# 한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시

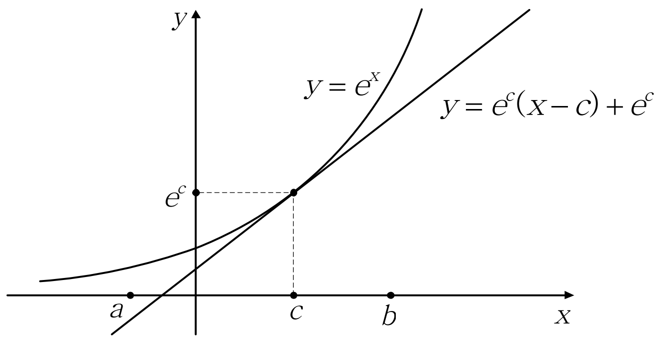
**자 연 계** **논 술** **오 전**

**수험번호 (          )  성명 (          )**

**수험생 유의사항**

1. 120분 안에 [문제 1번]과 [문제 2번]의 답안을 작성하시오.
2. 답안지는 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하시오.
3. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시오.
4. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안지를 검정색 펜(볼펜, 연필, 샤프)으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

[문제 1번] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)




위 그림은 곡선 $y=e^x$와 이 곡선 위의 점 $(c,\ e^c)$에서의 접선을 나타낸다. 이 접선은 그림에서와 같이 곡선 $y=e^x$보다 아래에 있다. 즉, 모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$$e^c(x-c)+e^c \le e^x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

이 성립하고 등호는 $x=c$인 경우에 성립한다. 예를 들면 $c=1$일 때 부등식 ①은 $ex \le e^x$ 또는

$$x \le e^{x-1}$$

이 되고 등호는 $x=1$인 경우에 성립한다.

한편 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 산술평균은

$$M=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

이다. 부등식 $x \le e^{x-1}$에서 $x$ 대신에 $\dfrac{a_k}{M}$를 대입하면 부등식

$$\frac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ②$$

이 되고 등호는 $a_k=M$인 경우에 성립한다.

1. (1) 부등식 $1+x \le e^x$를 부등식 ①을 이용하여 설명하시오.

   (2) $a<b$일 때 정적분을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{e^b-e^a}{b-a} < \frac{e^a+e^b}{2}$$

   (3) $a<b$일 때 부등식 $1+x \le e^x$와 $\sqrt{a_1 a_2} \le \dfrac{a_1+a_2}{2}$ ($a_1, a_2$는 양수)를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right] \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le b-a+\frac{e^{2b}-e^{2a}}{4}$$

2. 부등식 ②를 이용하여 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

3. 임의의 예각삼각형에서 세 각을 $A,\ B,\ C$라 하자. 부등식 $\left(a_1 a_2 a_3\right)^{\frac{1}{3}} \le \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ ($a_1, a_2, a_3$은 양수)을 이용하여 $\tan A+\tan B+\tan C$의 최솟값을 구하시오.



뒷면에 계속 ☞

[문제 2번] 다음 제시문 <가>~<마>를 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 일반적으로 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$를 식

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad (a, b, c, d\text{는 상수})$$

에 의하여 점 $P'(x',\ y')$으로 옮기는 변환을 일차변환이라고 한다.

이 때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 이 일차변환의 행렬이라고 한다.

<나> 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 $k\,(k \neq 0)$인 닮음변환, 원점을 중심으로 각 $\theta$만큼 회전하는 회전변환, 원점을 지나는 직선에 대한 대칭변환 등은 일차변환이다.

<다> 두 일차변환 $f,\ g$의 행렬을 각각 $A,\ B$라 하면 합성변환 $g \circ f$의 행렬은 $BA$이다.

<라> 곡선 $y = f(x)$의 $x = a$에서 $x = b$까지의 길이 $l$은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

<마> $\dfrac{d}{dx}(\ln(\tan x + \sec x)) = \sec x$

1. 닮음변환과 대칭변환만을 합성하여 만든 일차변환 중 포물선 $2y = x^2$을 포물선 $8x = y^2$으로 옮기는 일차변환을 두 개 구하시오.

2. 포물선 $2y = x^2$의 $-1 \le x \le 1$인 부분을 $C$라 하고, 위 1번의 일차변환에 의해 $C$가 옮겨진 곡선을 $C'$이라 할 때 $C$와 $C'$의 길이를 구하시오.

3. 좌표평면 위에 원점을 지나지 않는 직선 $l$이 있다. $f$는 원점을 중심으로 각 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 회전하는 회전변환이다. 직선 $l$ 위의 점 중 $f$를 반복해서 적용하여 $l$ 위의 다른 점으로 옮겨지는 것 모두의 집합을 $S$라 하자. 즉, $S$는 다음 조건을 만족하는 $l$ 위의 모든 점 $P$의 집합이다.

조건: $f(P),\ f(f(P)),\ f(f(f(P))),\ \cdots$ 중 $P$가 아닌 $l$ 위의 점이 있다.

$S$의 원소의 개수를 구하시오.