한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시

자 연 계 | **논 술** | 오 후

수험번호 (   ) 성명 (   )

수험생 유의사항

1. 120분 안에 [문제 1번]과 [문제 2번]의 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

[문제 1번] 다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 계수가 실수인 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

인 계수가 실수인 다항식 $q(x)$, $r(x)$가 존재한다. 단, $r(x)=0$이거나 $r(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮다. 이 때, $r(x)=0$이면 $g(x)$는 $f(x)$의 약수라고 부르고, $f(x)$는 $g(x)$의 배수라고 부른다.

<나> 계수가 실수인 다항식 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$과 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬

$$a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E$$

를 $f(A)$라고 쓰자.

<다> 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$이 성립한다.

단, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. 제시문 <다>를 이용하여, 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$임을 보이시오.

2. (1) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 역행렬이 존재하는 행렬 P에 대하여 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$이 성립한다. $A^2+kA+lE=O$일 때, k와 l을 구하시오.

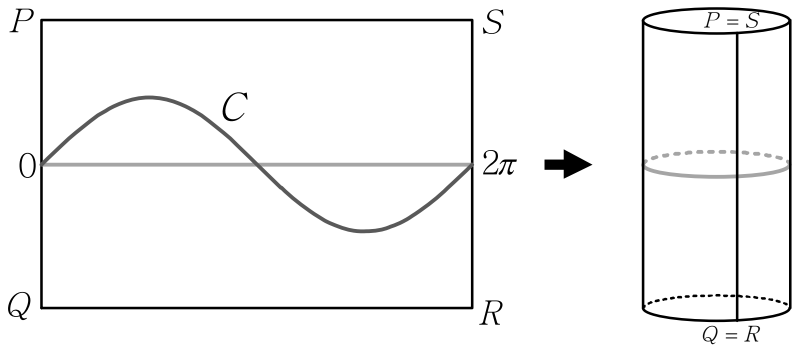
   (2) 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2+kA-6E=O$이 성립할 때, k를 구하시오.

3. O이 아닌 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 계수가 실수인 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(A)=O$이 성립할 때, 다항식 $g(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$가 어떤 조건에서 $f(x)$의 약수가 되는지 설명하시오.

뒷면에 계속 ☞

[문제 2번] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

반지름이 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다. 정적분을 이용하면 다른 곡선의 길이도 구할 수 있다. 즉, 곡선 $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$의 길이는 정적분 $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$로 주어진다. 현주는 이를 이용해서 사인곡선 $y=\sin x$의 한 부분의 길이를 구하려고 했으나, 이 경우 정적분의 값을 계산하는 것이 쉽지 않음을 알았다. 그래서 현주는 정적분을 이용하지 않고 이 곡선의 길이를 구할 수 있는지 생각해 보았다. 다음은 현주가 생각한 방법을 요약한 것이다.



위의 그림과 같이 가로의 길이가 2π인 직사각형 $PQRS$ 위에 곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$를 그리고 이를 C라 하자. 이 직사각형의 두 변 PQ, SR를 이어 붙여 원기둥을 만들면, 곡선 C는 원기둥 위의 어떤 곡선 L이 된다.

(ㄱ) 곡선 L은 원기둥의 축과 각 $\frac{\pi}{4}$를 이루며 만나는 한 평면 위에 놓여 있다.

(ㄴ) 곡선 L의 '원기둥의 축과 수직인 평면' 위로의 정사영은 원기둥 위에 있는 한 원이다. 따라서 다음 관계가 성립한다. (곡선 L의 길이) $\cdot$ $\cos\frac{\pi}{4}$ = (원기둥 위에 있는 한 원의 둘레의 길이).

곡선 C의 길이는 곡선 L의 길이와 같고, 이 원기둥 위에 있는 원의 반지름은 항상 1이다. 따라서 현주는 곡선 C의 길이가 $2\sqrt{2}\pi$라고 결론을 내렸다.

1. 곡선 C의 길이가 실제로는 $2\sqrt{2}\pi$보다 작음을 보이시오.

2. 위 1번에 의해 현주의 방법에는 오류가 있음을 알 수 있다. 위 제시문의 내용 중 (ㄱ)과 (ㄴ)의 참, 거짓 여부를 판정하고 그 이유를 밝히시오.

3. 평면이 원기둥의 축과 예각을 이루며 원기둥과 만나면 그 교선은 타원이 된다. 이 사실을 이용해서 곡선 $y=a\cos\frac{x}{c}+b\sin\frac{x}{c}$ (단 a, b, c는 양의 상수이고 $0 \le x \le 2\pi c$) 의 길이와 같은 둘레의 길이를 갖는 타원의 장축과 단축의 길이를 구하고 그 과정을 서술하시오.