# 부록 4 문항카드 양식 2 (수리계열 - 수학)

[한국항공대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

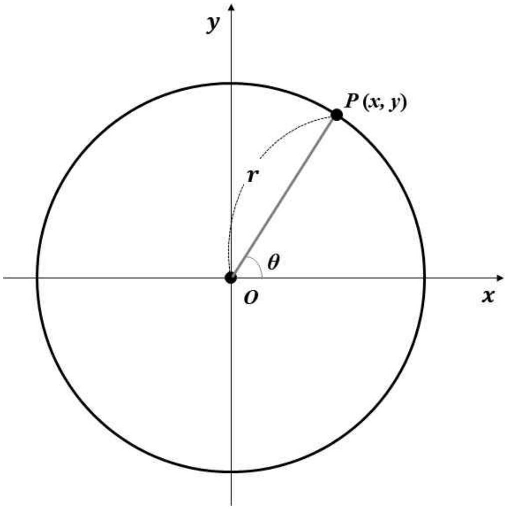
| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | |
| 전형명 | 논술우수자전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호 | 공학계열 / 문제 1번 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학 I·II, 미적분 I·II |
| | 핵심 개념 및 용어 | 등비수열, 원의 방정식, 삼각함수, 로그함수, |
| 예상 소요 시간 | 45분 / 90분 | |

## 2. 문항 및 제시문

가) 기하학은 인류 역사와 더불어 시작되었다. 특히 도형 원은 다양한 분야에서 활용되었다. 고대문명의 발상지인 메소포타미아에서는 원의 성질을 응용하여 그릇을 빚는 도자기 물레를 처음 만들었다. 고대 이집트에서는 나일강이 범람했을 때, 기하학 원리를 적용하여 나일 삼각주의 토지를 새롭게 측량하였다고 한다. 이집트 사람들은 원통 모양의 계측바퀴를 한 바퀴 굴린 길이를 이용하여 원주율을 계산하였고, 이렇게 구한 원주율은 토지 측량에 필요한 원의 넓이를 구하는 데 활용되었다.

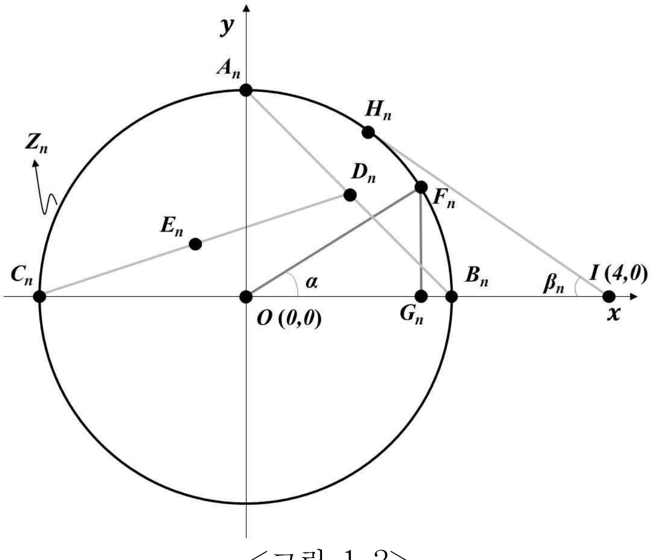
나) 프랑스의 수학자 데카르트는 어려서부터 몸이 약해서 침대에 누워 있는 시간이 많았다. 그는 그 시간에 주로 명상을 하며 보냈는데, 그것은 데카르트에게 생산적인 시간이었다. 어느 날, 침대에 누워 있던 데카르트는 방안을 날아다니는 파리를 보면서 파리의 위치를 천장에 나타낼 방법을 찾고 싶었다. 그 때 천장에 바둑판처럼 격자무늬를 만들어 나타내면 되겠다는 생각으로 좌표평면을 고안하게 되었다

고 한다. 좌표평면에서 원의 중심이 원점이고 반지름이 $r$인 원의 방정식은 $x^2+y^2=r^2$이다. <그림 1-1>과 같이 반지름의 길이가 $r$인 원 위의 점 $P(x,y)$의 좌표는 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$와 같이 중심각 $\theta$를 이용하여 나타낼 수 있다.



