한양대학교 2013학년도 수시 1차

학 업 우 수 자(의예과)
한양우수과학인(의예과)

모 의 수 리 사 고 평 가

수험번호(고교명) (   ) 성명 (   )

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

〈문제 1〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

<제시문>
모든 자연수 n에 대하여 $S_n < S_{n+1}$이면서 $S_n < M$인 실수 M이 존재하면 수열 $\{S_n\}$은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M보다 작거나 같다.

$x \geq 1$ 인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 만족하는 연속함수 $f(x)$ 가 있을 때,

(가) $f(x) > 0$

(나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

(1) 자연수 n 에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$ 일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n\to\infty} A_n$은 수렴한다.

(2) 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴함을 설명하시오.

〈문제 2〉 아래 제시된 자연수 m, n에 대하여 정의되는 세 종류의 무한수열에 대하여 문제에 답하시오.

<제시문>
가. 무한수열 $\{a_n\}$은 $a_1 \neq 0$, $a_2 = 3$, $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$ 을 만족한다. (단, $n \geq m$)
나. 무한수열 $\{b_n\}$은 $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ 을 만족한다.
다. 무한수열 $\{c_n\}$은 $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ 을 만족한다.

(1) 모든 자연수 $m \geqq 2, n$에 대하여 무한수열 $\{b_n\}$은 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$이 성립함을 보이시오.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$ 의 관계식은 $a_n = c_{2n-1}$ 임을 보이시오.

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 1차 모의수리사고평가

학 업 우 수 자(의예과) 한양우수과학인(의예과)

출제의도, 평가내용 및 예시답안

1. 출제 의도

수리사고는 단순히 어떤 값을 계산하는 것이 아니라 수학적 사고를 요구하는 문제로 구성된다. 고교과정의 수학 지식을 충분히 갖추고 있는가, 문제를 해결하는 능력이 있는가, 자신의 생각을 정확히 표현할 수 있는가 등을 측정하는 것을 목표로 한다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

- 제시문을 활용할 수 있는가?
- 적분의 뜻을 이해하고 있는가?
- 적분의 성질을 이해하고 있으며 활용할 수 있는가?
- 적분계산법과 미분을 할 수 있는가?
- 수열의 극한과 무한급수를 이해하는가?

<문제 2>

- 주어진 수열에 대한 정보를 가지고 일반항으로 표현 할 수 있는가?
- 수열의 일반항이 성립함을 증명할 수 있는가?
- 두 수열의 관계를 유추하는가?

3. 배점 및 예시답안

<문제1>

(1) 명제 1) → 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다.

명제 2) → 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^{n} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n\to\infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^{n} f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^{n} f(k)\}$는 수렴한다.

$B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$이므로 $B_n < C_n$이다.

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$이므로 수열 $\{D_n\}$이 수렴함을 보이면 충분하다.

$z = \ln(x+1)$이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z}\Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ 이다.

$B_n < B_{n+1}$이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다.

문항(1). (40점)

명제 1) → 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다. -- (20점)

명제 2) → 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^{n} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n\to\infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^{n} f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^{n} f(k)\}$는 수렴한다. -- (20점)

문항(2). (60점)

$B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$이므로 $B_n < C_n$이다. -- (10점)

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$이므로

수열 $\{D_n\}$이 수렴함을 보이면 충분하다. -- (10점)

$z = \ln(x+1)$이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$이므로

$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z}\Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$이다. ------------------------------ (20점)

$B_n < B_{n+1}$이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다. ---------------------------------- (20점)

<문제2>

세 개의 수열 중 무한 수열 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대해서 일반항을 구하여 보면 다음과 같다.

$a_1 \neq 0$, $a_2 = 3$, $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$ 를 만족하는 수열의 일반항 a_n 은

$m = 2$을 $a_m a_n = a_{n+m-1} + a_{n-m+1}$에 대입하면 $a_2 a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$이 되고

$a_2 = 3$가 주어졌으므로 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ 이다.

따라서 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$, 모든 $n \geqq 2$ ----------------------------------①

이고 $m = 1, n = 2$를 대입하면 $a_1 a_2 = a_2 + a_2 = 2a_2$이므로 $a_1 = 2$ 이다. ------②

세 개의 수열을 계산해 보면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	2	3	7	18	47	123	322	843	2207	5778	15127	39603	103682
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
c_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

문항(1). (증명 : 전체 40점)

(1) 모든 자연수 $m \geq 2, n$에 대하여 무한수열 $\{b_n\}$은 관계식 $b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$이 성립함을 보이시오.

$b_{m+n} = b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$을 모든 $m \geq 2$에 대해 수학적 귀납법에 의하여 증명하여 보면

$m = 2$인 경우 모든 n에 대하여 $b_{n+2} = b_{n+1}b_2 + b_n b_1 = b_{n+1} \cdot 1 + b_n \cdot 1 = b_{n+1} + b_n$ 이므로

성립한다.

임의의 $k(3 \leqq k \leqq m-1)$와 모든 n에 대하여 $b_{k+n} = b_{n+1}b_k + b_n b_{k-1}$이 성립한다고 가정하면,

$$b_{m-1+n} = b_{n+1}b_{m-1} + b_n b_{m-2} \qquad \text{---------------}(*)$$

이므로 주어진 수열 $\{b_n\}$의 관계식 $b_{m+n} = b_{n+m-1} + b_{n+m-2}$ 으로 부터

$b_{m+n} = b_{n+m-1} + b_{n+m-2}$

$= b_{n+1}b_{m-1} + b_n b_{m-2} + b_{n+1}b_{m-2} + b_n b_{m-3}$ ((*)을 이용)

$= b_{n+1}(b_{m-1} + b_{m-2}) + b_n(b_{m-2} + b_{m-3})$

$= b_{n+1}b_m + b_n b_{m-1}$

문항(2). 모든 자연수 n에 대하여 두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$의 관계식은 $a_n = c_{2n-1}$ 임을 보이시오.

[20점]

①에서의 수열 a_n의 일반항 관계식 $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$ 과

②에서의 초항 $a_1 = 2$를 구하여야 다음의 증명을 완성할 수 있다.

[증명 : 40점]

수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대해 관계식 $a_n = c_{2n-1}$을 증명하여 보면

$n = 1$: $a_1 = 2 = c_1$

임의의 $k(2 \leqq k \leqq n-1)$에서 $a_k = c_{2k-1}$이 성립된다고 가정하면, $a_{n-1} = c_{2n-3}$ 이므로

$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$

$= 3c_{2n-3} - c_{2n-5}$

$= 3(c_{2n-4} + c_{2n-5}) - c_{2n-5}$

$= 3c_{2n-4} + 2c_{2n-5}$

$= 2c_{2n-3} + c_{2n-4}$

$= c_{2n-2} + c_{2n-3}$

$= c_{2n-1}$