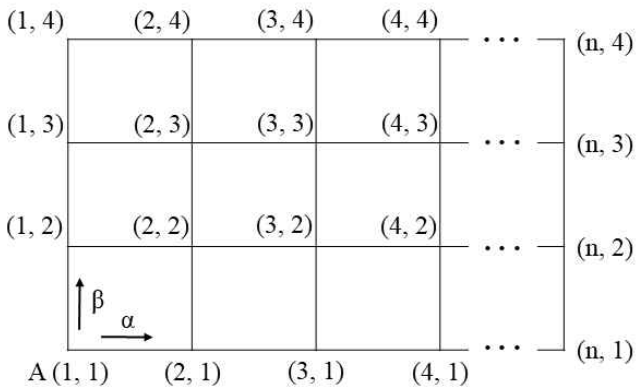
[공학계열(항우기,재료) 1번]

문항 및 제시문

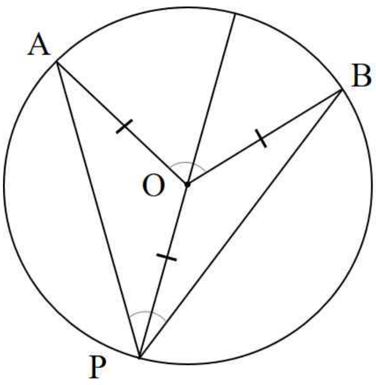
가) 반복할 수 있는 실험이나 관찰의 결과로 나타난 것을 사건이라 하고, 어떤 사건이 일어나는 가짓수를 경우의 수라고 한다. n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, s개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots s!}$ $(p+q+\cdots+s=n)$이고, 서로 다른 n개에서 중복 없이 r개를 택하는 조합의 수는 $\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(0 \le r \le n)$이다. <그림 1-1>과 같이 좌표평면 위에서, 점 $A(1,1)$에서 점 $(2,3)$까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1 개의 α와 2 개의 β를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같으며, 최단 경로의 수는 $\dfrac{3!}{1!2!}=3$이다. (오른쪽으로 한 칸 가는 것을 α, 위로 한 칸 가는 것을 β로 나타낸다). 점 A에서 임의의 점 $(n,2)$에 도달하는 최단 경로의 수를 a_n, 점 A에서 임의의 점 $(n,3)$에 도달하는 최단 경로의 수를 b_n, 점 A에서 임의의 점 $(n,4)$에 도달하는 최단 경로의 수를 c_n이라고 정의한다.



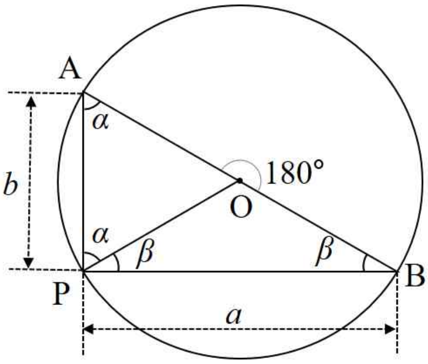
<그림 1-1>

나) <그림 1-2>에서 원주 위의 한 점 P와 호 AB의 양 끝점을 이은 선분이 이루는 각은 원주각이고, 원의 중심인 O와 호 AB의 양 끝점을 이은 선분이 이루는 각은 중심각이다. 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각 크기의 반이다. <그림 1-3>과 같이 삼각형의 선분 AB가 원의 지름인 경우에 호 AB에 대한 중심각 AOB의 크기는 180°이고 원주각 APB의 크기는 90°이다.

즉, $\alpha+\beta=90^\circ$이고, $\tan\beta=\dfrac{b}{a}$이다. 한편, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 이다.



<그림 1-2>



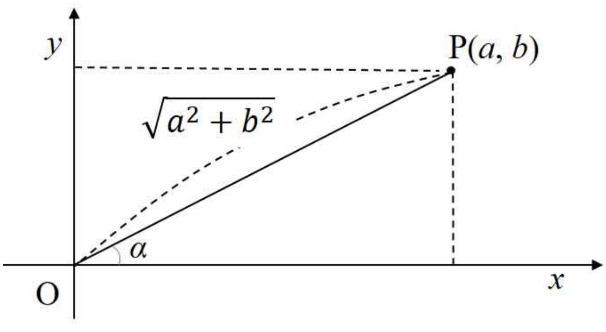
<그림 1-3>

다) <그림 1-4>와 같이 좌표평면 위에 점 $P(a,b)$를 잡으면 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각 α에 대하여 $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이다.

따라서 $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sin\theta + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cos\theta\right)$

$$= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\,sin(\theta+\alpha)$$

이다. 이와 같이 $a\sin\theta + b\cos\theta\,(a \neq 0, b \neq 0)$를 $r\sin(\theta+\alpha)\,(r>0, 0 \le \alpha < 2\pi)$의 꼴로 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다.



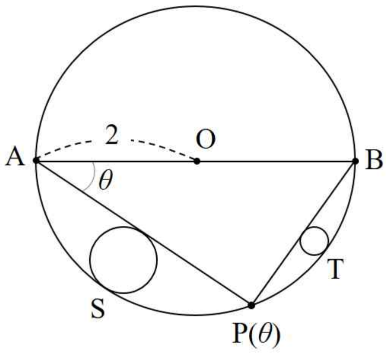
<그림 1-4>

[문제 1-1] 제시문 가)의 a_n, b_n, c_n을 구하고, $\lim_{n \to INF} \dfrac{c_n}{a_n b_n}$의 값을 구하시오.

[문제 1-2] 세 개의 부등식 $x+y \le 5$, $x \ge 0$, $y \ge 0$을 동시에 만족하는 정수 x, y가 있다. 좌표평면에서 이를 만족하는 순서쌍 (x,y)가 나타내는 점들 중에서 세 점을 선택하여, 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만든다. 이때 $(0,0)$을 한 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.

[문제 1-3] 아래 <그림 1-5>와 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 임의의 점을 $P(\theta)$라 한다. 선분 AP의 중점 M에서 호 AP에 접하는 원을 S, 선분 BP의 중점 N에서 호 BP에 접하는 원을 T라고 할

때, 원 S와 원 T 넓이의 합 $f(\theta)$를 구하시오. 또한 $f(\theta)$의 최댓값과 최솟값을 구하고 이때의 θ값도 구하시오. (단, $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$)



<그림 1-5>

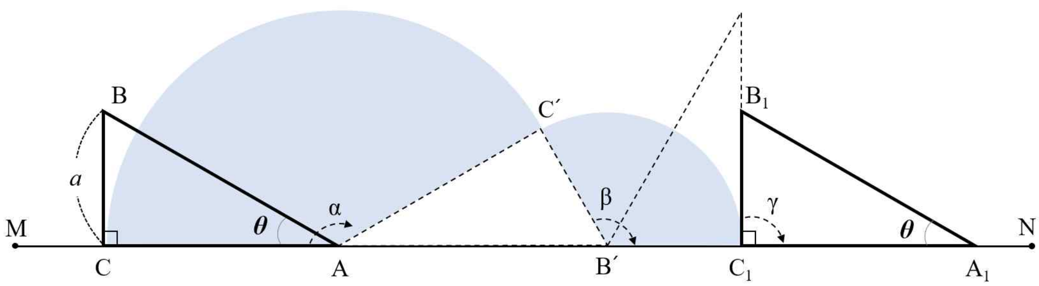
[문제 1-4] 원 $(x-3)^2+y^2=1$을 S, 원 $(x-5)^2+y^2=1$을 T라고 한다. 원점 $O(0,0)$을 지나고 원 T의 제1사분면에서 접하는 직선의 방정식이 원 S와 만나는 교점을 각각 A와 B라고 한다. 이때, 원 S의 중심과 교점 A, B를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.

[문제 1-5] 좌표평면에서 중심이 $P(x,y)$이고 반지름이 1인 원이 함수

$$f(x)=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})\right| \ (0 \le x \le 2\sqrt{3})$$

의 그래프에 항상 접하면서 이동한다. $P(x,y)$ 는 항상 제1사분면에 있다. 이때, 원점 $O(0,0)$에서 원의 중심 $P(x,y)$까지 거리의 최솟값을 구하시오.

[문제 1-6] 아래 <그림 1-6>과 같이 삼각형 ABC 가 선분 MN 위를 굴러서 삼각형 $A_1B_1C_1$ 로 이동한다. 이동 중에 꼭짓점 A, B, C 는 각각 호를 그리면서 여러 가지 부채꼴을 만든다. 예를 들어 꼭짓점 C 는 호 CC' 를 그리며 부채꼴 ACC' 를 만들고 호 $C'C_1$을 그리며 부채꼴 $B'C'C_1$ 을 만든다. 이때 만들어진 모든 부채꼴의 넓이의 합은 $S_C(\theta)$ 이다. 같은 방법으로 꼭짓점 A와 B가 만드는 부채꼴의 넓이의 합은 각각 $S_A(\theta)$ 와 $S_B(\theta)$ 이다. $S_A(\theta)$, $S_B(\theta)$, $S_C(\theta)$를 구하고, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \{S_A(\theta)+S_B(\theta)+S_C(\theta)\}$ 를 구하시오. (단, $\overline{BC}=a$)



<그림 1-6>

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있는가?	4
	극한값을 구할 수 있는가?	2
1-2	여러 가지 부등식을 이해하고, 이를 공통으로 만족하는 영역을 나타낼 수 있는가?	2
	조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있는가?	6
1-3	좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 나타낼 수 있는가?	4
	삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?	6
1-4	좌표평면에서 원의 접선의 방정식 및 삼각함수를 이용할 수 있는가?	5
	점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?	3
1-5	여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있는가?	4
	좌표평면에서 원의 중심과 직선의 사이의 거리의 최솟값을 구할 수 있는가?	4
1-6	일반각의 뜻을 알고, 주어진 각의 일반각을 구하며, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있는가?	5
	삼각함수의 덧셈정리를 이해하고, 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?	5

예시 답안

[문제 1-1]

n개 가운데 서로 같은 것이 각각 $p, q, \cdots, s$개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots s!}\,(p+q+\cdots+s=n)$이다.