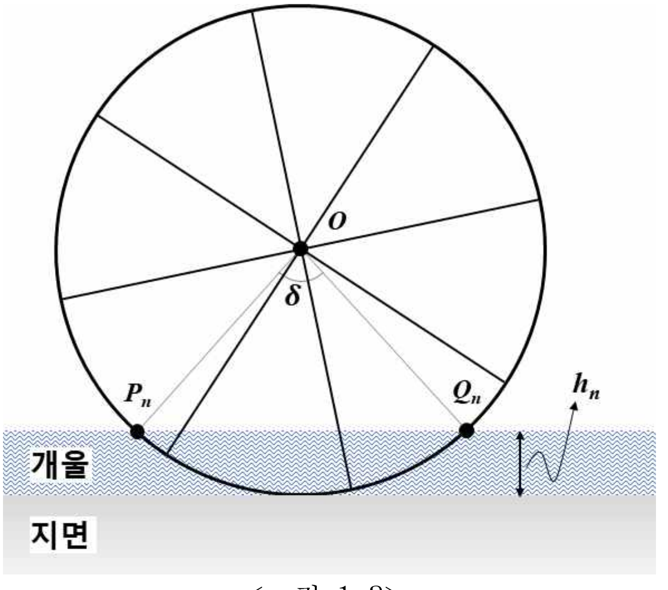

<그림 1-1>

다) <그림 1-2>에서 원 $Z_n$ 은 중심이 원점 $O(0,0)$이고 반지름이 $\frac{1}{2^n}$이다. 그림에서 점 $A_n$은 원과 $y$축의 교점이고, 점 $B_n$, $C_n$은 원과 $x$축의 교점이다. 점 $D_n$은 선분 $A_nB_n$의 중점이고, 점 $E_n$은 선분 $C_nD_n$의 중점이다. 점 $H_n$은 점 $I(4,\ 0)$에서 원 $Z_n$에 그은 접선의 접점이다. 원 위의 점 $F_n$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $G_n$이라고 하면 삼각형 $G_nOF_n$에서 $\alpha=30^\circ$ 이다. (단, $n$ 은 자연수)




<그림 1-2>

라) <그림 1-3>에서 반지름이 $\frac{1}{2^n}$ 인 원 모양의 바퀴가 일정한 속도로 회전하면서 깊이 $h_n$ 인 개울을 굴러간다. 부채꼴 $P_nOQ_n$ 에서 개울에 잠겨 있는 호에 대한 중심각의 크기를 $\delta$라고 하고, 그 호의 길이는 원주의 $\frac{1}{6}$ 이다. (단, $n$ 은 자연수)




<그림 1-3>

[문제 1-1] <그림 1-2>의 삼각형 $B_nC_nD_n$ 의 넓이를 $a_n$이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{\left(\frac{1}{a_n}\right)^2+\left(\frac{1}{a_n}\right)}-\left(\frac{1}{a_n}\right)}$을 구하시오.

[문제 1-2] <그림 1-2>에서 점 $E_n$을 지나고 선분 $C_nD_n$에 수직인 직선과 $x$축의 교점은 $J_n$, $y$축과의 교점은 $K_n$이고, 삼각형 $OJ_nK_n$ 의 넓이는 $b_n$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 의 값을 구하시오.

[문제 1-3] <그림 1-2>에서 선분 $OG_n$을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $c_n$, 선분 $F_nG_n$을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $d_n$ 이라고 할 때, $c_n+d_n=\frac{1}{1024}$을 만족하는 $n$의 값을 구하시오.

[문제 1-4] <그림 1-2>에서 원 밖의 점 $I$에서 원에 그은 접선 $H_nI$와 $x$축이 이루는 각을 $\beta_n$, 접선의 기울기를 $m_n$이라고 할 때, $2^{2n}m_n^2\cos^2\beta_n$의 값을 구하시오.

[문제 1-5] 제시문 라)와 같이 바퀴가 1024번 회전하면서 굴러갔다. 이동거리가 $9\pi$ 이상 $30\pi$ 이하일 때, 이를 만족하는 $n$과 $h_n$을 구하시오.

