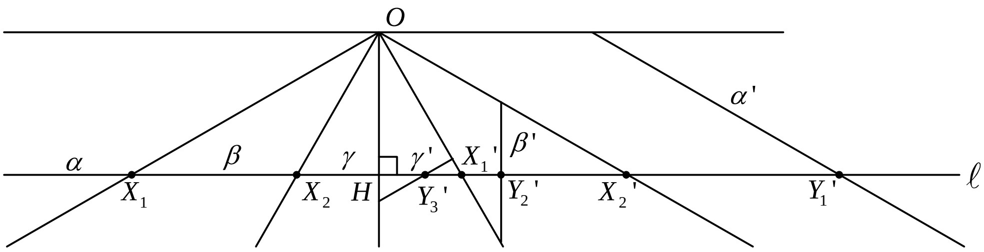
H 를 O 로부터 l 에 내린 수선의 발이라 하자.

$\angle X_1OX_2 = \angle X_2OH = \angle HOX_2' = \angle X_2'OX_1 = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 그림과 같이 X_1, X_2, X_1', X_2' 등을 택한다. 그러면, 문제에서 지시된 방법으로 $X_1 \to X_1'$, $X_2 \to X_2'$, $X_2' \to X_2$, $X_1' \to X_1$ 으로 옮겨진다.



$\angle Y_3OH = \angle HOY_3' = \frac{\pi}{12}$ 이고 $\angle Y_1OY_2 = \cdots = \angle Y_2'OY_1' = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록, Y_i, Y_i', $i=1$, 2, 3을 택한다. 그러면, 문제에서 제시된 방법으로 $Y_i \to Y_i'$, $Y_i' \to Y_i$

따라서, 문제의 조건을 만족하는 점이 적어도 10개 있다. 이 외에는 없음을 다음과 같이 보인다.



그림에서 직선 l의 반직선 부분 α를 $\frac{\pi}{6}$ 씩 회전이동했을 때 X_i, X_i' 외의 l과의 교점이 생기는 경우는 α'으로 이동되었을 때뿐이고, 이 때 α'과 l과의 교점은 Y_1'이다. 마찬가지로 선분 β의 경우에는 β'으로 이동했을 때 l과의 교점 Y_2', 선분 γ 의 경우에는 γ' 으로 이동했을 때 Y_3'. 비슷하게 H 의 반대쪽에 있는 직선의 부분에 대해서도 추론하면 문제의 조건을 만족하는 점은 10개 뿐이다.

한양대학교 2013학년도 신입학 전형 수시

자 연 계 **논 술 예 시 답 안** 오후 1번

자연계 오후 [문제 1번] 예시 답안

문항 1) 제시문 <다>에 의해, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$. 이 식을 변형하면

$$-(ad-bc)E=A^2-(a+d)A=(A-(a+d)E)A$$

이 된다. 만약 $ad-bc\neq 0$ 이면,

$$E=-\frac{1}{ad-bc}(A-(a+d)E)A$$

이므로 A의 역행렬 A^{-1}이 존재하고

$$A^{-1}=-\frac{1}{ad-bc}(A-(a+d)E)$$

임을 알 수 있다.

반대로 A가 가역행렬인데 $ad-bc=0$이라 가정하자. 이 경우 $A^2=(a+d)A$이고, A가 가역행렬이므로

$$A=(a+d)E$$

가 성립한다. 즉,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}.$$

결국 $a=b=c=d=0$임을 알 수 있고, $A=O$이 되어 가역행렬이라는 조건에 모순이다.

문항 2-1) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 에서 $A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ 이고

$$A^2=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2P^{-1}=P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

따라서

$$O=A^2+kA+lE=P\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}+kP\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}+lP\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix} 4+2k+l & 0 \\ 0 & 9+3k+l \end{pmatrix}P^{-1}$$

결국 $4+2k+l=9+3k+l=0$ 이므로 $\boldsymbol{k=-5}$ 이고 $\boldsymbol{l=6}$ 이다.

문항 2-2) 제시문 (다)와 문제의 조건으로부터

$$A^2+kA-6E=O \text{ 이고 } A^2-4A+(4-bc)E=O.$$

따라서 앞의 식에서 뒤의 식을 빼면

$$(k+4)A+(bc-10)E=O$$

이고

$$(k+4)\begin{pmatrix} 2 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10-bc & 0 \\ 0 & 10-bc \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $\boldsymbol{k=-4}$ 이거나 $b=c=0$임을 알 수 있다. 한편 $b=c=0$일 때, $2(k+4)=10$이므로 $\boldsymbol{k=1}$이다.

문항 3) 행렬 A에 대하여 $f(A)=O$인 일차식 $f(x)=px+q$가 있다고 하면

$$pA+qE=O$$

을 만족하고 A는 단위행렬 E의 실수배임을 알 수 있다. 따라서 이 경우 $g(x)$는 $f(x)$의 약수가 아니다.