$a_1=\dfrac{1!}{1!0!}=1,\ a_2=\dfrac{2!}{1!1!}=2,\ a_3=\dfrac{3!}{2!1!}=3,\ a_4=\dfrac{4!}{3!1!}=4,\ \ldots$

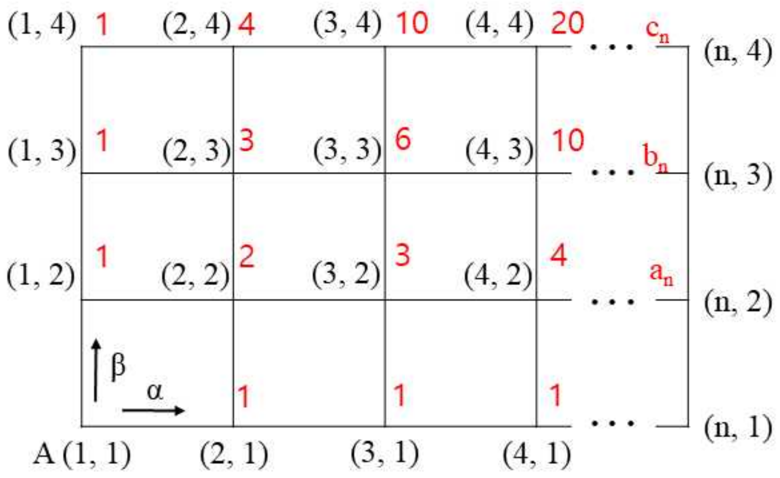
$a_n=\dfrac{n!}{(n-1)!1!}=n$

$b_1=\dfrac{2!}{2!0!}=1,\ b_2=\dfrac{3!}{2!1!}=3,\ b_3=\dfrac{4!}{2!2!}=6,\ b_4=\dfrac{5!}{2!3!}=10,\ \ldots$

$b_n=\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$c_1=\dfrac{3!}{3!0!}=1,\ c_2=\dfrac{4!}{3!1!}=4,\ c_3=\dfrac{5!}{3!2!}=10,\ c_4=\dfrac{6!}{3!3!}=20,\ \ldots$

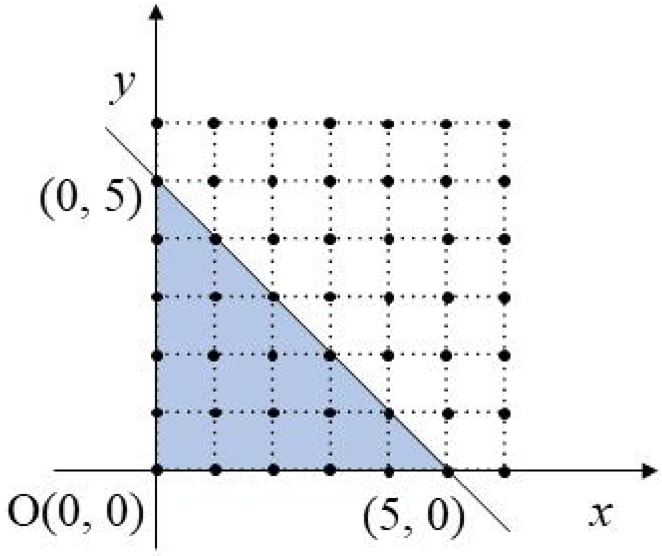
$c_n=\dfrac{(n+2)!}{3!(n-1)!}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$



$$\lim_{n\to INF}\frac{c_n}{a_nb_n}=\lim_{n\to INF}\frac{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}}{n\dfrac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to INF}\frac{2n(n+1)(n+2)}{6n^2(n+1)}=\frac{1}{3}$$

[문제 1-2]

세 개의 부등식 $x+y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 을 동시에 만족하는 정수 x, y 에서 이를 만족하는 순서쌍 (x, y) 이 나타내는 점의 개수는 21이다.



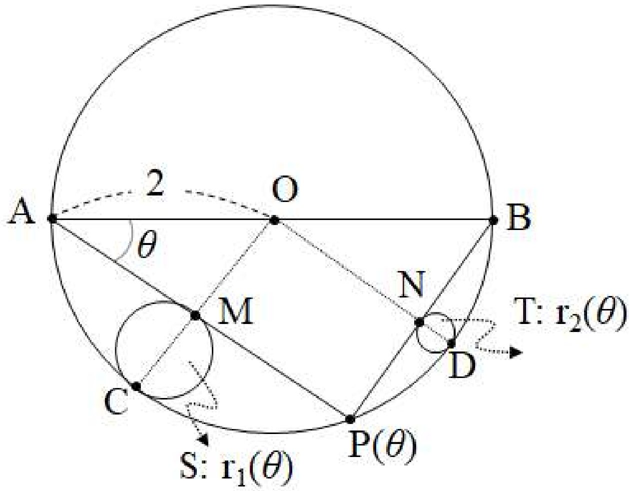
21개의 순서쌍 (x, y) 이 나타내는 세 점을 선택하여, $(0, 0)$을 반드시 포함하여 세 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{20}C_2 = \frac{{}_{20}P_2}{2!} = \frac{20!}{2!18!} = 190$ 이다.

선택된 190개 중에서, $(0, 0)$을 포함하여 3개의 순서쌍이 나타내는 점들이 삼각형을 이루지 못하는 경우의 수를 제외한다. $(0, 0)$을 제외한 나머지 2개의 순서쌍이 모두 x 축 위에 존재할 경우의 수는 ${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ 이다. 같은 방법으로 $(0, 0)$을 제외한 나머지 2개의 순서쌍이 y 축 위에 존재할 경우의 수는 ${}_5C_2 = \frac{{}_5P_2}{2!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ 이다.

마지막으로, $(0, 0)$을 제외한 나머지 2개의 순서쌍이 함수 $y = x$ 위에 존재할 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{{}_2P_2}{2!} = \frac{2!}{2!0!} = 1\ (0! = 1)$ 이다.

따라서 답은 ${}_{20}C_2 - ({}_5C_2 + {}_5C_2 + 1) = 169$

[문제 1-3]
점 O에서 M을 지나는 선분은 원 S의 중심을 지나고, 점 O에서 N을 지나는 선분은 원 T의 중심을 지나게 된다.



$\overline{CM} = 2r_1$, $\overline{ND} = 2r_2$

삼각함수 정의에 따르면, $\overline{OM} = 2\sin\theta$, $\overline{ON} = 2\cos\theta$

$\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{CM}$, $\overline{OD} = \overline{ON} + \overline{ND}$, $\overline{OC} = \overline{OD} = 2$

$2 = 2\sin\theta + 2r_1 = 2\cos\theta + 2r_2$

$r_1 = 1 - \sin\theta, r_2 = 1 - \cos\theta$

θ 변화에 따른 원 S의 넓이는 $\pi(1-\sin\theta)^2$ 이고 원 T의 넓이는 $\pi(1-\cos\theta)^2$

θ 변화에 따른 원 S와 T의 넓이의 합을 $f(\theta)$ 하면,

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \pi(1-\sin\theta)^2 + \pi(1-\cos\theta)^2 \\
&= \pi(1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \\
&= 3\pi - 2\pi(\sin\theta + \cos\theta) = 3\pi - 2\sqrt{2}\pi\sin(\theta + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

한편, $a\sin\theta + b\cos\theta\,(a \neq 0, b \neq 0)$는 삼각함수의 합성을 통해서 $r\sin(\theta+\alpha)(r > 0, 0 \le \alpha < 2\pi)$ 의 꼴로 표현될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\sin\theta + \cos\theta &= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}cos\theta) \\
&= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}sin\theta + \sin\frac{\pi}{4}cos\theta) \\
&= \sqrt{2}\,sin(\theta + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ 구간에서 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\,sin(\theta + \frac{\pi}{4})$의 최댓값과 최솟값은

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\sqrt{2}\,sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$, 최댓값 $\sqrt{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ 일 때, $\sqrt{2}\,sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$, 최솟값$(\frac{1+\sqrt{3}}{2})$

$*\ \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$

$* \ \sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

정리하면, $\frac{(1+\sqrt{3})}{2}\leq \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\,sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq\sqrt{2}$

따라서,

$f(\theta)=3\pi-2\pi(\sin\theta+\cos\theta)$ 의 최댓값은 $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$ 일 때, $3\pi-(1+\sqrt{3})\pi$이고,

최솟값은 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $3\pi-2\sqrt{2}\pi$ 이다.

$3\pi-2\sqrt{2}\pi\leq f(\theta)=3\pi-2\pi(\sin\theta+\cos\theta)\leq 3\pi-(1+\sqrt{3})\pi=2\pi-\sqrt{3}\pi$

$3\pi-2\sqrt{2}\pi\leq f(\theta)=3\pi-2\sqrt{2}\pi\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leq 3\pi-(1+\sqrt{3})\pi=2\pi-\sqrt{3}\pi$

[문제 1-4]

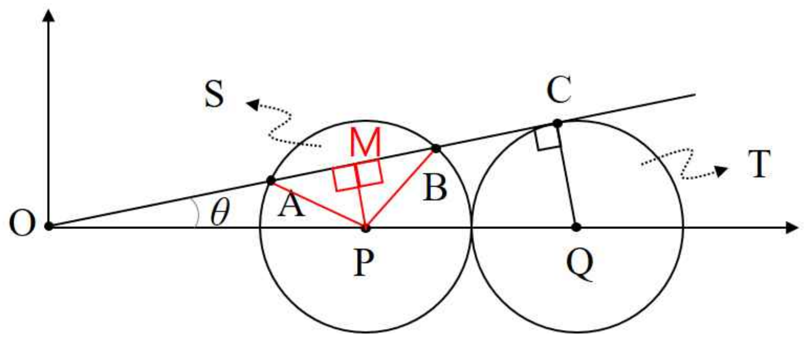
그림과 같이 삼각형 OMP는 삼각형 OCQ와 닮음이다.

$$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PM}:\overline{QC}, 3:5=\overline{PM}:1, \overline{PM}=\frac{3}{5}$$

피타고라스의 정리를 이용하여

$$\overline{MA}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}, \overline{MB}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}, \overline{AB}=\frac{8}{5}$$

삼각형 PAB의 넓이는 $\overline{AB}\times\overline{MP}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{12}{25}$



다른 풀이:

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{24}}$, 원점O와 점C를 지나는 직선의 방정식은 $y=\tan\theta x=\frac{1}{\sqrt{24}}x$

$\overline{PM}$는 직선 $x-\sqrt{24}y=0$ 와 점 $P(3,0)$과의 거리이다.

$$\overline{PM}=\frac{|3|}{\sqrt{1+24}}=\frac{3}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$$

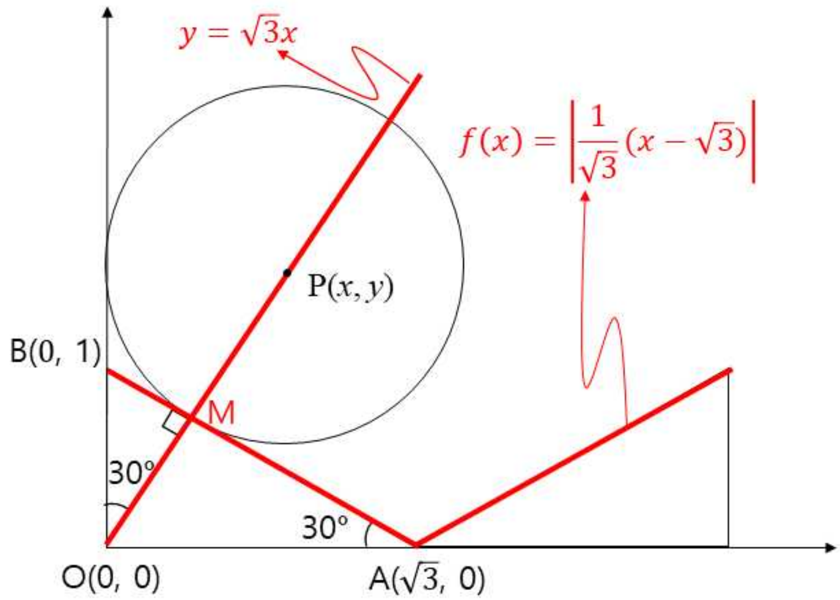
피타고라스의 정리를 이용하면,

$$\overline{MA}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}, \overline{MB}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}, \overline{AB}=\frac{8}{5}$$

삼각형 PAB의 넓이는 $\overline{AB}\times\overline{PM}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{12}{25}$

[문제 1-5]

$f(x)=|\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})|$ 는 아래 그림과 같다.