## 3. 출제 의도

본 문제는 고등학교 수학 교과과정에서 다루고 있는 ‘등비수열’과 ‘원의 방정식’을 이용하여 변화의 대소 관계를 활용하는 능력을 평가하기 위해 출제되었다. 구체적으로 좌표평면상에서 변하는 좌표점들의 규칙을 이해하고 해결할 수 있는지 평가 되었다.

1-1 선분의 내분을 이해하여 내분점의 좌표를 구할 수 있다. 내분점의 좌표 변화를 수열로 표현하여, 수렴 및 발산을 판별할 수 있는 문제이다.
1-2 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. 지수의 법칙을 이해하고, 지수와 로그 관계식을 이용하여 수의 대소 관계를 평가하는 문제이다.
1-3 삼각함수와 지수법칙을 관계식으로 표현하여 문제를 해결 할 수 있다.
1-4 원과 접선의 방정식, 삼각함수, 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
1-5 원과 원주율을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

## 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

| 문항 및 제시문 | | 관련 성취기준 |
|---|---|---|
| 제시문 | 교육과정 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.<br>선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.<br>[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식<br>좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.<br>수학1312-1 선분의 내분을 이해하고, 내분점의 좌표를 구할 수 있다.<br>[수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식<br>수학1311. 원의 방정식을 구할 수 있다.<br>수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.<br>수학1332-2. 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다. |
| 문제 1-1 | 교육과정 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>두 점 사이의 거리를 구할 수 있다<br>[미적분 Ⅰ] - (나) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한<br>함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.<br>[미적분 Ⅰ] - (나) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한<br>미적1212. 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다. |
| 문제 1-2 | 교육과정 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.<br>[미적분 Ⅰ] - (가) 수열의 극한 - 2 급수<br>등비급수의 뜻을 알고, 그 함수를 구할 수 있다.. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>수학1322-2. 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 Ⅰ] - (가) 수열의 극한 - 2 급수<br>미적1122. 등비급수의 뜻을 알고, 그 함수를 구할 수 있다.<br>미적1123. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다. |
| 문제 1-3 | 교육과정 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>두 점 사이의 거리를 구할 수 있다<br>[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프<br>삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.<br>[수학 Ⅱ] - (라) 지수와 로그 - 1 지수<br>지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 1 평면좌표<br>수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다<br>[미적분 Ⅱ] - (나) 삼각함수 - 1 삼각함수의 뜻과 그래프<br>미적2212-1. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.<br>미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.<br>[수학 Ⅱ] - (라) 지수와 로그 - 1 지수<br>수학2413. 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. |
| 문제 | 교육과정 | [수학 Ⅰ] - (다) 도형의 방정식 - 3 원의 방정식 |

| | | |
|---|---|---|
| 1-4 | | 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.<br>[미적분 II] - (나) 삼각함수 - [1] 삼각함수의 뜻과 그래프<br>삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.<br>[수학 II] - (라) 지수와 로그 - [1] 지수<br>지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. |
| | 성취기준·<br>성취수준 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - [3] 원의 방정식<br>수학1332-2. 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (나) 삼각함수 - [1] 삼각함수의 뜻과 그래프<br>미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.<br>[수학 II] - (라) 지수와 로그 - [1] 지수<br>수학2413. 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다. |
| 문제<br>1-5 | 교육과정 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - [3] 원의 방정식<br>원의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (나) 삼각함수 - [1] 삼각함수의 뜻과 그래프<br>삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. |
| | 성취기준·<br>성취수준 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - [3] 원의 방정식<br>수학1311. 원의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (나) 삼각함수 - [1] 삼각함수의 뜻과 그래프<br>미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. |

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] "수학과 교육과정"