행렬 A가 단위행렬 E의 실수배가 아니라면, 즉 $A\neq kE$ (k는 실수) 라면, $f(A)=O$인 일차식 $f(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 $f(A)=O$인 다항식 $f(x)$는 2차이상이다. 제시문 (가)에 의해

$$f(x)=Q(x)g(x)+r(x)$$

인 계수가 실수인 다항식 $Q(x), r(x)$가 존재한다. 만약 $r(x)=0$이 아니라면, $r(x)$는 일차식이고,

$$r(A)=f(A)-Q(A)g(A)=O-Q(A)O=O$$

이 되어 $f(A)=O$인 일차식 $f(x)$는 존재하지 않는다는 사실에 모순이다. 따라서

행렬 A가 단위행렬 E의 실수배가 아니면 $g(x)$는 $f(x)$의 약수이다.

한양대학교 2013학년도 신입학 전형 수시

자 연 계

논 술 예 시 답 안

오후 2번

자연계 오후 [문제 2번] 예시 답안

문항 1) 곡선 C의 길이 $< 2\sqrt{2}\pi$임을 보이자.

단계1 - 곡선 C의 길이를 정적분으로 표현한다.

제시문의 공식에 의해 곡선 C의 길이는 $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$ 이다.

(따라서 C의 길이는 $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$ 이다. 이제 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx < \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ 임을 보이면 된다.)

단계2 - 함수 $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$가 구간 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 감소함수임을 설명한다.

함수 $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ 를 생각하자. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 일 때, $f'(x)=\frac{-\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \le 0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

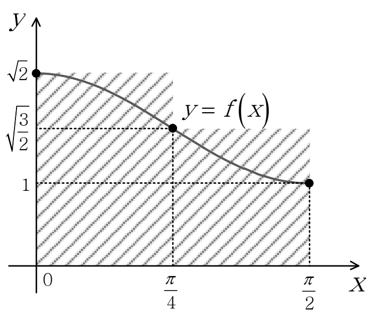
(또는 $y=\cos x$ 가 감소함수이므로, 차례로 $y=\cos^2 x$, $y=1+\cos^2 x$, $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$ 도 감소함수라고 설명해도 된다.)

단계3 - 넓이를 비교해서 부등식이 성립함을 보인다.

$f(0)=\sqrt{2}$, $f(\pi/4)=\sqrt{3/2}$, $f(\pi/2)=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \le \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$ 이다.

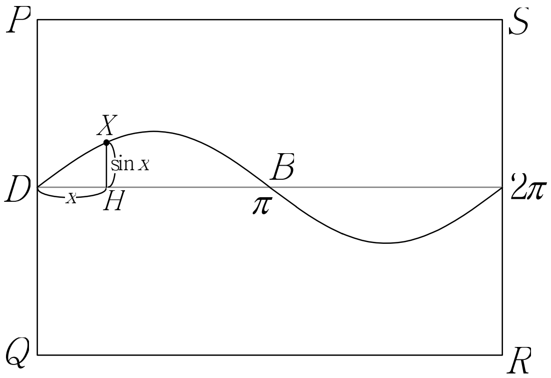
아래 그림을 참조 (답안에 반드시 그림을 그릴 필요는 없다.)

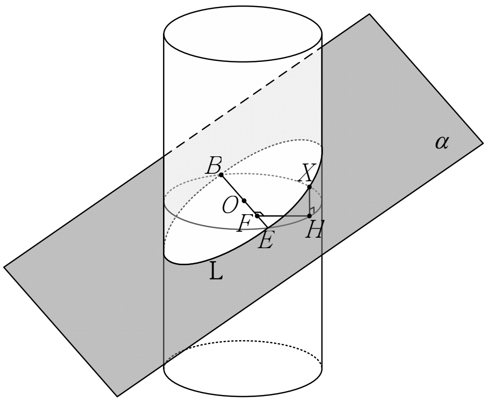


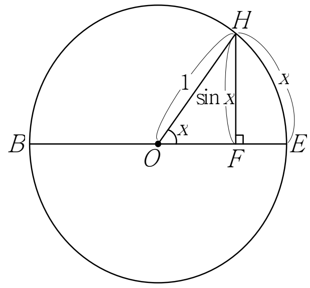
문항 2)
(ㄱ)은 참이다.

단계1 - 알맞은 평면 α를 찾는다.
아래 그림과 같이 중심이 O이고, 원기둥과 반지름 1인 원에서 만나는 원판을 생각하자. 이 원판과 선분 EB에서 만나고 각 $\frac{\pi}{4}$를 이루는 평면을 α라 하자 (그림만으로 평면 α를 설명해도 된다).

단계2 - 곡선 L위의 임의의 점이 평면 α에 포함됨을 보인다.
곡선 L위의 임의의 점을 X라 하고, X에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 호EH의 길이가 x일 때, 선분 XH의 길이는 $\sin x$이다. 한편 H에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 F라 하면, 각 $\angle FOH$의 크기는 x이므로, 선분 HF의 길이는 $\sin x$, 따라서 선분 XH의 길이$=\sin x=HF$의 길이, 따라서 점 X는 평면 α위에 놓여 있다. 따라서 곡선 L은 평면 α위에 놓여 있다.