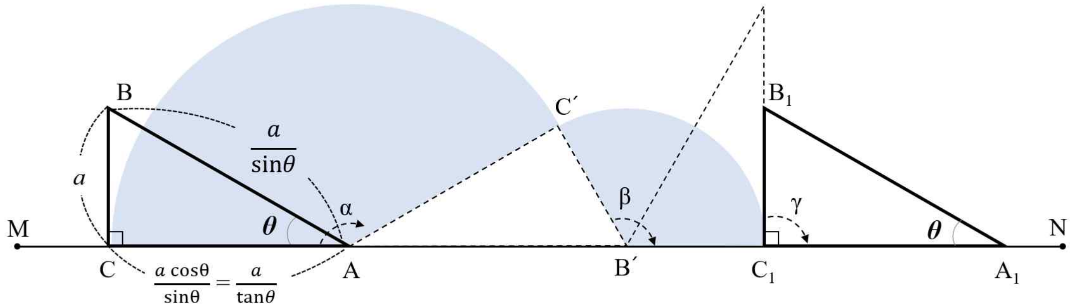


중심이 $P(x,y)$ 이고, 반지름이 1인 원이 함수 $f(x)$위를 접하면서 위 그림과 같이 평행이동한다. 이때 원의 중심이 $\overline{AB}$에 수직인 $y=\sqrt{3}\,x$ 선상에 위치할 때, 원의 중심과 원점 사이의 거리는 최솟값을 가진다.

따라서 원점 $(0,0)$ 과 $P(x,y)$ 의 최솟값은 $\overline{OM}+\overline{MP}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

[문제 1-6]

$$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$$



꼭짓점 C, B, A 가 호를 그리면서 이루는 부채꼴의 면적은 각각 $S_C(\theta), S_B(\theta), S_A(\theta)$ 이다.

$$S_C(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tan\theta}\right)^2(\pi-\theta)+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$S_B(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2(\pi-\theta)+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_A(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\tan\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(\theta)=S_C(\theta)+S_B(\theta)+S_A(\theta)$$

한편, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=0$, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2=1$ 이다.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}f(\theta)=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\pi a^2$$

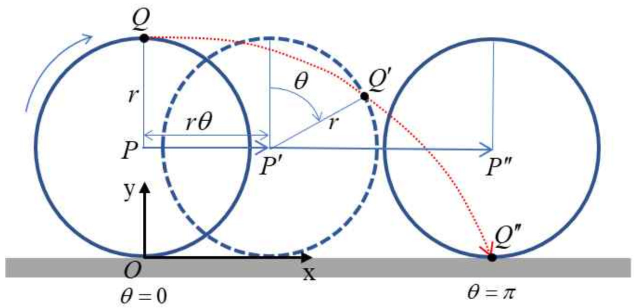
문항 및 제시문

가) 바퀴 또는 원판은 다양한 공학설계 문제에서 광범위하게 응용되고 있다. 따라서 바퀴의 평면운동에 대한 수학적 이해는 올바른 설계를 위해서 매우 중요하다. <그림 2-1>에서 반지름이 r인 바퀴가 지면 위에서 직선을 따라 미끄러지지 않고 ω의 일정한 비율로 회전하면서 굴러간다. 임의 시간 t까지 선분 PQ가 $P'Q'$으로 회전한 각도는 $\theta=\omega t$ 와 같다. 바퀴 중심이 이동한 거리 PP'는 원호의 길이 $r\theta=r\omega t$와 같으며, 바퀴 중심점의 속도는 수평 방향으로 $r\omega$이다. 그러나 바퀴 중심을 제외한 바퀴의 내부 또는 원주 위의 점들은 곡선 경로를 따라서 움직이기 때문에 시간에 따라 속도 및 가속도 값이 변화한다. 그림에서 바퀴가 반 바퀴 회전할 때, 점 Q는 $QQ'Q''$의 경로를 따른다.

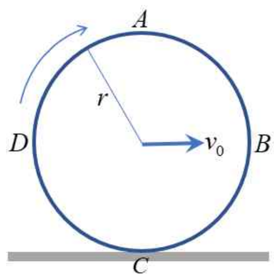
나) 바퀴가 회전하면서 굴러갈 때, 바퀴 상단부의 점들은 하단부의 점들보다 더 빠른 속도를 갖는다. <그림 2-2>에서 A, B, C, D는 각각 바퀴의 최고, 오른쪽 끝, 최저(바닥 접점), 왼쪽 끝의 위치를 나타낸다. v_o는 바퀴 중심의 속도이다. <그림 2-1>에 주어진 좌표평면에 대하여 임의 시각에서 점 Q'의 좌표가 주어지면, 이를 미분하여 속도와 가속도 식을 유도할 수 있다. 유도한 점 Q'의 속도와 가속도 식에서 $\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$에 해당되는 값을 구하면, 점 Q가 A, B, C, D 각 위치에 도달했을 때의 속도와 가속도를 구할 수 있다.

다) 삼각함수의 덧셈 정리를 이용하면 다양한 삼각함수 공식들을 유도할 수 있다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$



<그림 2-1>



<그림 2-2>

[문제 2-1] <그림 2-1>에서 바퀴가 $\theta=0$에서 굴러가기 시작한다.
1) 그림에 표시된 좌표평면에 대하여 임의 시각 t에서의 점 Q'의 좌표, 속도, 가속도를 구하시오.
2) 바퀴의 반지름이 $1\,m$이고 중심점의 속도는 $1\,m/\sec$이다. 바퀴가 $\frac{\pi}{3}$ 회전한 시각에 Q점이 갖는 속도의 크기와 가속도의 크기를 구하시오.

[문제 2-2] <그림 2-2>에서 반지름이 $1\,m$인 바퀴가 일정한 중심점 속도 $1\,m/\sec$로 굴러간다.
1) A, B, C, D 각 위치에서 발생하는 속도와 가속도를 구하고, 각각의 크기들을 계산하시오.
2) A, B, C, D 각 위치를 벡터의 시점으로 하는 각각의 속도 벡터와 가속도 벡터를 그리시오.
(<그림 2-2>의 바퀴를 답안지에 그린 후 그 위에 벡터들을 표시할 것.)

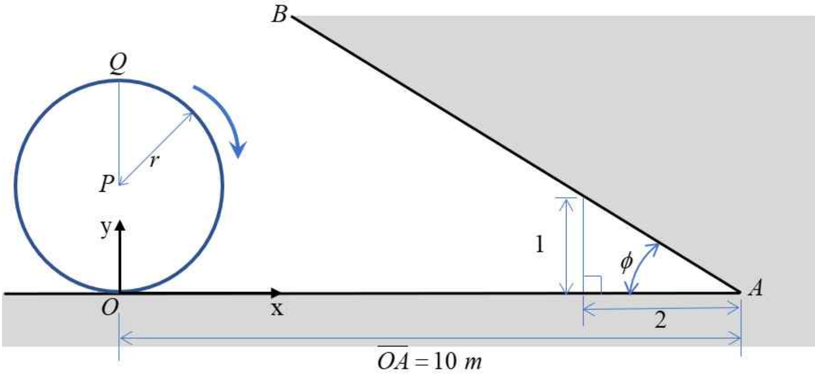
[문제 2-3] <그림 2-1>에서 바퀴의 반지름은 $1\,m$이고 중심점은 $1\,m/\sec$의 일정한 속도를 갖는다. 바퀴가 반

바퀴 회전하는 동안 점 Q가 지나가는 곡선 경로의 길이를 구하시오.

[문제 2-4] <그림 2-3>에서 바퀴가 좌표평면의 원점 O에서 출발하여 직선을 따라 오른쪽으로 굴러간다. 바퀴의 반지름은 $1\,m$이고 중심점의 속도는 $1\,m/\sec$이다. 원점 O에서 수평으로 $\overline{OA}=10\,m$ 떨어진 지점에 기울어진 벽의 직선 AB가 있다.

1) 바퀴가 굴러가다가 직선 AB와 접하여 멈출 때까지 바퀴 중심점이 이동한 거리를 구하시오.

2) 바퀴가 직선 AB와 접할 때, 점 A, 바퀴와 바닥의 접점, 바퀴의 중심점이 삼각형을 이룬다. 이 삼각형과 1)번의 결과를 이용하여 $\tan\phi$ 값을 구하고, 그림에 표시된 직선 AB의 기울기와 같음을 보이시오.



<그림 2-3>

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	제시문의 Q점에 대한 좌표를 바퀴의 회전각 또는 시간의 함수로 구한다.	2
	위치좌표를 시간에 대하여 미분하여 속도벡터 성분을 구한다.	2
	속도벡터 성분을 시간에 대하여 미분하여 가속도벡터 성분을 구한다.	2
	회전각 60도에 대한 속도 및 가속도 벡터의 성분을 구한 후에 각각의 크기를 계산한다.	4
2-2	제시문에서 주어진 A, B, C, D 네 점에 대한 속도 성분 및 각각의 크기를 계산한다.	5
	제시문에서 주어진 A, B, C, D 네 점에 대한 가속도 성분 및 각각의 크기를 계산한다.	5
	답안지에 원을 그리고 A, B, C, D 네 점의 속도 및 가속도 벡터를 표시한다.	5
2-3	곡선의 길이를 구하는 적분식을 유도하고(또는 공식 적용) 속도벡터 성분을 대입하여 삼각함수 적분식으로 정리한다.	8
	제시문의 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$의 관계를 유도한다.	3
	위 식을 적분식에 대입하고 정적분을 수행하여 답을 구한다.	4
2-4	점과 직선 사이의 거리 공식 또는 원에 접하는 직선의 방정식을 이용하여 원이 이동한 거리를 계산한다.	5
	위에서 계산한 원의 이동거리, 삼각형에 대한 탄젠트 값, 제시문의 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 $\tan\phi = \dfrac{1}{2}$ 임을 보인다.	5

예시 답안

[문제 2-1]

1) Q'점 좌표, 속도, 가속도 일반식 구하기

1단계) <그림 2-1>에서 Q'점의 좌표 (2점)

$$(x(t),y(t))=(r(\omega t+\sin\omega t),r(1+\cos\omega t))$$

또는 $(x(t),y(t))=(r(\theta+\sin\theta),r(1+\cos\theta))$

2단계) 좌표를 시간에 대하여 미분한 Q'점의 속도 (2점)

$$(v_x(t),v_y(t))=(r\omega(1+\cos\omega t),-r\omega\sin\omega t))$$

또는 $(v_x(t),v_y(t))=(r\omega(1+\cos\theta),-r\omega\sin\theta))$

3단계) 속도를 시간에 대하여 미분한 Q'점의 가속도 (2점)

$$(a_x(t),a_y(t))=(-r\omega^2\sin\omega t,-r\omega^2\cos\omega t)$$

또는 $(a_x(t),a_y(t))=(-r\omega^2\sin\theta,-r\omega^2\cos\theta)$

2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 회전했을 때 Q점의 속도, 가속도의 크기

4단계) $\theta=\omega t=\pi/3$일 때 속도, 가속도의 크기 (4점)

- $r=1m$, 바퀴중심 속도 $v_P=r\omega=1$이므로 $\omega=1$,
- 속도벡터 $(v_x,v_y)=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ →속도의 크기 $\left|\overrightarrow{v_Q}\right|=\sqrt{3}=1.73$ (2점)
- 가속도벡터 $(a_x,a_y)=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2})$ →가속도의 크기 $\left|\overrightarrow{a_Q}\right|=1$ (2점)

[문제 2-2]

1단계) A,B,C,D 속도 벡터의 크기 (5점)