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행 연도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 수학 I | 류희찬 외 17인 | 천재교과서 | 2014 | 134~143<br>172~180 |
| | 수학 I | 신항균 외 11인 | ㈜지학사 | 2014 | 132~142<br>168~172 |
| | 수학 I | 이강섭 외 14인 | ㈜미래엔 | 2014 | 135~147<br>172−182 |
| | 수학 II | 김창동 외 14인 | ㈜교학사 | 2014 | 130~137<br>160~171 |
| | 수학 II | 우정호 외 24인 | 동아출판(주) | 2014 | 158~166<br>196~210 |
| | 수학 II | 김원경 외 12인 | ㈜비상교육 | 2014 | 131~136<br>155~165 |
| | 미적분 I | 류희찬 외 17인 | 천재교과서 | 2014 | 18~25<br>35~40 |
| | 미적분 I | 신항균 외 11인 | ㈜지학사 | 2014 | 21~24<br>33~38 |
| | 미적분 I | 황선욱 외 10인 | 좋은책 신사고 | 2014 | 23~26<br>31~42 |
| | 미적분 II | 황선욱 외 10인 | 좋은책 신사고 | 2014 | 12~22<br>48~56 |
| | 미적분 II | 정상권 외 7인 | ㈜금성출판사 | 2014 | 12~29<br>54~63 |
| | 미적분 II | 김창동 외 14인 | ㈜교학사 | 2014 | 130~137<br>160~171 |
| | 미적분 II | 신항균 외 11인 | ㈜지학사 | 2014 | 132~142<br>168~172 |
| 기타 | | | | | |

## 5. 문항 해설

본 문제는 고등학교 수학 교과과정에서 다루고 있는 ‘등비수열’과 ‘원의 방정식’을 이용하여 변화의 대소 관계를 활용하는 능력을 평가하기 위해 출제되었다. 구체적으로 선분의 내분을 이해하고 내분점의 좌표를 구할 수 있는 능력을 평가 하였다. 좌표평면상에서 변하는 좌표점의 규칙을 이해하고 해결할 수 있는 능력을 평가하였다. 문제를 해결하는 과정에서 원의 방정식, 직선의 방정식, 지수와 로그 방정식, 삼각함수 등의 활용 능력을 평가 하였다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 1-1 | 선분의 내분을 이해하고, 내분점의 좌표를 구할 수 있는가? | 3 |
| | 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는가? | 3 |
| | 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있는가? | 4 |
| 1-2 | 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있는가? | 3 |
| | 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는가? | 3 |
| | 여러 가지 수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 구할 수 있는가? | 4 |
| 1-3 | 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있는가? | 5 |
| | 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는가? | 5 |
| 1-4 | 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가? | 3 |
| | 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있는가? | 3 |
| | 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있는가? | 4 |
| 1-5 | 원의 방정식을 구할 수 있는가? | 5 |
| | 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있는가? | 5 |

*※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.*

*※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.*

## 7. 예시 답안

※문항카드 양식 2의 실례는 pp. 42-46 <Ⅳ. 계열·교과별 문항 제출 양식(문항카드)-2. 수리계열 - 수학-가. 문항카드 작성 샘플-(2) 문항카드 작성 예시>를 참고

[문제 1-1]

점 $B_n(\frac{1}{2^n}, 0)$, $C_n(\frac{-1}{2^n}, 0)$, $D_n(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}})$

$$a_n = (\frac{1}{2^n}) \times 2 \times (\frac{1}{2^{n+1}}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{\sqrt{(\frac{1}{a_n})^2 + (\frac{1}{a_n})} - (\frac{1}{a_n})}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{(\frac{1}{a_n})^2+(\frac{1}{a_n})}-(\frac{1}{a_n})}\right)\times\left(\frac{\sqrt{(\frac{1}{a_n})^2+(\frac{1}{a_n})}+(\frac{1}{a_n})}{\sqrt{(\frac{1}{a_n})^2+(\frac{1}{a_n})}+(\frac{1}{a_n})}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{(\frac{1}{a_n})^2+(\frac{1}{a_n})}+(\frac{1}{a_n})}{(\frac{1}{a_n})}=\lim_{n\to\infty}5(\sqrt{1+a_n}+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}5(\sqrt{1+a_n}+1)=\lim_{n\to\infty}5(\sqrt{1+\frac{1}{2^{2n+1}}}+1)=\lim_{n\to\infty}5(\sqrt{1+0}+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}5(\sqrt{1+0}+1)=5\times2=10$$

[문제 1-2]

선분 $C_nD_n$ 의 기울기는 $\dfrac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{3}$,

