한양대학교 2013학년도 수시 1차

한 양 우 수 과 학 인
(의 예 과 외)

모 의 수 리 사 고 평 가

수험번호(고교명) (   ) 성명 (   )

수험생 유의사항

1. 120분 안에 답안을 작성하시오.
2. 문항별로 답안지 1장 범위 내에서 답안을 작성하시오.
3. 제목을 쓰지 말고 본문부터 시작하시오.
4. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
5. 답안지와 문제지 및 연습지를 함께 제출하시오.
6. 다음 경우는 0점 처리됩니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

〈문제 1〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

<제시문>

모든 자연수 n에 대하여 $S_n < S_{n+1}$이면서 $S_n < M$인 실수 M이 존재하면 수열 $\{S_n\}$은 수렴하고 그 수렴하는 값은 M보다 작거나 같다.

$x \geq 1$ 인 범위에서 다음 조건 (가)와 (나)를 만족하는 연속함수 $f(x)$가 있을 때,

(가) $f(x) > 0$

(나) $1 \leq x < y$ 에 대하여 $f(x) > f(y)$

(1) 자연수 n 에 대하여 $A_n = \int_1^n f(x)dx$ 일 때, 다음 두 명제는 동치임을 설명하시오.

명제 1 : 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 는 수렴한다.

명제 2 : $\lim_{n\to\infty} A_n$은 수렴한다.

(2) 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴함을 설명하시오.

〈문제 2〉 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

f와 g는 폐구간 $[0,a]$에서 정의된 연속함수이고, 폐구간 $[0,a]$의 임의의 원소 x에 대하여, 다음을 만족한다.

$$f(a-x) = f(x), \quad g(x) + g(a-x) = k \qquad \text{(단, } k\text{는 실수)}$$

(1) $\int_0^a f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}k\int_0^a f(x)\,dx$ 임을 보이시오.

(2) 정적분 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 값을 구하시오.

한양대학교 2013학년도 신입학전형 수시 1차 모의수리사고평가

한 양 우 수 과 학 인 (의 예 과 외)

출제의도, 평가내용 및 예시답안

1. 출제 의도

수리사고는 단순히 어떤 값을 계산하는 것이 아니라 수학적 사고를 요구하는 문제로 구성된다. 고교과정의 수학 지식을 충분히 갖추고 있는가, 문제를 해결하는 능력이 있는가, 자신의 생각을 정확히 표현할 수 있는가 등을 측정하는 것을 목표로 한다.

2. 문제해설 및 평가내용

<문제 1>

- 제시문을 활용할 수 있는가?
- 적분의 뜻을 이해하고 있는가?
- 적분의 성질을 이해하고 있으며 활용할 수 있는가?
- 적분계산법과 미분을 할 수 있는가?
- 수열의 극한과 무한급수를 이해하는가?

<문제 2>

- 적분의 기본성질, 연산의 성질, 치환적분의 개념 등을 명확히 이해하고 적용할 수 있는지를 평가
- 제시문의 내용을 이해하고 활용하여 풀 수 있는가를 평가

3. 배점 및 예시답안

<문제1>

(1) 명제 1) → 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n > 1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다.

명제 2) → 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^{n} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n\to\infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^{n} f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^{n} f(k)\}$는 수렴한다.

$B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$이므로 $B_n < C_n$이다.

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$이므로 수열 $\{D_n\}$이 수렴함을 보이면 충분하다.

$z = \ln(x+1)$이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$ 이므로

$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z}\Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$ 이다.

$B_n < B_{n+1}$이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다.

문항(1). (40점)

명제 1) → 명제 2)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n < \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $A_n < A_{n+1}$ 이며 $A_n < M$ 이다.

따라서 수열 $\{A_n\}$은 수렴한다. -- (20점)

명제 2) → 명제 1)

적분과 넓이의 관계에 의하여, $n>1$ 이면 $A_n > \sum_{k=2}^{n} f(k)$ 이다.

가정에 의하여 $\lim_{n\to\infty} A_n = M$ 이라하자.

적분과 넓이의 관계에 의하여, $\sum_{k=2}^{n} f(k) < \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 이며 $\sum_{k=2}^{n} f(k) < M$ 이다.

따라서 수열 $\{\sum_{k=1}^{n} f(k)\}$는 수렴한다. -- (20점)

문항(2). (60점)

$B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이고 $C_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}$ 라 하자.

$k+2 > k+1$이므로 $B_n < C_n$이다. -- (10점)

그리고 $C_n < D_n = \int_1^n \frac{1}{(x+1)(\ln(x+1))^2} dx$이므로

수열 $\{D_n\}$이 수렴함을 보이면 충분하다. --- (10점)

$z = \ln(x+1)$이라 두면 $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+1}$이므로

$D_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z}\Big|_{z=\ln 2}^{z=\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$이다. ---------------------------- (20점)

$B_n < B_{n+1}$이고 $B_n < \frac{1}{\ln 2}$ 이므로 수열 $\{B_n\}$은 수렴한다.

따라서 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(\ln(k+1))^2}$ 이 수렴한다. ---------------------------------- (20점)

<문제 2>

문항(1) (30점) 제시문의 조건 $f(a-x) = f(x)$, $g(x) + g(a-x) = k$ 로부터

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(x)g(x)\,dx &= \int_0^a f(x)(k - g(a-x))\,dx \\
&= k\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)g(a-x)dx \\
&= k\int_0^a f(x)\,dx - \int_a^0 f(a-t)g(t)(-dt) \\
&= k\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(a-t)g(t)\,dt \\
&= k\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

따라서, $\int_0^a f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2}k\int_0^a f(x)\,dx$ 이다. 30점

문항(2). (70점)

$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $g(x) = x$ 라 하면, $f(x), g(x)$는 폐구간 $[0,\pi]$에서 연속함수이고, 폐구간 $[0,\pi]$의 임의의 원소 x에 대하여,

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = f(x), \qquad g(x) + g(\pi - x) = x + (\pi - x) = \pi$$

을 만족한다. 30점

(1)번의 결과로부터

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

이고, $t = \cos x$로 치환하면,

$$\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{-1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$$

이고, 다시 $t=\tan\theta$로 치환하면,

$$\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

.... 40점