- $\overrightarrow{v}_Q=(v_x,v_y)=(r\omega(1+\cos\theta),-r\omega\sin\theta))=(1+\cos\theta,-\sin\theta)$
- $r=1,\omega=1$을 미리 대입 또는 나중에 대입해도 됨.
- $\theta=\omega t$, $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$를 각각 대입하면

$$\overrightarrow{v_A}=(2r\omega,0)=(2,0),\ \overrightarrow{v_B}=(r\omega,-r\omega)=(1,-1),$$

$$\overrightarrow{v_C}=(0,0),\qquad \overrightarrow{v_D}=(r\omega,r\omega)=(1,1)$$

따라서 $\underline{\left|\overrightarrow{v_A}\right|=2, \left|\overrightarrow{v_B}\right|=\sqrt{2}, \left|\overrightarrow{v_C}\right|=0, \left|\overrightarrow{v_D}\right|=\sqrt{2}}$

2단계) A,B,C,D 가속도 벡터의 크기 (5점)

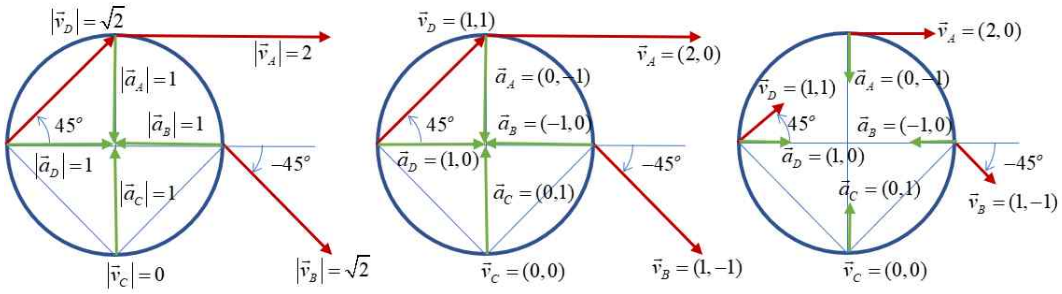
- $\overrightarrow{a_Q}=(a_x,a_y)=(-r\omega^2\sin\theta,-r\omega^2\cos\theta)=(-\sin\theta,-\cos\theta)$
- $r=1,\omega=1$을 미리 대입 또는 나중에 대입해도 됨.
- $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$를 각각 대입하면

$$\overrightarrow{a_A}=(0,-r\omega^2)=(0,-1),\ \overrightarrow{a_B}=(-r\omega^2,0)=(-1,0),$$
$$\overrightarrow{a_C}=(0,r\omega^2)=(0,1),\qquad \overrightarrow{a_D}=(r\omega^2,0)=(1,0)$$

따라서 $\left|\overrightarrow{a_A}\right|=1, \left|\overrightarrow{a_B}\right|=1, \left|\overrightarrow{a_C}\right|=1, \left|\overrightarrow{a_D}\right|=1$

3단계) 답안지에 A,B,C,D 속도 및 가속도 벡터 그리기 (5점)

- 아래 그림과 같이 각각의 벡터를 좌표성분 또는 크기와 방향으로 표시
- 벡터 길이가 정확하지 않아도 수치와 방향이 맞으면 정답 처리



[문제 2-3]

1단계) 곡선의 길이를 구하는 아래 적분식을 유도 (8점)

$$(v_x,v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=(r\omega(1+\cos\theta),-r\omega\sin\theta)$$

- $r=1,\omega=1,\theta=\omega t=t$ 이므로 $\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=(1+\cos t,-\sin t)$
- 곡선의 길이: $l=\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos t)}\,dt$ ①

2단계) 제시문의 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 아래 식을 유도 (3점)

- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 식에 $\alpha=\beta=\dfrac{t}{2}$를 대입하면

$$\cos t=\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}=2\cos^2\frac{t}{2}-1$$

따라서 $1+\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}$ ②

3단계) ②식을 ①식에 대입하여 적분 수행 (4점)

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt \;=\int_0^{\pi}2\cos\frac{t}{2}dt \;=\; 4$$

[문제 2-4]

1번) 바퀴중심 이동거리 (5점)

<방법 1> 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용

- 바퀴(원)의 중심점: $P(p,r)$
- 벽 AB의 직선의 방정식: $y=-\dfrac{1}{2}x+5 \quad \rightarrow \quad x+2y-10=0$
- 바퀴가 기울어진 벽에 접할 때 바퀴 중심과 직선 사이의 거리는 $d=r=1$
- 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용: $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- $(a,b,c)=(1,2,-10)$ 및 $(x_{1,}y_1)=(p,r)=(p,1)$을 대입하면

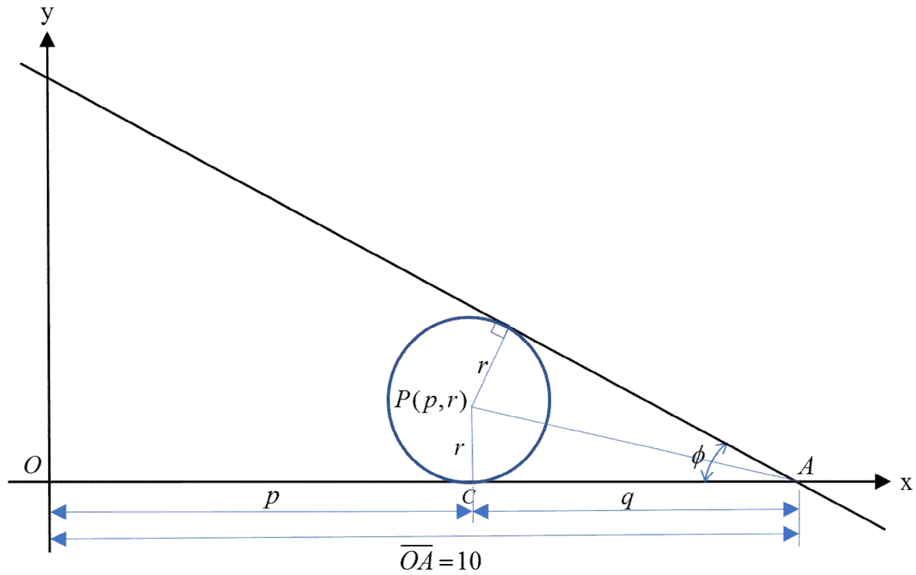
  $p=8+\sqrt{5}$ 또는 $p=8-\sqrt{5}$
- 바퀴 중심점이 이동한 거리는 10보다 작아야 하므로 답은 $p=8-\sqrt{5}$

<방법 2> 원에 접하는 직선의 방정식 이용

- 바퀴는 중심점 $P(p,r)=P(r\theta,r)$이 이동하는 원이다.
- <그림 2-1>에서 Q 점의 좌표는 $(x(t),y(t))=(r\theta+r\sin\theta,r+r\cos\theta))$

  따라서 $(x-r\theta)^2=r^2\sin^2\theta$, $(y-r)^2=r^2\cos^2\theta$
- 바퀴에 대한 원의 방정식: $(x-r\theta)^2+(y-r)^2=r^2 \rightarrow (x-\theta)^2+(y-1)^2=1$
- 벽 AB의 직선의 방정식: $y=mx+n=-\dfrac{1}{2}x+10$
- 직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하면, $(x-\theta)^2+(-\dfrac{1}{2}x+10-1)^2=1$
- 위 식을 2차 방정식 $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ 형태로 정리한 후, 직선이 원에 접하는 조건(즉, 2차 방정식의 근에 대한 판별식이 영)을 이용하면

  $D=\beta^2-4\alpha\gamma=0$에서 $\theta=8+\sqrt{5}$ 또는 $\theta=8-\sqrt{5}$
- 중심점이 이동한 거리 $p=r\theta=\theta$는 10보다 작아야 하므로 답은 $8-\sqrt{5}$



2번) $\tan\phi$ 값 구하기 (5점)

- 위 그림에서 $q=10-p=2+\sqrt{5}$,
- 삼각형 ACP에서 $\tan\frac{\phi}{2}=\frac{r}{q}=\frac{1}{2+\sqrt{5}}=-2+\sqrt{5}$
- 제시문의 탄젠트 함수에 대한 덧셈정리를 이용

  $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ 에서 $\alpha=\beta=\frac{\phi}{2}$이면

  $\tan\phi=\frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}=\frac{2(\sqrt{5}-2)}{1-(\sqrt{5}-2)^2}=\frac{1}{2}$ (<그림 2-3>의 $\tan\phi=\frac{1}{2}$과 일치)

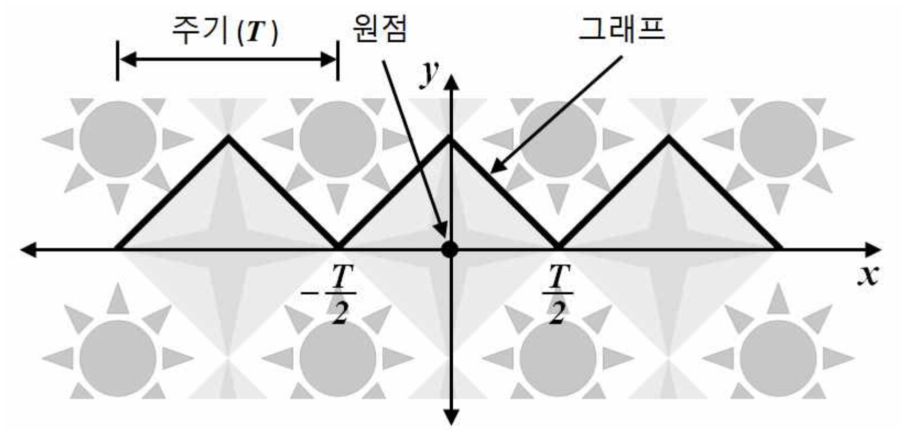
[공학계열(항전정) 1번]

문항 및 제시문

[제시문]

가) 기하학은 도형의 모양과 크기, 공간적 성질 등에 대해 연구하는 수학의 한 분야이며, 도형의 방정식 및 함수의 그래프와 관련이 깊다. 자연 현상 중에는 태양과 달의 움직임, 수면의 물결 모양 등과 같이 주기적인 것이 많이 있다. 이러한 주기적인 현상들을 적절한 함수에 대응시켜서 그래프로 나타내면 현상들에 대한 많은 정보를 얻고 활용할 수 있다. 따라서 여러 가지 중요한 함수들에 대해서 그래프의 개형을 올바르게 그릴 수 있는 능력은 자연과학 및 공학을 연구하는데 있어서 매우 중요하다.

나) 기하학은 예술과도 관계가 깊은데, 한 예로서 중세 시대의 이슬람 건축물과 공예품에서는 복잡한 기하학적 도형과 무늬의 장식을 쉽게 발견할 수 있다. 특히 다양한 직선 및 곡선 무늬가 규칙적으로 반복되는 특징이 있다. 예를 들어 아래 <그림 1-1>과 같이 문양 내에 마름모가 일정 주기를 갖고 반복적으로 배열되어 있는 것을 볼 수 있다.



<그림 1-1>

위 그림에서 마름모들의 윗변들을 이은 선을 어떤 함수 $f(x)$의 그래프라면, 이 함수는 주기함수라고 할 수 있으며, 함수 $f(x)$는 주기 $T\,(T>0)$에 대하여 아래 (식 1-1)의 관계를 만족한다.