점 $E_n(\frac{-1}{2^{n+2}},\frac{1}{2^{n+2}})$ 을 지나고 선분 $C_nD_n$ 에 수직인 방정식은

$$y=-3\left(x+\frac{1}{2^{n+2}}\right)+\frac{1}{2^{n+2}}$$

$$J_n=\frac{-1}{3(2^{n+1})},\ K_n=\frac{-1}{2^{n+1}},\ b_n=\left(\frac{1}{3(2^{n+1})}\right)\times\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24\times4^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{1}{72}$, $\sum_{k=1}^{n}b_k$ 은 초항이 $\frac{1}{96}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열의 합

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{96}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24\times3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\frac{1}{72}$$

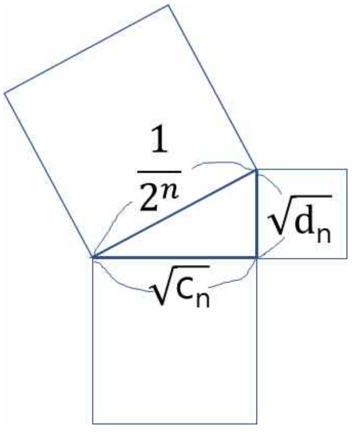
[문제 1-3]

$\overline{OG_n} = \frac{1}{2^n}\cos\alpha, \overline{\mathrm{F_nG_n}} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\sin\alpha$, $c_n = \frac{1}{2^{2n}}\cos^2\alpha, d_n = \frac{1}{2^{2n}}\sin^2\alpha$

$$c_n + d_n = \frac{1}{2^{2n}}\cos^2\alpha + \frac{1}{2^{2n}}\sin^2\alpha = \frac{1}{2^{2n}}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$c_n + d_n = \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{1024}$$

(참조)




피타고라스 정리를 이용하여 $\left(\sqrt{c_n}\right)^2 + \left(\sqrt{d_n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$ 이다. 따라서 $c_n + d_n$ 은 $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 ( $\frac{1}{2^{2n}}$ )로 접근할 수 있음.

식을 정리하면 $2^{2n} = 2^{10}, n = 5$

[문제 1-4]

점 I(4,0)에서 원위의 접점$H_n$을 지나는 접선의 기울기($m_n$)을 통해 $m_n^2 = \frac{1}{2^{2n+4} - 1}$. 원의 중심과 접선까지의 거리를 이용하면,

원의 중심은(0,0)이고, 반지름은 $\frac{1}{2^n}$, 접선의 방정식은 $m_n x - y - 4m_n = 0$.

중심과 접점의 거리 = $\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{\left|0m_n - 0 - 4m_n\right|}{\sqrt{m_n^2+1}} = \dfrac{\left|-4m_n\right|}{\sqrt{m_n^2+1}}$,

양변을 제곱하면, $\dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{16m_n^2}{m_n^2+1}$, $m_n^2 = \dfrac{1}{2^{2n+4}-1}$

$$\cos\beta_n = \frac{\overline{H_nI}}{\overline{OI}} = \frac{\sqrt{16-\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}}{4} = \frac{\sqrt{16-2^{-2n}}}{4},\ \cos^2\beta_n = \frac{16-2^{-2n}}{16}$$

$$2^{2n}m_n^2\cos^2\beta_n = 2^{2n}\left(\frac{2^4-2^{-2n}}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^{2n+4}-1}\right) = \left(\frac{2^{2n+4}-1}{2^4}\right)\left(\frac{1}{2^{2n+4}-1}\right) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

(참조)

$m_n = -\tan\beta_n$ 관계식을 이용하여 아래와 같이 유도 할 수 있음.

$$2^{2n}m_n^2\cos^2\beta_n = 2^{2n}\tan^2\beta_n\cos^2\beta_n = 2^{2n}\frac{\sin^2\beta_n}{\cos^2\beta_n}\cos^2\beta_n = 2^{2n}\sin^2\beta_n = 2^{2n}\frac{2^{-2n}}{16} = \frac{1}{16}$$

[문제 1-5]

