

한양대학교 2011학년도 신입학전형 수시 2차

자 연 계

논 술

오 전

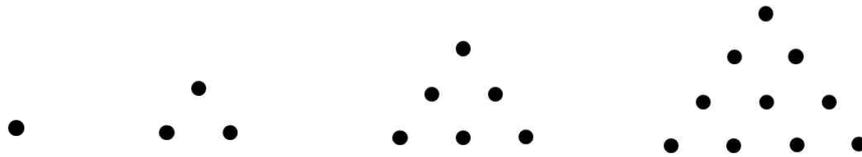
수험번호 () 응시번호 () 성명 ()

수험생 유의사항

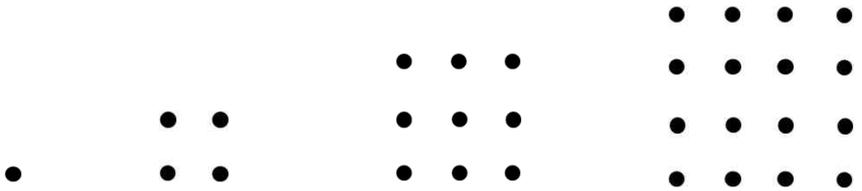
- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. 120분 안에 [논술 1]과 [논술 2]의 답안을 작성하시오. 2. 수정 시 검정 볼펜으로 줄을 긋고 다시 쓰시오. 3. 답안지와 문제지를 함께 제출하시오. | <ol style="list-style-type: none"> 4. 다음 경우는 0점 처리됩니다. <ol style="list-style-type: none"> 1) 답안을 검정 볼펜으로 작성하지 않은 경우 2) 자신의 신원을 드러내는 표기나 표현을 한 경우 3) 수정액이나 수정테이프를 사용한 경우 4) 답안을 해당 답란에 작성하지 않은 경우 |
|--|--|

[논술 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

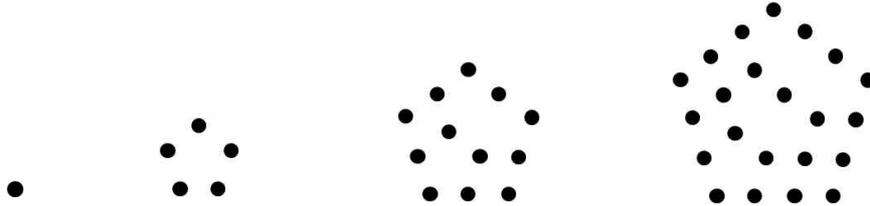
<가> 고대 그리스 시대의 피타고라스학파는 우주 만물이 수로 이루어져 있다고 믿었다. 그래서 도형을 이용하여 숫자를 표현하고 수와 도형의 관계를 연구하였다. 이렇게 하여 도형으로 묘사된 자연수를 형상수라고 한다. 여러 형상수에는 각각 일정한 규칙이 숨어 있는데 이것을 찾는 과정에서 여러 가지 수학적 사고를 할 수 있다. 삼각수는 다음 그림과 같이 삼각형으로 배열된 점의 개수로 1, 3, 6, 10, ... 으로 나타난다.



사각수는 다음 그림과 같이 사각형으로 배열된 점의 개수로 1, 4, 9, 16, ... 으로 나타난다.



오각수는 다음 그림과 같이 오각형으로 배열된 점의 개수로 1, 5, 12, 22, ... 으로 나타난다.



<나> 용규는 수업 시간에 형상수에 대해 공부한 후 “삼각수이면서 동시에 사각수인 수는 어떤 것들이 있을까?”란 문제를 생각하고 다음과 같은 사실을 알게 되었다. m 번째 삼각수는 $\frac{m(m+1)}{2}$ 이고 n 번째 사각수는 n^2 이므로, 이 문제는

$\frac{m(m+1)}{2} = n^2$ 인 자연수 m 과 n 을 찾는 문제와 같다. 이 등식의 양변에 2 를 곱한 후 정리하면 $(2m+1)^2 - 2(2n)^2 = 1$ 이 되므로 이 문제는 쌍곡선의 방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$ 을 만족하는 자연수 x 와 y 를 찾는 문제로 바뀌게 된다.

<다> 제시문 <나>에 정의된 쌍곡선 위의 자연수 점 $(x, y) = (3, 2)$ 로부터, 무리수 $2\sqrt{2}$ 를 사용하여 $3 - 2 \cdot 2^2 = 1$ 을 인수분해하면 $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$ 을 얻는다. 이 식의 양변을 제곱하면, $(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2}) = 1$ 을 얻게 되고 이를 전개하여 얻는 쌍곡선 위의 자연수 점 $(x, y) = (17, 12)$ 로부터 8번째 삼각수인 36이 6번째 사각수와 같게 됨을 알 수 있다. 비슷한 방식으로 $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1$ 양변을 여러 번 거듭제곱하여 위의 방법을 적용하면, 삼각수이면서 동시에 사각수인 수가 무수히 많음을 알 수 있다.

1. 제시문 <가>에 주어진 그림을 참고하여 오각수들로 이루어진 수열의 일반항을 구하시오.
2. 제시문 <나>를 사용하여 사각수이면서 동시에 오각수인 수들을 찾기 위하여 필요한 쌍곡선을 구하시오.
3. 제시문 <다>를 사용하여 사각수이면서 동시에 오각수인 수들은 1 이외에 어떤 것이 있으며 그것들이 무수히 많은 지에 관하여 논하시오.

[논술 2] 다음 제시문을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 물음에 답하시오. (50점)

양의 실수 집합을 $\mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$ 로 표시하고,
함수 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 는 모든 양의 실수 s, t 에 대하여
$$f(sf(t)) = tf(s)$$

을 만족한다.

- 어떤 양의 실수 a, b 에 대하여 $f(a) = a, f(b) = b$ 일 때, $f(ab)$ 를 구하시오.
- $1 \in \{f(x) | x \in \mathbb{R}^+\}$ 과 $f(1) = 1$ 임을 설명하시오.
- 만약 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이면 함수 $f(x)$ 가 단 하나만 존재함을 밝히고 그 함수를 구하시오.