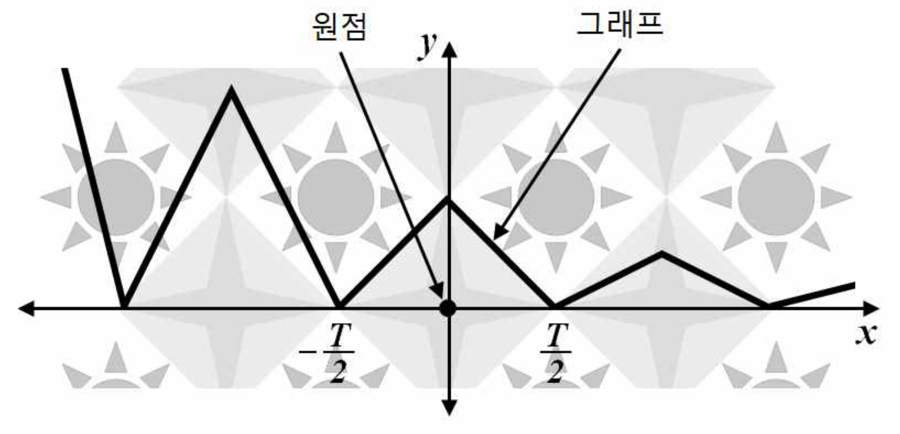
$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{(식 1-1)}$$

위 관계식에 의하면 x축 상의 어떤 지점의 함숫값이 정해지면, 그 지점에서 x축을 따라 T의 정수배만큼 이동한 모든 지점의 함숫값들도 동일한 값으로 정해진다. 따라서 x축 전 범위에 대해 $f(x)$의 그래프 개형을 그리려고 한다면, 한 주기의 그래프 개형을 그린 후 동일한 개형을 한 주기씩 이동시키면서 반복적으로 그리면 된다.

다) 아래 (식 1-2)는 위 (식 1-1)과 비슷하지만, 우변에 상수($k\neq 1, k\neq 0$)가 곱해져 있는 차이점이 있다.

$$g(x+T)=kg(x) \qquad \text{(식 1-2)}$$

위 관계식에 의하면 x축 상의 어떤 지점의 함숫값과 그 지점에서 T만큼 이동한 지점의 함숫값은 k배의 관계가 있다. 위 (식 1-2)를 만족하고 상수 k가 예를 들어 $\frac{1}{2}$ 인 함수의 그래프를 x축 전 범위에 대해 그리려고 한다면, 먼저 한 주기의 그래프 개형을 그린 후 이것을 양의 방향으로 한 주기씩 이동시키면서 그리되, 이동할 때마다 개형의 높이가 직전 개형 높이의 $\frac{1}{2}$ 배가 되도록 그리면 된다. 따라서 양의 방향으로 nT(n은 정수) 만큼 이동되어 그려지는 개형의 높이는 처음 개형 높이의 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 배가 된다. 한편 음의 방향으로 한 주기씩 이동시킬 때는 직전 개형 높이의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ 배가 되도록 그리면 된다. 따라서 어떤 함수 $g(x)$가 구간 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$에서 위 <그림 1-1>의 함수 $f(x)$ 의 그래프 개형과 같고, 상수 k가 $\frac{1}{2}$ 이면서 (식 1-2)의 관계를 만족하면, 함수 $g(x)$의 그래프 개형은 아래 <그림 1-2>처럼 그려진다.



<그림 1-2>

한편 (식 1-2)의 우변에 있는 상수가 음수라면 한 주기의 그래프 개형이 주기의 홀수 배만큼 이동될 때 그래프 상의 점들의 y값 부호가 바뀌는 것도 그래프를 그릴 때 고려해야 한다.

라) 복잡한 상황을 간단명료하게 표현하는 것도 수학의 기능 중 하나이다.

$$2^{1\times2} - 2^{2\times3} + 2^{3\times4} - 2^{4\times5} + 2^{5\times6} - 2^{6\times7} + \cdots + 2^{99\times100} - 2^{100\times101}$$

예를 들어 위의 식은 길고 복잡하지만 각 항들 사이에 일정한 규칙이 나타나는 경우이다. 이런 경우 각 항의 순서를 자연수 n에 대응시키고, n을 활용하여 n번째 항을 표현할 수 있는데, 이를 일반항이라 부른다. 이 일반항과 함께 합을 뜻하는 $\sum$ 기호를 사용하면, 위의 덧셈식은 아래와 같이 짧게 표현된다.

$$\sum_{n=1}^{100}(-1)^{n+1}2^{n(n+1)} \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{50}2^{(2n-1)2n} - \sum_{n=1}^{50}2^{2n(2n+1)}$$

이와 같이 일반항과 $\sum$ 기호를 활용하면 원래의 덧셈식보다 간단명료하게 나타낼 수 있다.

[문제]

[문제 1-1] 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{cases} f(x) = -x^2+1 \quad (-1 \le x < 1) \\ f(x+2) = f(x) \end{cases}$$

직선 $y=ax\,(a>0)$와 $y=f(x)$의 그래프가 네 개의 교점을 가질 때, 직선의 기울기 a를 구하시오.

[문제 1-2] 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{cases} g(x) = -|x|+1 \quad (-1 \le x < 1) \\ g(x+2) = -\dfrac{1}{2}g(x) \end{cases}$$

구간 $[-1, 99]$에서 $y=g(x)$ 그래프와 $y=f(x)$ 그래프로 둘러싸인 도형의 면적을 b라 한다. b의 값을 정수부와 소수부로 나누었을 때 정수부의 값을 구하시오. ($f(x)$는 [문제 1-1]에서 주어진 함수임)

[문제 1-3] 모든 실수 x에 대하여 함수 $h(x)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{cases} h(x) = 2 \quad (0 \le x < 2) \\ h(x+2) = 2h(x) \end{cases}$$

$\displaystyle\int_{-1}^{99} g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$의 값을 구하시오. ($g(x)$는 [문제 1-2]에서 주어진 함수임)

[문제 1-4] $y=g(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ 그래프 위의 점들 중에서 $x>0$이고 $y=0$인 점들을 원점에서 가까운 순서대로 $P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots$ 이라 한다. ($g(x)$는 [문제 1-2]에서 주어진 함수임) 점 P_n을 시점으로 하고 이 그래프 위에 있으면서 미분이 되지 않는 점($y \neq 0$)을 종점으로 하는 벡터들 중에서, 벡터의 크기가 가장 작은 것을 $\overrightarrow{a_n}$, 그 다음으로 크기가 작은 것을 $\overrightarrow{b_n}$이라 한다. $\overrightarrow{a_n}$과 $\overrightarrow{b_n}$의 내적 $\overrightarrow{a_n} \bullet \overrightarrow{b_n}$의 값을 n으로 나타낸 후, 이를 이용하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\overrightarrow{a_n} \bullet \overrightarrow{b_n}\right)$의 값을 구하시오.

[문제 1-5] 모든 실수 x에 대하여 함수 $r(x)$가 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{cases} r(x) = x^3+\alpha x^2+\beta x \quad (0 \le x < 2) \\ r(x+2) = r(x)+6 \end{cases}$$

함수 $r(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 α와 상수 β의 값을 정한 후, 이를 이용하여 $r(2019)$를 구하시오.

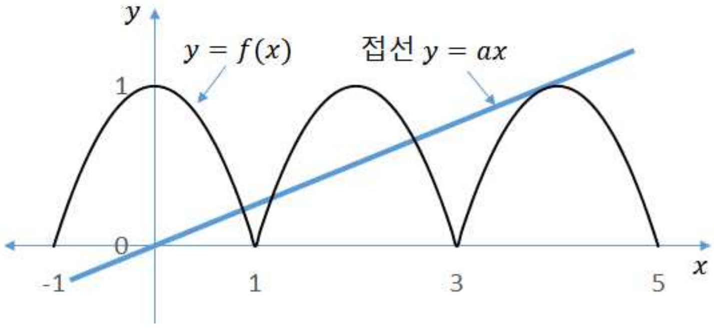
채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	문제의 조건에 부합하기 위한 그래프의 개형을 파악하였는가?	2
	직선과 곡선이 접하기 위한 조건들을 방정식으로 올바르게 표현하였는가?	5
	방정식의 해를 올바르게 구하였는가?	2
	2개의 해 중에서 문제의 답으로서 적당한 것을 올바르게 선택하였는가?	2
1-2	문제에 주어진 함수들의 그래프 개형을 파악하였는가?	2
	면적을 구하기 위해 반복되는 도형들의 규칙을 파악하였는가?	3
	파악된 규칙을 바탕으로 면적을 계산하기 위한 수식들이 모두 올바른가?	3
	모든 수식을 올바르게 계산하여 올바른 답을 구하였는가?	4
1-3	문제에 주어진 함수들의 그래프 개형을 파악하였는가?	2
	함수들의 곱으로 만들어진 새로운 함수의 그래프 개형을 파악하였는가?	3
	정적분을 수행하기 위한 수식을 올바르게 표현하였는가?	3
	올바른 계산을 통하여 올바른 답을 구하였는가?	2
1-4	함숫값이 0인 점들의 좌표를 올바르게 표현하였는가?	2
	미분이 되지 않는 점들의 좌표를 올바르게 표현하였는가?	3
	문제의 조건에 부합하는 두 벡터의 성분 표현이 올바른가?	3
	올바른 계산을 통하여 올바른 답을 구하였는가?	3
1-5	함수가 연속이 되기 위한 관계식을 방정식으로 올바르게 표현하였는가?	2
	함수가 미분이 되기 위한 관계식을 방정식으로 올바르게 표현하였는가?	3
	연립 방정식의 해를 올바르게 구하였는가?	3
	그래프 개형의 규칙성을 파악하고 이를 이용하여 올바른 답을 구하였는가?	3

예시 답안

[문제 1-1]

$y=f(x)$ 그래프의 개형과 $y=ax$의 그래프 개형을 그려 보면,



$y=f(x)$ 그래프와 $y=ax$의 그래프가 네 개의 교점을 갖기 위해, 구간 $[3,5)$에서 $y=ax$의 그래프가 $y=f(x)$ 그래프에 접해야 한다.

구간 $[3,5)$에서 $f(x)$는 $f(x)=-(x-4)^2+1=-x^2+8x-15$ 이고,

$f'(x)=-2x+8$ 이다.

따라서 $-x^2+8x-15=ax$ 이고, $-2x+8=a$ 여야 한다.

위의 두 관계식을 연립해서 x를 구한다. (또는 a에 관해 정리하여 a를 바로 구할 수도 있다.)

$-x^2+8x-15=x(-2x+8)$

$x^2=15,\ x=\pm\sqrt{15},\ 3\le x<5$이므로 $x=\sqrt{15}$이다.

따라서 $a=8-2\sqrt{15}$

[다른 풀이 방법]

$y=f(x)$ 그래프의 개형과 $y=ax$의 그래프 개형을 그려 보면,

$y=f(x)$ 그래프와 $y=ax$의 그래프가 네 개의 교점을 갖기 위해, 구간 $[3,5)$에서 $y=ax$의 그래프가 $y=f(x)$ 그래프에 접해야 한다.

구간 $[3,5)$에서 $f(x)$는 $f(x)=-(x-4)^2+1=-x^2+8x-15$ 이고,

$-x^2+8x-15=ax \rightarrow x^2+(a-8)x+15=0$, 이 2차방정식의 근이 중근이 되어야 한다.