원이 1024번 회전하면 굴러간 거리는 $2\pi\left(\dfrac{1}{2^n}\right)2^{10}$

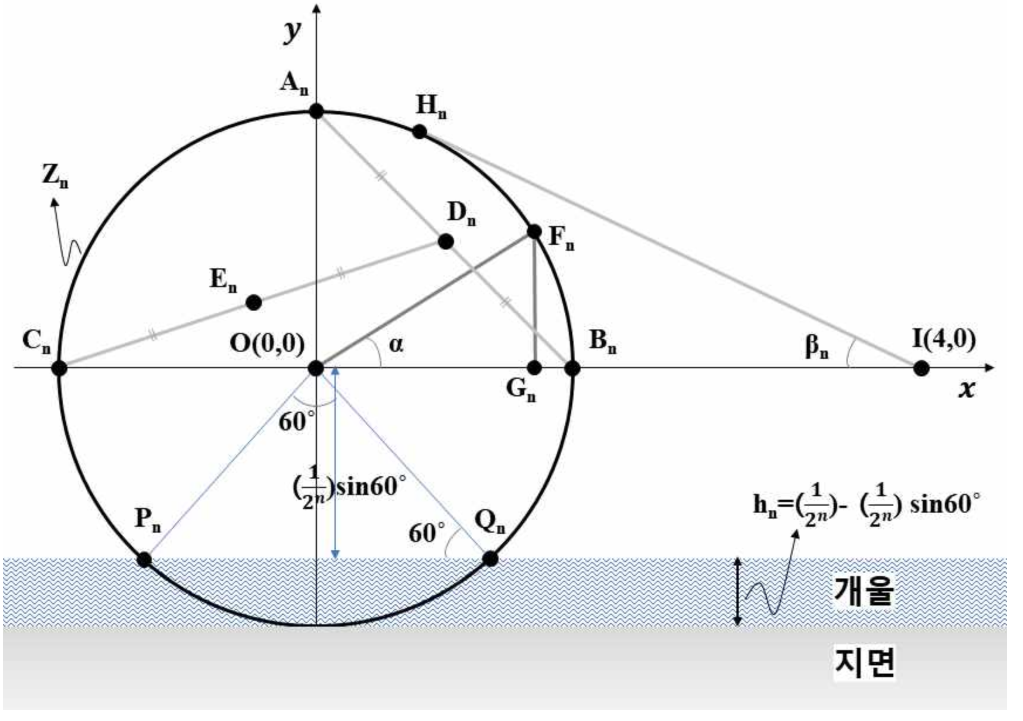
$2^3\pi < 2\pi\left(\dfrac{1}{2^n}\right)2^{10} < 2^5\pi$, $2^3 < 2^{(11-n)} < 2^5, 3\log 2 < (11-n)\log 2 < 5\log 2,$

$-5 < n-11 < -3, 6 < n < 8, n=7$, $h_n = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\delta = 60^\circ$ 이다.

원점 O에서 개울에 내린 수선의 발을 $R_n$이라고 하면, 선분 $OR_n$은

$\left(\dfrac{1}{2^n}\right)\sin 60^\circ = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $h_n = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $n=7$을 대입하면,

$h_7 = \left(\dfrac{1}{2^7}\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$


y
$A_n$
$H_n$
$Z_n$
$D_n$
$F_n$
$E_n$
$C_n$
O(0,0)
α
$B_n$
$\beta_n$
I(4,0)
$G_n$
x
60°
$(\frac{1}{2^n})\sin 60°$
$P_n$
60°
$Q_n$
$h_n=(\frac{1}{2^n})-(\frac{1}{2^n})\sin 60°$
개울
지면

# 부록 4 문항카드 양식 2 (수리계열 – 수학)

[한국항공대학교 문항정보]

## 1. 일반 정보

| | | |
|---|---|---|
| 유형 | ☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | |
| 전형명 | 논술 우수자 전형 | |
| 해당 대학의 계열(과목) / 문항 번호 | 공학계열 / 문제 2 | |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학 I, 미적분 II, 확률과 통계 |
| | 핵심 개념 및 용어 | 직선의 방정식, 미분, 적분, 중복조합 |
| 예상 소요 시간 | 45분 / 90분 | |

## 2. 문항 및 제시문

「제시문」

가) 그릇 A, B, C, D를 생산하는 공장이 있다. 각 그릇의 모양은 <그림 2-1>과 같다. 공장 생산팀에 전달된 그릇 제작 지침은 다음과 같다.

1) 그릇 A : 원뿔 모양으로 제작한다. 단, 원뿔 밑면의 지름과 원뿔의 높이는 동일하다.