(다른 풀이)
원기둥을 중심축이 z축이고 점 $D(=E)$가 $(1,0,0)$이 되도록 좌표공간에 놓으면, 곡선 C 위의 임의의 점 $(x, \sin x)$ 는 원기둥 위의 점 $(\cos x, \sin x, \sin x)$ 로 옮겨진다.
이 점은 항상 $y=z$ 를 만족하므로, 곡선 L은 평면 $y=z$ 위에 놓여 있다.

(ㄴ)은 거짓이다.

단계1 - 첫 번째 문장은 참임을 설명한다.
곡선 L위의 임의의 점에서 '원기둥과 수직인 평면'으로 내린 수선의 발은 항상 '원기둥과 수직인 평면'과 원기둥의 교선인 원위에 있다. 따라서 곡선 L의 '원기둥과 수직인 평면' 위로의 정사영은 원기둥 위에 있는 반지름 1인 원임은 분명하다.

단계2 - 그러나 두 번째 문장은 참이 아님을 설명한다.
일반적으로 두 평면 S, S'이 만나고 그 교각이 θ일 때, S위의 곡선 L의 S' 위로의 정사영을 L'라 하면 "L의 길이"와 "L'의 길이 • $\cos\theta$"는 다를 수 있다.
(참고: 그러나 "L로 둘러싸인 영역의 넓이"와 "L'으로 둘러싸인 영역의 넓이 • $\cos\theta$" 는 항상 같다.)

문항 3) 현주의 방법을 일반화한다.

단계1 - 곡선 C'의 방정식을 적당한 사인곡선의 방정식으로 바꾼다.

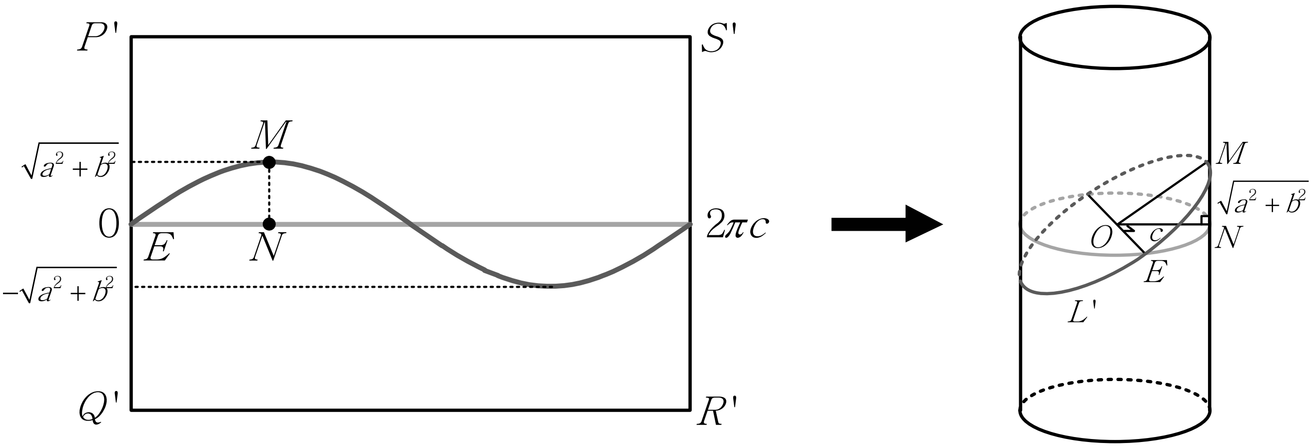
삼각함수의 합성에 의해, 곡선 $C' : y = a\cos\dfrac{x}{c} + b\sin\dfrac{x}{c} = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\dfrac{x}{c}+\alpha\right)$ 이다.

단, α는 상수이고 $0 \le x \le 2\pi c$. 따라서 평행이동에 의해 곡선 C'는

곡선 $C'' : y = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\dfrac{x}{c}\right)$, $0 \le x \le 2\pi c$, 와 같은 길이를 갖는다.

단계2 - 곡선 C''과 같은 길이를 갖는 타원 L'을 찾는다.

제시문에 주어진 방법을 적용해서 가로의 길이가 $2\pi c$인 직사각형 $P'Q'R'S'$ 위에 곡선 C''을 그리고, 이 직사각형의 두 변 $P'Q'$, $R'S'$를 이어 붙여 원기둥을 만들면, 곡선 C''는 반지름이 c인 원기둥 위의 곡선 L'이 되고, L'은 한 평면 위에 놓여 있으므로 타원이다. 이 때, L'과 C''의 따라서 C'의 길이는 같다. 아래 그림 참조.



단계3 - 타원 L''의 장축과 단축의 길이를 구한다.

위 그림에서 선분 MN, ON의 길이는 각각 $\sqrt{a^2+b^2}$, c 이고, 따라서

타원 L'의

장축의 길이 $= 2OM = 2\sqrt{MN^2+ON^2} = 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

단축의 길이 $= 2OE = 2c$ 이다.

(참고)

타원 L'의 방정식을 $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$, 단 $A > B > 0$, 의 형태로 쓰면,

$A = OM^2 = a^2+b^2+c^2$, $B = OE^2 = c^2$ 이므로, 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$이다.