따라서 근의 판별식이 0이 되어야 한다. 즉 $(a-8)^2-60=0 \rightarrow a^2-16a+4=0$

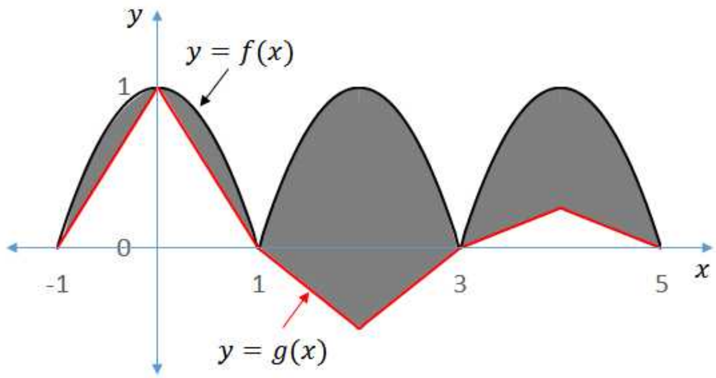
위에서 a를 구하면 $a=8\pm\sqrt{60}=8\pm2\sqrt{15}$이다.

구간 $[1,3)$에서 $y=f(x)$ 그래프의 극대점(좌표 (2, 1))을 지나는 직선은 $y=f(x)$와 교점이 3개이고 기울기가 0.5인데, 이 문제의 조건을 만족하는 직선의 기울기는 0.5보다는 더 작아야 한다.(←선택기준의 예) 따라서 $8+2\sqrt{15}$는 답이 될 수 없다.

따라서 $a=8-2\sqrt{15}$

[문제 1-2]

$y=f(x)$ 그래프의 개형과 $y=g(x)$의 그래프 개형을 그려 보면,



$x=-1$과 $x=99$ 사이에서 $y=f(x)$ 그래프와 x축으로 둘러싸인 면적을 A라 한다.
$y=g(x)$ 그래프와 x축으로 둘러싸인 면적 중 위로 향하는 삼각형들의 면적의 합은 첫째항이 1이고 공비가 1/4인 등비급수의 부분합으로 표현되며, 이를 B라 한다. $y=g(x)$ 그래프와 x축으로 둘러싸인 면적 중 아래로 향하는 삼각형들의 면적의 합은 첫째항이 1/2이고 공비가 1/4인 등비급수의 부분합으로 표현되며, 이를 C라 한다.

$$A=50\times\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = 50\times 2\times\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{200}{3}$$

$$B=\sum_{n=1}^{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1-(1/4)^{25}}{1-1/4}=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right)$$

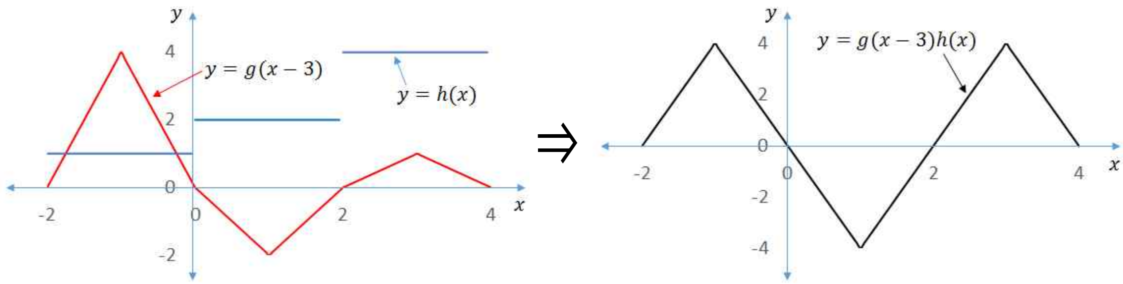
$$C=\sum_{n=1}^{25}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1-(1/4)^{25}}{1-1/4}=\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right)$$

구하려는 면적, $b=A-B+C=\frac{200}{3}-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right)=\frac{198}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}=66+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$은 0과 1사이의 값으로서 b의 소수부이다.
따라서 b의 정수부 값은 66이다.

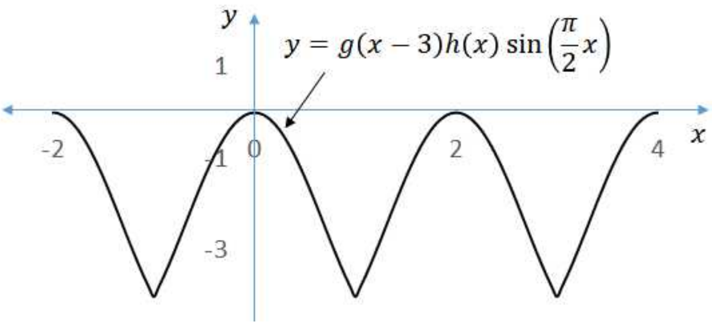
[문제 1-3]

$y=g(x-3)$, $y=h(x)$ 각각의 그래프 개형을 바탕으로 먼저 $y=g(x-3)h(x)$의 그래프 개형을 그리면 아래와 같다.



$y=g(x-3)h(x)$의 그래프 개형은 최댓값이 4이고, 최솟값이 −4이며, 주기가 4인 주기함수임을 알 수 있다.

$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$도 주기가 4이므로 위에서 얻어진 $y=g(x-3)h(x)$의 그래프 개형을 이용하여 $y=g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 그래프 개형을 그려 보면,



$y=g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$는 최댓값이 0이고, 최솟값이 −4이며, 주기가 2인 주기함수이다.

따라서, $y=g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$에 대한 $x=-1$부터 $x=99$까지의 정적분 값은 $x=-1$부터 $x=1$까지의 정적분 값을 구한 후 그 정적분 값에 50을 곱한 것과 같다.

$$\int_{-1}^{99} g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 50\times\int_{-1}^{1} g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

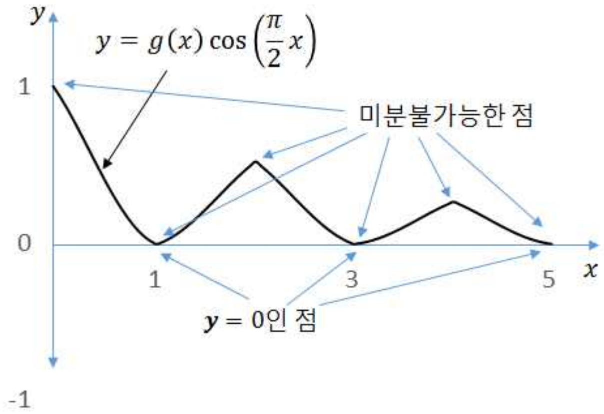
$$=50\times 2\times\int_{0}^{1} g(x-3)h(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = 100\times\int_{0}^{1}(-4x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=-400\times\left\{\left[-\frac{2}{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1+\int_0^1\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}=-400\times\left\{0+\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1\right\}$$

$$=-\frac{1600}{\pi^2}$$

[문제 1-4]

$x>0$에 대해 $y=g(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 그래프의 개형을 그려 보면,



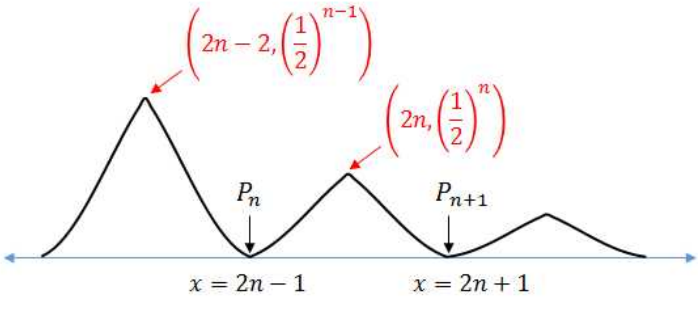
$y = g(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 그래프 위의 점들 중 $y=0$인 점들은 $g(x)=0$ 또는 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$가 0인 점들로서 $x=2n-1$ (n은 모든 양의 정수)일 때이다. 따라서 점 P_n의 좌표는 $(2n-1, 0)$ 이다.

$x=t$ (t는 임의의 양의 실수)인 임의의 점에서 $\lim_{x\to t+}\frac{dy}{dx} \neq \lim_{x\to t-}\frac{dy}{dx}$이면 이 점은 미분이 되지 않는 점이다.

$y=g(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$를 미분하면 $\frac{dy}{dx} = g'(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}g(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이다.

$\lim_{x\to t+}\frac{dy}{dx} \neq \lim_{x\to t-}\frac{dy}{dx}$인 점들은 $\lim_{x\to t+} g'(x) \neq \lim_{x\to t-} g'(x)$인 점들이다. 이러한 점들 중 $y \neq 0$인 점들은 그래프에서 위로 뾰족한 지점들로서 $x=2m$ (m은 모든 양의 정수)인 점들이다.

아래 그래프와 같이 $x=2n-1$인 점 P_n이 정해지면 점 P_n과 가장 가까운 $y \neq 0$이고 미분이 되지 않는 점의 좌표는 $\left(2n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$이고, 이 점과 점 P_n과의 거리는 $\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2}$ 이다.



그 다음으로 가까운 점의 좌표는 $|\Delta x|$는 동일하지만 $|\Delta y|$가 더 큰 점의 좌표인 $\left(2n-2, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$이고, 점 P_n과의 거리는 $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}$ 이다. 이 점들 외에 $|\Delta y|$는 앞선 두 점보다 더 작지만 $|\Delta x|$가 앞선 두 점보다 더 큰 점 $\left(2n+2, \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$은 점 P_n과의 거리가 $\sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}$ 로서 값이 앞선 두 점보다 더 크다는 것을 확인할 수 있다.(루트 안의 숫자로 비교할 때 소수부는 앞선 두 점의 값보다 더 작지만 정수부가

더 큼) 따라서 앞서 찾은 두 점을 이용하여 문제에서 묻고 있는 두 벡터 $\vec{a_n}$과 $\vec{b_n}$을 성분으로 나타내면

$\vec{a_n} = \left(1, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\vec{b_n} = \left(-1, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ 이다.

따라서 $\vec{a_n} \cdot \vec{b_n} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$ 이고,

$\lim_{n\to\infty} \vec{a_n} \cdot \vec{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) = -1$

[문제 1-5]

구간 $[0,2)$에서 $r(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x$이고,

구간 $[2,4)$에서 $r(x)$는 구간 $[0,2)$의 그래프를 x축으로 2만큼 y축으로 6만큼 이동한 그래프가 된다.

따라서, 구간 $[2,4)$에서 $r(x)=(x-2)^3+\alpha(x-2)^2+\beta(x-2)+6$이다.

$r(0)=0$이고, $r(2)=6$이다.

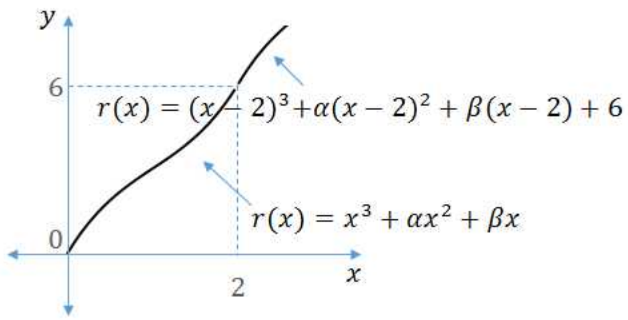
$x=2$에서 미분이 가능하도록 하여 α와 β의 값을 찾는다.

먼저 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$r(2)=6=\lim_{x\to 2-} r(x)=\lim_{x\to 2-}(x^3+\alpha x^2+\beta x)=8+4\alpha+2\beta$

$8+4\alpha+2\beta=6 \rightarrow 4\alpha+2\beta=-2$이다.

$r(x)$가 연속인 상태에서 $x=2$ 근처에서 $y=r(x)$ 그래프의 개형은 아래와 같다.