2) 그릇 B : 그릇의 밑면으로부터 높이가 $x$만큼 물을 담았을 때, 담긴 물의 부피 $V(x)$는 $V(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}$로 나타내고, $f(x)$는 다음의 식을 만족한다.

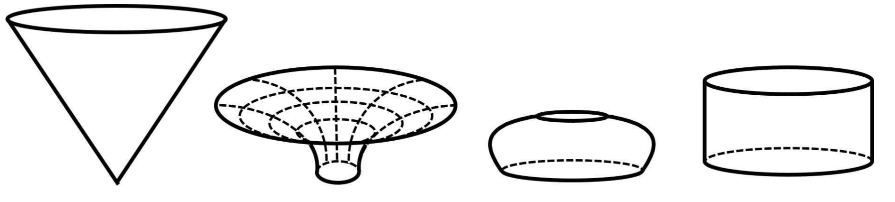
$$f(x) = \frac{\pi}{4}e^{x} + 2\int_{0}^{\ln 2} e^{t} f(t)dt$$

단, 그릇의 밑면과 평행하게 자를 때 생기는 단면은 원이 되도록 제작한다.

3) 그릇 C : 그릇의 높이는 $\frac{\pi}{2}$이고, 밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면에

평행하게 자를 때 생기는 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{9}{2}\left(e^x \cos x + \frac{1}{\pi}\right)}$ 인 원이 되도록 제작한다.

4) 그릇 D : 원기둥 모양으로 제작한다. 단, 원기둥 밑면의 반지름과 원기둥의 높이는 동일하다.



그릇 A　　　그릇 B　　　그릇 C　　　그릇 D

<그림 2-1>

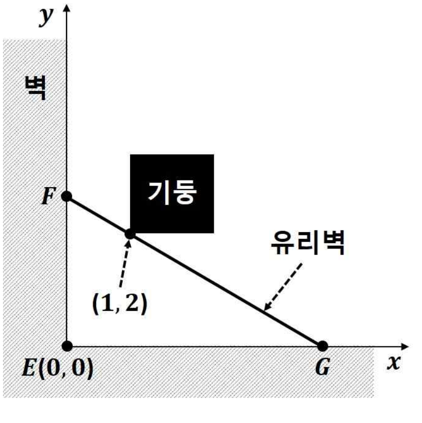
나) <그림 2-1>의 그릇 A, B, C, D를 한 상자에 넣어 세트상품을 출시하기로 하였다. 다음은 이 공장의 마케팅팀이 기획한 세트상품을 구성하는 방법에 관한 지침이다.

1) 한 세트는 12개의 그릇으로 구성한다.

2) 한 세트에는 그릇 A, B, C, D가 각각 한 개 이상 포함되어야 한다.

다) 공장의 한쪽 구석에는 기둥이 있다. <그림 2-2>는 공장의 평면도를 좌표평면에 표시한 것이다.

그림과 같이 기둥 바로 뒤에 유리벽을 설치하고자 한다. 단, 유리벽은 기둥의 한쪽 모서리와 맞닿아 있어야 한다.

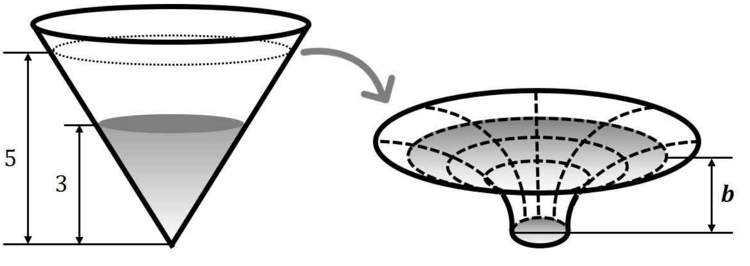



<그림 2-2>

기둥 모서리와 유리벽이 맞닿는 위치는 점 $(1,2)$이다. 유리벽과 공장 벽들이 만나는 지점을 각각 점 $F$와 점 $G$라고 한다.

※ 제시문과 문제에서 그릇과 유리벽의 두께는 무시한다.

