한양대학교 2013학년도 수시 1차

학 업 우 수 자(의예과)
한양우수과학인(의예과)

모의수리사고평가 (2회)

수험번호(고교명) (   )   성명 (   )

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

<문제 1> 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1은 1, 둘째항 a_2는 2이고, 이웃하는 세 항사이의 관계는 다음과 같이 행렬로 주어진다.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 2.$$

(1) 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대해 $\det(A) = ad - bc$ 라고 정의하면, 모든 자연수 n에 대해 $\det(A^n) = (\det(A))^n$ 이 성립함을 보이시오. 단, A^n 은 행렬 A의 n개의 곱인 행렬이다.

(2) (문제1)의 결과를 이용해서 모든 $n \geq 1$ 에 대해 등식

$$a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

이 성립함을 보이시오.

(3) (2)의 결과를 이용해서 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$의 극한이 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오.

<문제 2> 아래 제시된 자연수 m, n 에 대하여 정의되는 세 종류의 무한수열에 대하여 문제에 답하시오.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다고 하고 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소한다고 한다.

(1) 함수 $f(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가하고 함수 $g(x)$는 구간 $[a,b]$에서 감소할 때, 만약 $f(x)$와 $g(x)$의 함수값이 항상 양수이면 부등식 $f(a)g(b) \leq f(x)g(x) \leq f(b)g(a)$가 구간 $[a,b]$에 속하는 모든 x에 대하여 성립함을 설명하시오.

(2) 구간 $[0,1]$에 속하는 임의의 x에 대하여 부등식 $1 \leq \dfrac{x+1}{2^x} \leq 2$가 항상 성립함을 설명하시오.

(3) 방정식 $x\cos x = 2$가 구간 $\left[\dfrac{(n-1)\pi}{4}, \dfrac{n\pi}{4}\right]$에서 해를 갖게 되는 10이하의 자연수 n을 모두 구하고 그 이유를 설명하시오.

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 1차 모의수리사고평가

학 업 우 수 자(의예과) 한양우수과학인(의예과)	**출제의도, 평가내용 및 예시답안**

1. 출제 의도

수리사고평가는 단순히 어떤 값을 계산하는 것이 아니라 수학적 사고를 요구하는 문제로 구성하며 학생들의 수학적 추론 능력과 창의력을 측정하고자 하였다. 고교과정의 정의와 개념들을 기본으로 하여 논리적으로 문제가 요구하는 결론에 도달할 수 있는지를 측정하도록 구성되었다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

다음의 수학적 지식과 능력을 평가하기 위한 문제이다.

- 행렬의 연산과 그 성질을 이해하고 있는가?
- 수학적 귀납법을 적절하게 사용할 수 있는가?
- 수열의 극한의 의미를 이해하고 계산할 수 있는가?
- 논증을 전개하면서 추론과 주장을 효과적으로 표현하고 있는가?

<문제 2>

- 함수의 증가 감소를 부등식에 활용할 수 있는가?
- 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 해를 구하는 방법을 알고 있는가?
- 중간값의 정리를 알고 있는가?

3. 배점 및 예시답안

<문제1>

문항1. (20점)

답안: n 에 관해 수학적 귀납법을 이용한다.

$n=1$ 이면, $\det(A^1)=\det(A)=(\det(A))^1$ 으로 등식이 성립한다.

$n \geq 2$ 일 때, $n=k$ 이면 등식이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$ 일 때도 성립함을 보이자.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^k=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ 라 하면, $\det(A)=ad-bc$ 이고, 가정에 의해

$(\det(A))^k=\det(A^k)=ps-qr$ 이다.

따라서, $\det(A^{k+1}) = \det(A \cdot A^k) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}\right)$

$= (ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr) = (ad-bc)(ps-qr)$

$= \det(A)(\det(A))^k = (\det(A))^{k+1}$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 등식이 성립한다.

문항2. (40점)

답안: 행렬을 이용한 수열 $\{a_n\}$의 표현으로부터

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$$

이 성립한다.

여기서 (문제1)의 결과에 의해 $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}\right) = \left(\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)^{n+1} = (-1)^{n+1}$ 이 성립하므로,

$a_{n+2}\,a_n - a_{n+1}^2 = \det\left(\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}\right) = (-1)^{n+1}$ 을 얻는다.