또, $x=2$에서 미분가능하려면 $\lim_{h\to 0-}\frac{r(2+h)-r(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{r(2+h)-r(2)}{h}$이어야 한다(식 (1)이라 함).

식 (1)의 좌변은 $(2,6)$을 지나는 다항함수 $x^3+\alpha x^2+\beta x$의 $x=2$에서 미분계수와도 같고,

$\frac{d}{dx}(x^3+\alpha x^2+\beta x)=3x^2+2\alpha x+\beta$이므로 여기에 $x=2$를 대입하면 $12+4\alpha+\beta$가 된다.

또, 식 (1)의 우변은 $(2,6)$을 지나는 다항함수 $(x-2)^3+\alpha(x-2)^2+\beta(x-2)+6$의 $x=2$에서 미분계수와도 같고,

$\frac{d}{dx}\{(x-2)^3+\alpha(x-2)^2+\beta(x-2)+6\}=3(x-2)^2+2\alpha(x-2)+\beta$이므로 여기에 $x=2$를 대입하면 β가 된다.

식 (1)의 좌변과 우변이 같으므로 $12+4\alpha+\beta=\beta \rightarrow \alpha=-3$이다.

$x=2$에서 연속조건인 $4\alpha+2\beta=-2$가 충족되려면 $\beta=5$ 이다.

위에서 찾은 α와 β에 의해 구간 $[0,2)$ 에서 $r(x)=x^3-3x^2+5x$이다.

한편 구간 $[0,2]$를 포함하는 구간 (x_0, x_1)에서 정의된 함수 x^3-3x^2+5x를 $R(x)$라고 하면 $R(x)$는 다음의 내용을 만족한다.

① $R(0)=0,\ R(2)=6$

② $R'(x)=3x^2-6x+5$이므로 $R'(0)=R'(2)=5$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$\begin{cases} r(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x = x^3 - 3x^2 + 5x \quad (0 \le x < 2) \\ r(x+2) = r(x) + 6 \end{cases}$$

로 정의된 $r(x)$는 구간과 구간 사이의 경계점($x = 2m$, m은 정수)을 포함하는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

따라서 $r(2019) = r(1+2018) = r(1+2\times 1009) = r(1) + 6\times 1009 = 3 + 6054 = 6057$

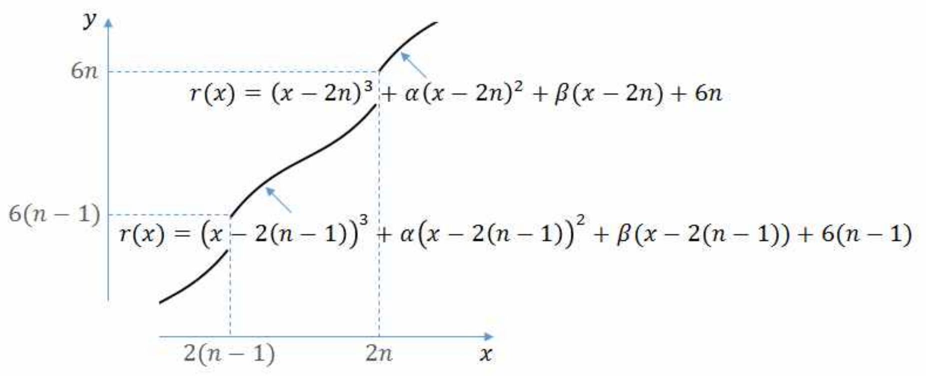
[다른 풀이 방법]

구간 $[0, 2)$에서 $r(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x$이고,

구간 $[2(n-1), 2n)$에서 $r(x)$는 구간 $[0, 2)$의 그래프를 x축으로 $2(n-1)$만큼 y축으로 $6(n-1)$만큼 이동한 그래프가 된다. 또한 구간 $[2n, 2(n+1))$에서 $r(x)$는 구간 $[0, 2)$의 그래프를 x축으로 $2n$만큼 y축으로 $6n$만큼 이동한 그래프가 된다. 즉, 다음과 같다.

$$r(x) = \begin{cases} (x-2(n-1))^3 + \alpha(x-2(n-1))^2 + \beta(x-2(n-1)) + 6(n-1),\ x \in [2(n-1),\ 2n) \\ (x-2n)^3 + \alpha(x-2n)^2 + \beta(x-2n) + 6n,\ x \in [2n,\ 2(n+1)) \end{cases}$$

따라서 $x = 2n$ 근처에서 그래프 $r(x)$의 개형은 아래와 같다.



$x = 2n$에서 미분이 가능하도록 α와 β의 값을 정한다.

먼저 $x = 2n$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to 2n+} r(x) = \lim_{x\to 2n-} r(x)$를 만족해야 한다.

$\lim_{x\to 2n+} r(x) = 6n$이고 $\lim_{x\to 2n-} r(x) = 8 + 4\alpha + 2\beta + 6n - 6$이므로 $4\alpha + 2\beta = -2$이다.

또한, $x = 2n$에서 미분가능하려면

$\lim_{h\to 0+} \dfrac{r(2n+h) - r(2n)}{h} = \lim_{h\to 0-} \dfrac{r(2n+h) - r(2n)}{h}$이어야 한다.

좌변 :

$$\lim_{h\to 0+} \frac{r(2n+h) - r(2n)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(2n+h-2n)^3 + \alpha(2n+h-2n)^2 + \beta(2n+h-2n) + 6n - 6n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h^3 + \alpha h^2 + \beta h}{h} \quad = \lim_{h\to 0+} (h^2 + \alpha h + \beta) = \beta$$

우변 : $\lim_{h\to 0-} \dfrac{r(2n+h) - r(2n)}{h} = \lim_{h\to 0-} \dfrac{(h+2)^3 + \alpha(h+2)^2 + \beta(h+2) + 6(n-1) - 6n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^3+6h^2+12h+8+\alpha h^2+4\alpha h+4\alpha+\beta h+2\beta-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{h^3+6h^2+12h+\alpha h^2+4\alpha h+\beta h}{h} \quad (4\alpha+2\beta=-2\text{이므로})$$

$$=12+4\alpha+\beta$$

좌변과 우변이 같아야 하므로 $12+4\alpha+\beta=\beta \rightarrow \alpha=-3$이다.

$x=2$에서 연속조건인 $4\alpha+2\beta=-2$가 충족되려면 $\beta=5$이다.

위에서 정해진 α와 β에 의해 구간 $[0,2)$ 에서 $r(x)=x^3-3x^2+5x$ 이다.

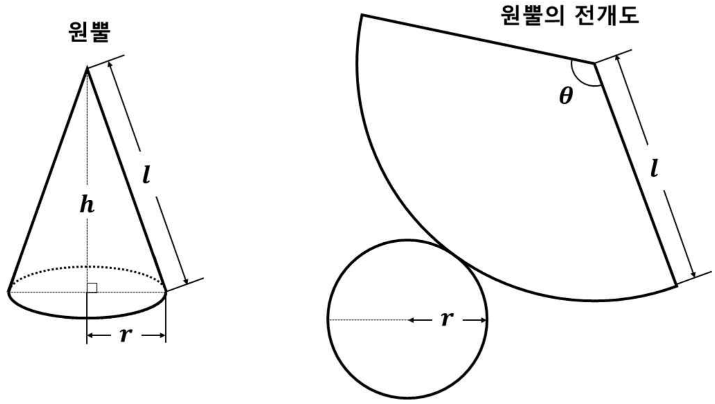
따라서 $r(2019)=r(1+2018)=r(1+2\times 1009)=r(1)+6\times 1009=3+6054=6057$

[공학계열(항전정) 2번]

문항 및 제시문

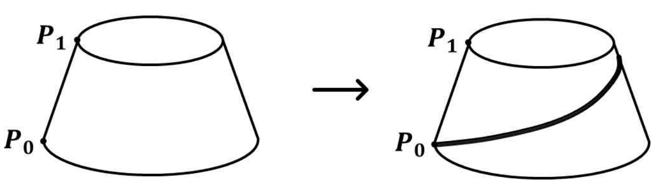
「제시문」

가) <그림 2-1>과 같이 꼭짓점과 밑면의 중심을 잇는 직선이 밑면에 직교하는 원뿔을 직원뿔이라 한다. 이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h, 모선의 길이가 l 일 때, 원뿔의 전개도에서 중심각 θ 의 값은 $\dfrac{2\pi r}{l}$ 이다.



<그림 2-1>

나) <그림 2-2>와 같이 직원뿔을 모선 위의 한 점을 지나고 밑면에 평행하게 잘라 만든 원뿔대가 있다. 원뿔대 윗면의 지름은 12, 밑면의 지름은 $12\sqrt{2}$ 이고, 모선의 길이는 $18(\sqrt{2}-1)$이다. 이 원뿔대의 한 모선 위에 두 점 P_0와 P_1이 있으며, 점 P_0는 밑면의 둘레 위의 점이고 점 P_1은 윗면의 둘레 위의 점이다. 점 P_0에서 출발하여 원뿔대의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 P_1에 도달하는 최단 경로를 따라 선을 그렸다. 이때, 원뿔대의 윗면의 둘레도 경로에 포함될 수 있다.



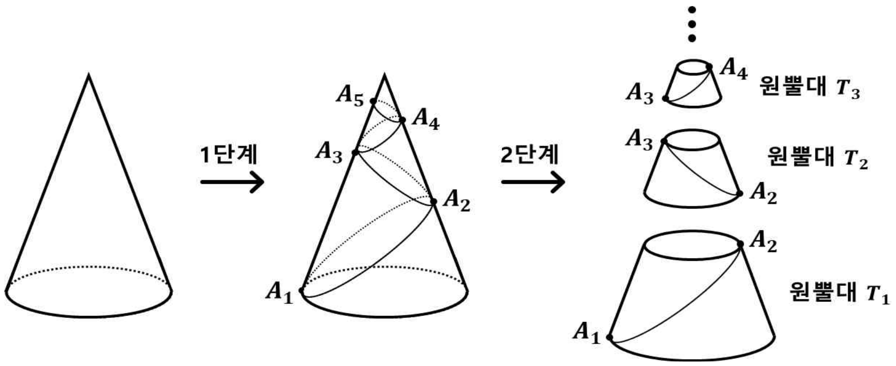
<그림 2-2>

다) 원뿔에서 여러 개의 원뿔대를 만드는 과정은 <그림 2-3>과 같고, 각 단계에 대한 설명은 다음과 같다.

1단계: 밑면의 지름이 12이고 모선의 길이가 18인 직원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 둘레 위의 점 A_1에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 점 A_1에 이르는 최단 경로를 따라 선을 그린다. 이 선 위의 밑면으로부터 높이가 가장 높은 점을 A_2라 한다. 그다음, 점 A_2에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 점 A_2에 이르는 최단 경로를 따라 선을 그린다. 이처럼 직전에 그려진 선 위의 점들 중에 밑면으로부터 높이가 가장 높은 점에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 제자리에 돌아오는

최단 경로를 따라 선을 그리는 일을 100번 수행한다.

2단계: 원뿔을 점 A_2를 지나고 밑면에 평행하게 잘라 원뿔대 T_1을 만든다. 그다음에 점 A_3을 지나고 밑면에 평행하게 잘라 원뿔대 T_2를 만든다. 이처럼 원뿔 위의 점 $A_n\,(n=2, 3, \cdots, 101)$을 지나고 밑면에 평행하게 자르는 일을 100번 반복하여 원뿔대 $T_n\ (n=1, 2, \cdots, 100)$을 100개 만든다.



<그림 2-3>

라) 세 종류의 제품 C, D, E가 있다. 제품의 가격은 다음 조건을 만족한다.

