
HANYANG UNIVERSITY
2011학년도 수시 1차 대비
서울캠퍼스
모의 논술고사
〈학업우수자(의예과), 한양우수과학인〉
HANYANG UNIVERSITY
한 양
1939
The Engine of Korea
Hanyang University

한양대학교 2011학년도 수시1차([학업우수자(의예과), 한양우수과학인) 논술고사 (모의)

자 연 계

모 의 논 술

수험번호 (   )   성 명 (   )

수험생 유의사항

1. 답안은 120분 안에 <논술 1>과 <논술 2>를 작성하시오.
2. 제목을 쓰지 마시오.
3. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오.
4. 답안지와 문제지를 함께 제출하시오.
5. 다음 경우는 0점 처리될 수 있습니다.
   1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우
   2) 자신의 신원을 드러내는 불필요한 표기를 한 경우
   3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우
   4) 답을 해당 답란에 작성하지 않은 경우

<논술 1> 다음 제시문을 읽고 지시에 따라 논술하시오.

[가] $p(n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$는 다음과 같은 명제를 나타낸다.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$이 모두 양의 실수일 때,

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n \geq x_1x_2\cdots x_n$$

이때, 모든 양의 수 x_1에 대해 $x_1 \geq x_1$ 이므로 $p(1)$은 성립한다. 또 $(x_1-x_2)^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \geq 0$ 이므로 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2$ $(x_1, x_2>0)$이다. 따라서 $p(2)$도 성립한다.

[나] 양의정수 m에 대해서, $p(m)$이 성립하면 $p(2m)$이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_m+x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{2m}\right)^{2m}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{(x_1+\cdots+x_m)+(x_{m+1}+\cdots+x_{2m})}{2}\right)^2}{m^2}\right]^m$$

$p(2)$가 성립하므로,

$$\geq \left[\frac{(x_1+\cdots+x_m)\cdot(x_{m+1}+\cdots+x_{2m})}{m\cdot m}\right]^m = \left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}\right)^m\left(\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)^m$$

또 $p(m)$이 성립하므로,

$$\geq (x_1\cdots x_m)\cdot(x_{m+1}\cdots x_{2m}) = x_1\cdots x_{2m}$$

[다] 양의정수 m에 대해서, $p(m+1)$이 성립하면 $p(m)$이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$p(m+1)$이 성립하므로,

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_m+x_{m+1}}{m+1}\right)^{m+1} \geq x_1\cdots x_mx_{m+1}\,.$$

이는 모든 양의정수 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, x_{m+1}$에 대해서 성립하므로, 특히 $x_{m+1}=\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}$에 대해서도 성립한다. 이 식에 $x_{m+1}=\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}$를 대입하면,

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_m+\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}}{m+1}\right)^{m+1} \geq x_1\cdots x_m\times\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}\,.$$

이를 정리하면,

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_m}{m}\right)^m \geq x_1\cdots x_m\,.$$

이는 모든 양의 정수 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$에 대해서 성립하므로, $p(m)$이 성립한다.

(1) [나]와 [다]로부터 모든 양의정수 n에 대해 $p(n)$이 성립함을 이끌어 낼 수 있는 지를 설명하여라.

(2) $p(2)$는 “둘레의 길이가 같은 직사각형 중 정사각형이 가장 면적이 크다”라는 명제를 함축하고 있음을 설명하라. 또 $p(3)$로부터 이와 유사한 “직육면체”와 “정육면체”에 관한 명제를 이끌어내어 보아라.

<논술 2> 다음 제시문을 읽고 지시에 따라 논술하시오.

[가] x와 y가 매개변수라 불리는 t의 연속함수로 연립방정식 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 로 주어졌을 때, 이 방정식을 **매개변수방정식**이라 한다. t가 변할 때, 점 $(x,y)=(f(t),g(t))$도 변하고 그 자취를 따라 곡선이 형성되며 이것을 **매개변수곡선**이라 부른다. 예를 들어 포물선 $y=x^2$은

$$x=t,\ y=t^2$$

이라는 매개변수방정식으로 표시할 수 있고, 단위원 $x^2+y^2=1$은

$$x=\cos t,\ y=\sin t$$

로 나타낼 수 있다. 단위원의 또 다른 매개변수화로는 유리함수를 사용하여

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}$$

와 같이 매개변수화할 수도 있다. 이 경우 $(x,y)=(-1,0)$을 제외한 단위원 위의 모든 점이 매개변수화된다.