문항3. (40점)

답안: (문제2)의 등식에 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ 을 대입해서 정리하면,

$a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} - a_n^2 + (-1)^{n+1} = 0$ 이 되고, 이 등식을 a_{n+1}에 대해 정리하면,

$a_{n+1} = a_n \pm \sqrt{2a_n^2 + (-1)^n}$ 이다. 이 때 $a_{n+1} > 0$ 이므로

$a_{n+1} = a_n + \sqrt{2a_n^2 + (-1)^n}$ 이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + \sqrt{2a_n^2 + (-1)^n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sqrt{2 + \frac{(-1)^n}{a_n^2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$$ 이다.

<문제2>

문항1. (10점)

구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 다음의 두 부등식

$$0 \le f(a) \le f(x) \le f(b), \quad 0 \le g(b) \le g(x) \le g(a)$$

이 성립하므로 부등식의 성질에 의해서 $f(a)g(b) \le f(x)g(x) \le f(b)g(a)$가 성립한다.

-------------------------- (10점)

문항2. (20점)

$f(x)=x+1$, $g(x)=2^x$, $h(x)=1/g(x)$라 할 때, 구간 $[0,1]$에서 $f(x)$는 증가함수이고 $h(x)$는 감소함수이다. 따라서 $\dfrac{x+1}{2^x}=f(x)h(x) \le f(1)h(0)=2$이다. -----------(10점)

한편, 구간 $[0,1]$에서 항상 $0<g(x) \le f(x)$이므로 (∵양 끝점에서 두 함수의 함숫값이 같은데 $y=f(x)$의 그래프는 직선이고 $y=g(x)$의 그래프는 아래로 볼록) $1 \le \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x+1}{2^x}$가 성립한다.

그러므로 구간 $[0,1]$에서 부등식 $1 \le \dfrac{x+1}{2^x} \le 2$이 항상 성립한다.

---(10점)

문항3. (70점)

$f(x)=x$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=x\cos x$라 하자.

구간 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$에서 $h(x) \le \dfrac{\pi}{4} \le 1$이므로 이 구간에서 방정식 $h(x)=2$는 해를 갖지 않는다.

---(5점)

구간 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $f(x)$는 증가하고 $g(x)$는 감소하므로 (a)로부터

$h(x)=f(x)g(x) \le f(\pi/2)g(\pi/4)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}<2$임을 알 수 있다. 따라서 방정식 $h(x)=2$는 구간 $[\pi/4,\pi/2]$에서 해를 갖지 않는다. --(25점)

구간 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$에서 $h(x) \le 0$이므로 이 구간에서 방정식 $h(x)=2$는 해를 갖지 않는다.

---(5점)

$h(3\pi/2)=0$이고 $h(7\pi/4)=\dfrac{7\pi}{4\sqrt{2}}>2$이므로 중간값정리에 의해서 $h(c)=2$를 만족하는 c가 구간 $\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right]$에 존재한다. 즉, 이 구간에서 방정식 $h(x)=2$는 적어도 하나의 해를 갖는다. (이 구간에서 $h(x)$는 증가하므로 실제로는 오직 하나의 해만 존재함.)

---(10점)

구간 $\left[\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right]$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 증가하므로 $h(x)$도 증가한다. 따라서 이 구간에서 $h(x) \ge h(7\pi/4)>2$이고 방정식 $h(x)=2$는 해를 갖지 않는다.

---(5점)

구간 $\left[2\pi,\dfrac{9\pi}{4}\right]$에서 $f(x)$는 증가하고 $g(x)$는 감소하므로 (a)로부터

$h(x)=f(x)g(x) \ge f(2\pi)g(9\pi/4)=\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}>2$이므로 이 구간에서 방정식 $h(x)=2$는 해를 갖지

않는다.--(10점)

$h(9\pi/4) > 2$이고 $h(5\pi/2) = 0$이므로 중간값정리로부터 방정식 $h(x) = 2$는 적어도 하나의 해를 구간 $\left[\dfrac{9\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$에서 갖는다.--(10점)

이상으로부터 방정식 $x\cos x = 2$이 구간 $\left[\dfrac{(n-1)\pi}{4}, \dfrac{n\pi}{4}\right]$에서 해를 갖게 되는 10 이하의 자연수 n은 7과 10밖에 없음을 알 수 있다.