1) 각 제품의 가격은 무게의 세제곱에 비례한다.
2) C는 D보다 무게가 1 만큼 덜 나간다.
3) C의 가격은 D의 가격보다 1원 싸다.
4) E는 D보다 무게가 2 만큼 더 나간다.
5) E의 가격은 D의 가격보다 8원 비싸다.

※제시문과 문제에서 단위는 모두 생략한다.

[문제 2-1] 직원뿔의 밑면의 지름과 높이를 정하려고 한다. 이 원뿔의 부피가 $\dfrac{\pi}{6}$로 일정하다고 할 때, 제시문 가)를 참고하여 원뿔의 옆면의 넓이가 최소가 되는 원뿔의 높이를 구하시오.

[문제 2-2] 제시문 나)를 따라 원뿔대에 그려진 선의 길이를 구하시오.

[문제 2-3] 제시문 다)에서 원뿔대 T_{50}의 부피는 원뿔대 T_1의 부피의 몇 배인지 구하시오.

[문제 2-4] 제시문 라)에서 제품 D의 가격을 구하시오.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	원뿔의 넓이를 높이의 함수 $S(h)$로 나타내었는가?	4
	함수 $S(h)$를 높이 h에 대하여 미분한 dS/dh를 올바르게 미분하였는가?	4
	$S(h)$의 그래프의 개형을 구하고 함수의 최솟값을 구하였는가?	4
2-2	직원뿔의 전개도를 이용하여 중심각을 올바르게 구하였는가?	4
	최단경로를 올바르게 파악하였는가?	3
	호에 접하는 접선으로 이루어진 직각삼각형의 한 변의 길이를 올바르게 구하였는가?	2
	부채꼴의 호의 길이를 계산하여 최단 경로의 나머지 부분의 길이를 올바르게 구하였는가?	2
2-3	부채꼴의 중심각의 크기를 올바르게 구하였는가?	2
	최단 경로위의 점 중 높이가 가장 높은 점은 원뿔의 높이의 절반에 위치해 있다는 사실을 파악하였는가?	2
	원뿔대의 부피를 올바르게 구하였는가?	2
	등비수열의 공비를 올바르게 구하였는가?	2
	등비수열의 100번째 항을 올바르게 구하였는가?	2
2-4	D의 무게를 이용하여 D의 가격을 올바르게 표현하였는가?	2
	D의 무게를 이용하여 C의 가격에 대한 방정식을 구하였는가?	3
	D의 무게를 이용하여 E의 가격에 대한 방정식을 구하였는가?	3
	연립방정식의 해(D의 무게)를 올바르게 구하였는가?	2
	D의 가격을 구하였는가?	2

예시 답안

[문제 2-1]

직원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h, 모선의 길이는 l이라고 할 때 원뿔의 부피는

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{6}$$

이므로, $r=\dfrac{1}{\sqrt{2h}}$ 이다. 원뿔의 옆면의 넓이 S를 높이의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$S=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi r\sqrt{r^2+h^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{1}{2h}+h^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2h^2}+h}$$

$\frac{1}{2h^2}+h=u$ 로 놓으면 $S=\pi\sqrt{\frac{u}{2}}$ 이므로 합성함수의 미분법을 이용하여 미분하면

$$\frac{dS}{dh}=\frac{dS}{du}\cdot\frac{du}{dh}=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2u}}\right)\left(-\frac{1}{h^3}+1\right)=\left(\frac{\pi h}{2\sqrt{1+2h^3}}\right)\left(-\frac{1}{h^3}+1\right)$$

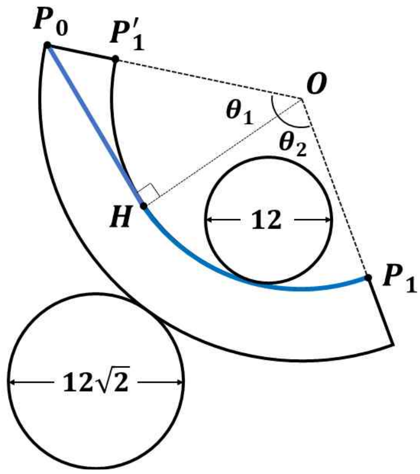
이다. $h=1$ 일 때 $\frac{dS}{dh}=0$ 이다. $h>0$에서 주어진 함수 $S'(h)$의 부호를 조사하면 다음 표와 같다.

h	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(h)$		$-$	0	$+$
$S(h)$		$\searrow$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

따라서 원뿔의 옆면의 넓이는 높이 $h=1$일 때 최솟값을 갖는다.

[문제 2-2]

제시문 나)에서 원뿔대에 그려진 선(P_0에서 출발하여 P_1에 도달하는 최단 경로를 나타내는 선)을 원뿔대의 전개도에 나타내면 아래 그림과 같다. 이 선은 선분 P_0H와 호 HP_1으로 이루어진 경로를 따라 그려진다.



원뿔대의 윗면의 지름은 12, 밑면의 지름은 $12\sqrt{2}$, 모선의 길이가 $18(\sqrt{2}-1)$일 때, $\angle P_0OP_1$의 크기를 θ라 하면 다음 식을 만족한다.

$$\overline{OP_1}\times\theta = 12\pi$$
$$\left\{\overline{OP_1}+18(\sqrt{2}-1)\right\}\times\theta = 12\sqrt{2}\pi$$

따라서 $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\overline{OP_1}=18$, $\overline{OP_0}=18\sqrt{2}$ 이다.

원뿔의 전개도에서 선분 P_0H는 점 H에서 호 $P_1'P_1$과 접한다. 직각삼각형 OP_0H에서 $\overline{OH}=18$이고, $\overline{OP_0}=18\sqrt{2}$이므로 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$이다. 따라서 $\overline{P_0H} = \overline{OP_0}\sin\theta_1 = 18$이다.

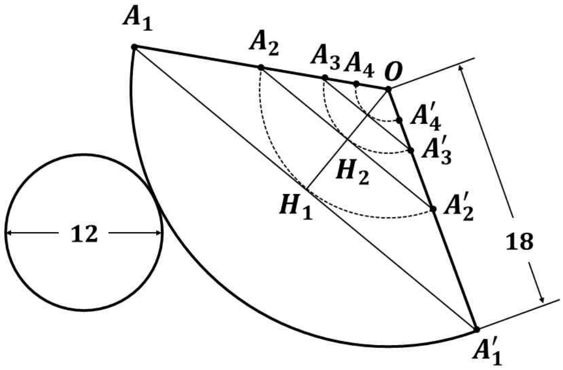
그리고, $\theta_2 = \theta-\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$ 이므로

$\widehat{HP_1} = \overline{OP_1}\times\theta_2 = \dfrac{15\pi}{2}$이다.

따라서 원뿔대에 그려진 선의 길이는 $18+\dfrac{15\pi}{2}$ 이다.

[문제 2-3]

제시문 다)에서 주어진 원뿔의 전개도는 아래 그림과 같다.



이 원뿔의 밑면의 지름은 12이고 모선의 길이 $\overline{OA_1}$은 18이므로 $\angle A_1OA_1' = \dfrac{2\pi}{3}$이다.

점 A_1에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 한 바퀴 돌아 다시 점 A_1에 도달하는 최단 경로를 전개도에 나타내면 $\overline{A_1A_1'}$이다.

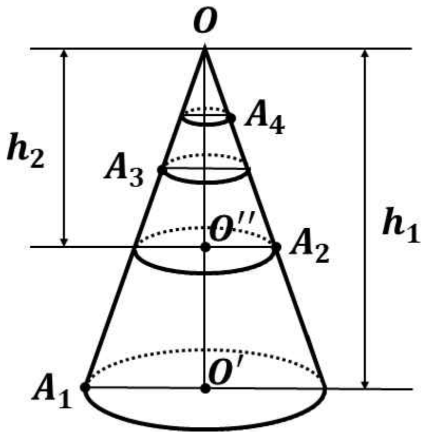
삼각형 A_1OA_1'은 이등변삼각형이므로 점 O에서 $\overline{A_1A_1'}$에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하면 $\overline{A_1H_1} = \overline{A_1'H_1}$이고,

$\angle A_1OH_1 = \angle A_1'OH_1 = \dfrac{\pi}{3}$이다.

따라서, $\overline{OH_1} = \overline{OA_1} \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\overline{OA_1}$ 이고, 점 H_1이 두 번째 경로의 시작점 A_2가 된다.

두 번째 경로는 원뿔의 전개도에서 $\overline{A_2A_2'}$ 와 같은 길이를 갖는다. 마찬가지로 점 O에서 $\overline{A_2A_2'}$ 에 내린 수선의 발을 H_2라고 하면 $\overline{A_2H_2} = \overline{A_2'H_2}$이므로 $\overline{OH_2} = \dfrac{1}{2}\overline{OA_2}$이고, 점 H_2는 세 번째 경로의 시작점 A_3가 된다.

따라서, $\overline{OA_2} = \overline{OH_1} = \dfrac{1}{2}\overline{OA_1}$, $\overline{OA_3} = \overline{OH_2} = \dfrac{1}{2}\overline{OA_2}$, $\overline{OA_4} = \dfrac{1}{2}\overline{OA_3}$, $\cdots$, $\overline{OA_{101}} = \dfrac{1}{2}\overline{OA_{100}}$ 이다.



또한, 위의 그림과 같이 삼각형 OA_1O'과 삼각형 OA_2O''은 닮음이므로 모선의 길이가 절반으로 감소하면 원뿔의 높이와 반지름도 절반이 된다.

최초 원뿔의 부피를 $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$라고 할 때, 높이가 $\dfrac{1}{2}$인 지점에서 밑면에 평행하게 잘라 만든 원뿔대 T_1의 부피

V_1은

$$V_1 = V - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2}\right) = V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$$

마찬가지로, 원뿔대 T_2의 부피는

$$V_2 = \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{8}V\right) = \left(\frac{1}{8}\right)V_1$$

이고, 원뿔대 T_3의 부피는

$$V_3 = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}V\right)\right) = \frac{1}{8^2}\left(\frac{7}{8}V\right) = \frac{1}{8^2}V_1$$

이므로, 원뿔대 T_n의 부피는 $V_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}V_1$이다.

따라서, T_{50}의 부피 $V_{50} = \left(\frac{1}{8}\right)^{49}V_1$이므로 원뿔대 T_{50}의 부피는 T_1의 부피의 $\left(\frac{1}{8}\right)^{49}$배이다.

[문제 2-4]

D의 무게를 x라 하면 가격은 kx^3이다. (단 k는 양의 실수)
C의 무게가 D보다 1 만큼 가벼우므로 C의 가격에 대해 다음과 같은 등식이 성립한다.

$k(x-1)^3 = kx^3 - 1$

정리하면 $-3x^2 + 3x - 1 = -\frac{1}{k}$ -------(1)

E의 무게가 D보다 2만큼 무거우므로 E의 가격에 대해 다음과 같은 등식이 성립한다.

$k(x+2)^3 = kx^3 + 8$

정리하면 $6x^2 + 12x + 8 = \frac{8}{k}$ -------(2)

$8 \times (1) + (2)$를 하면
$-18x^2 + 36x = 0$ $\therefore x = 2$ (x가 0이 되는 경우 C의 무게가 음수가 되므로 제외)

$x = 2$를 (1)의 식에 대입하면 $k = \frac{1}{7}$이다.

$\therefore$ D의 가격은 $\frac{1}{7} \times 2^3 = \frac{8}{7}$이다.