[나] 두 정수 a, b와 양의 정수 n에 대해, $a-b$가 n의 배수(즉, $a-b=nq$인 정수 q가 존재)일 때, **a와 b는 법 n에 대해 합동**이라고 하고 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$으로 표기한다. 합동식에서는 다음의 법칙들이 성립한다.

(i) $a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)$

(ii) $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이면, $b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)$

(iii) $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이고 $b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이면, $a\equiv c\ (\mathrm{mod}\ n)$

(iv) $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이고 $c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이면, $a+b\equiv c+d\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이고 $ac\equiv bd\ (\mathrm{mod}\ n)$

(v) a와 n이 서로 소이면, $ab\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)$ 이 되는 정수 b가 존재하고 또한 이의 역도 성립한다. 이 때, b를 **법 n에 관한 a의 역수**라고 부른다. 법 n에 관한 a의 역수는 법 n에 대해 유일하게 존재한다.

[다] 3이상의 홀수 n에 대해, 집합 S_n과 T_n을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid 0\le a,b<n\}$$

$$T_n=\left\{(a,b)\in S_n \mid a^2-b^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)\right\}$$

예를 들어 $n=5$일 때, S_5의 원소 $(0,2)$는 $0^2-2^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$를 만족하므로 T_5의 원소이다. 이런 식으로 T_5의 모든 원소들을 구하면, $T_5=\{(0,2),(0,3),(1,0),(4,0)\}$이 되어 총 4개의 원소를 갖는다. 비슷한 방법으로 T_3에 들어있는 원소들의 개수는 2이고, T_7에 들어있는 원소들의 개수는 6임을 확인할 수 있다.

(1) 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 유리함수를 사용한 매개변수화 표현에 관하여 논하시오.

(2) 제시문 [다]에 주어진 집합 T_n에 들어있는 원소들의 개수에 대하여 논하시오.

한양대학교 2011학년도 신입학전형

자 연 계

(모 의) 논술 고사 출제 의도 및 예시 답안

1. 출제 의도 및 목적:

(1) <문제 1>의 출제 의도:

- 수학적 귀납법의 원리를 정확히 이해하고 있는지를 파악하고자 한다.
- 수식이 내포하는 내용을 기하문제에 적용하는 능력을 파악하고자 한다.
- 주어진 개념이 2차원에서 3차원으로 확장될 때 한 가지 방법만 있지 않는 경우가 있다. 만약 학생이 문제2의 후반부 답으로 “겉면적이 같은 직육면체 중 정육면체가 가장 부피가 크다”라는 명제를 언급했다면, 이는 학생이 식을 보고 신중히 생각해서 결론을 낸 것이 아니라고 판단할 수 있다.

(2) <문제 2>의 출제 의도:

곡선의 매개변수화에 관한 문제로서, 곡선을 매개변수화할 때는 초월함수, 무리함수, 유리함수 등 다양한 함수들을 사용할 수 있다. 본 문제는 이러한 매개변수화를 합동식과 같은 이산적인 대상에 적용할 수 있음을 보여주는 문제로서, 고교과정에서의 함수의 일대일 대응, 최대공약수 등의 개념을 활용하는 문제이다.

2. 종합 평가 기준

<문제 1> 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1번 문항	40%	[나]와 [다]를 이용하여 모든 양의정수 에 대해 이 성립함을 올바르게 설명하였는가?	40%
2번 문항	60%	대수문제를 기하문제로 자연스럽게 해석하는가?	30%
		$p(3)$이 “변의 총 길이가 일정할 때 정육면체의 부피가 최대가 된다”라는 명제를 나타냄을 올바르게 (예를 들면, “겉면적이 같은 직육면체 중 정육면체가 가장 부피가 크다”라는 명제를 나타내지 않고) 파악하고 있는가?	30%

<문제 2> 종합 평가 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1번 문항	20%	매개변수화를 위해 사용된 함수가 적절한가?	10%
		매개변수함수를 얻기까지의 과정이 적절히 기술되어 있는가?	10%
2번 문항	80%	문항 1에서 얻은 매개함수를 적절히 활용하였는가?	20%
		제시문에 제시된 합동식의 성질을 적절하게 활용하였는가?	10%
		집합 T_n과 일대일 대응 관계를 이루는 대상을 올바로 구현하였는가?	20%
		일대일 대응 함수를 올바로 구현하였는가?	30%

2. 예시 답안

<문제 1>

(문항 1) [가]에서 언급하였듯이 $p(1)$은 성립한다. 따라서 [나]에 의해 명제 $p(1), p(2), p(4), \ldots, p(2^k), \ldots$들이 성립함을 알 수 있다. 또 $p(2^k)$가 성립하면, [다]에 의해 $p(2^k-1), p(2^k-2), \ldots, p(1)$들이 차례대로 성립한다. 따라서 모든 양의정수 n에 대해 $p(n)$이 성립한다.

(문항 2) $p(2): (\frac{x_1+x_2}{2})^2 \geq x_1x_2 \ (x_1, x_2 > 0)$에서 x_1, x_2를 직사각형의 양변의 길이라 놓으면, x_1x_2 는 둘레의 길이가 $2(x_1+x_2)$인 일반적인 직사각형의 면적을 나타내고 $(\frac{x_1+x_2}{2})^2$는 둘레의 길이가$2(x_1+x_2)$인 정사각형의 면적을 나타낸다. 그러므로 $p(2)$에 의해 둘레의 길이가 일정할 때 정사각형의 면적이 최대가 된다.

$p(3): (\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^3 \geq x_1x_2x_3 \ (x_1, x_2, x_3 > 0)$에서 x_1, x_2, x_3를 직육면체의 세변의 길이라 놓으면, $x_1x_2x_3$ 는 (12개의) 변의 총 길이가 $4(x_1+x_2+x_3)$인 일반적인 직육면체의 부피를 나타낸다. 한편 $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^3$는 (12개의) 변의 총 길이가 $4(x_1+x_2+x_3)$인 정육면체의 부피를 나타낸다. 그러므로 $p(3)$에 의해 (12개의) 변의 총 길이가 일정할 때 정육면체의 부피가 최대가 된다.

<문제 2>

(문항 1) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=1$로부터 $x+y=t$라고 하면, $x-y=t^{-1}$이 된다. 이제 x와 y를 t에 관한 식으로 풀면, 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 매개변수표현

$$x = \frac{t+t^{-1}}{2},\ y = \frac{t-t^{-1}}{2}$$

를 얻는다.

(문항 2) 집합 Φ_n을 다음과 같이 정의하자.

$$\Phi_n = \{t \in \mathbb{Z} | 0 \leq t < n, \gcd(t,n)=1\}$$

이제 집합 T_n과 집합 Φ_n사이에 일대일 대응관계가 있음을 보이도록 하자.

(a,b)가 T_n의 원소일 때, $a^2-b^2=(a+b)(a-b) \equiv 1 \pmod n$이 된다. 제시문 [나]에 주어진 합동식의 성질 (v)에 의해 $a+b$는 n과 서로 소가 된다. 따라서 $a+b \pmod n$ (즉, $a+b$ 를 n으로 나눈 나머지)은 Φ_n의 원소가 된다. 이제 함수 $f:\ T_n \to \Phi_n$을

$$f(a,b) = a+b \pmod n$$

으로 정의하자.

제시문 [나]에 주어진 합동식의 성질 중 (v)번 성질에 의해, Φ_n의 원소 t에 대해 법 n에 관한 t의 역수가 존재하는데 이를 t^*라고 표기하도록 하자. 또한 n은 홀수이므로 2와 서로 소가 되어 2^*가 존재한다. 이제 함수 $g: \Phi_n \to T_n$을

$$g(t) = (2^*(t+t^*) \pmod n,\ 2^*(t-t^*) \pmod n)$$

으로 정의하자. $(2^*(t+t^*))^2 - (2^*(t-t^*))^2 \equiv 1 \pmod n$이므로 $g(t)$는 T_n의 원소이므로 함수 g가 잘 정의되어있음을 알 수 있다.

이제 함수 f와 g가 서로 역함수 관계에 있음을 보이도록 하자. $(a,b) \in T_n$에 대해

$$g \circ f(a,b) = g(a+b \pmod n) = (2^*((a+b)+(a-b)) \pmod n,\ 2^*((a+b)-(a-b)) \pmod n) = (a,b)$$

이고, $t \in \Phi_n$에 대해

$$f \circ g(t) = f(2^*(t+t^*) \pmod n,\ 2^*(t-t^*) \pmod n)) = t$$

이므로, f와 g가 서로 역함수 관계에 있고 따라서 T_n에 들어있는 원소들의 개수는 Φ_n에 들어있는 원소들의 개수, 즉

0부터 n까지의 정수들 중에서 n과 서로 소인 원소들의 개수

와 같게 된다.