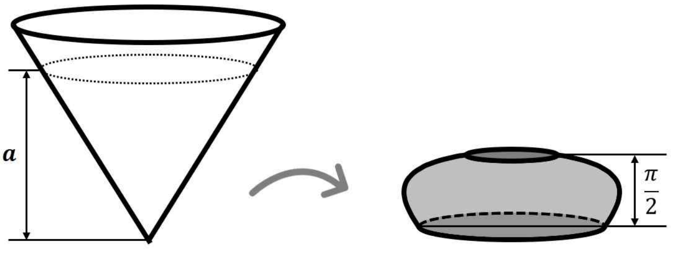
[문제 2-1] <그림 2-3>과 같이 그릇 A에 담긴 물 중 일부를 그릇 B에 옮겨 담았더니 그릇 A에 담긴 물의 높이가 5에서 3으로 감소하였다. 이 때, 그릇 B에 담긴 물의 높이 $b$를 구하시오.




그릇 A　　　　그릇 B

<그림 2-3>

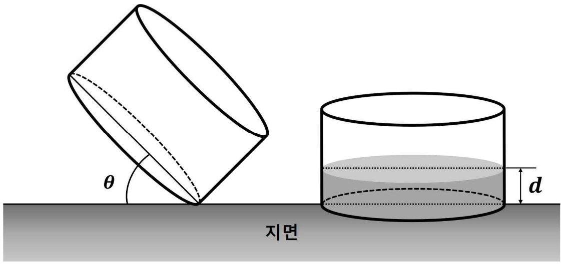
[문제 2-2] 그릇 A에 높이 $a$만큼 물이 담겨 있었다. <그림 2-4>와 같이 이 물을 그릇 C에 옮겨 담았더니 그릇 C에 물이 가득 찼다. 그릇 A에 담겨있던 물의 높이 $a$를 구하시오.




그릇 A　　　　그릇 C

<그림 2-4>

[문제 2-3] 그릇 D에 물을 가득 채운 후에 <그림 2-5>와 같이 그릇을 기울였다. $\theta = 45^\circ$일 때, 일부는 흘러내리고 그릇 안에 남아있는 물의 양이 $\dfrac{16}{3}$이 되었다. 그릇 D를 오른쪽 그림과 같이 다시 지면에 바로 놓을 때 $(\theta = 0^\circ)$ 지면으로부터의 물의 높이 $d$를 구하시오.




<그림 2-5>

[문제 2-4] 제시문 나)와 같이 마케팅팀에서 세트상품을 출시하려고 한다. 상품을 구성할 수 있는 모든 방법의 수를 구하시오. 단, 그릇 A와 B의 개수를 각각 $m$, $n$이라 할 때, $(m-1)^2+2(n-1)^2 \geq 4$이다.

[문제 2-5] <그림 2-2>에서 유리벽의 위치를 결정할 때, 유리벽과 공장 벽으로 둘러싸인 영역(삼각형 $EFG$)의 넓이를 가장 작게 하려고 한다. 점 $G$의 좌표를 구하시오.

## 3. 출제 의도

본 문제는 일상생활에서 일어날 수 있는 여러 상황을 고등학교 수학 교과과정에서 다루고 있는 도형의 그래프, 미분법, 적분법, 중복조합을 적용해서 논리적으로 분석하고 이해할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

2-1 지수함수의 부정적분과 정적분을 이해하고, 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
2-2 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구하고, 부분적분법을 활용하여 함수의 적분을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
2-3 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
2-4 실생활에서 일어나는 중복조합의 경우를 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
2-5 직선의 방정식과 분수함수의 도함수를 구하고, 이를 통해 함수 그래프의 개형을 파악함으로써 함수의 극값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

## 4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

| 문항 및 제시문 | | 관련 성취기준 |
|---|---|---|
| 제시문 (가) | 교육과정 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>입체도형의 부피를 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>미적2413-3 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. |
| 제시문 (나) | 교육과정 | [확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합<br>중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합<br>확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다. |
| 제시문 (다) | 교육과정 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. |
| 문제2-1 | 교육과정 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>입체도형의 부피를 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>미적2413-3 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다. |
| 문제2-2 | 교육과정 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>입체도형의 부피를 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 1 여러 가지 적분법<br>미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.<br>[미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다. |
| 문제2-3 | 교육과정 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>입체도형의 부피를 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [미적분 II] - (라) 적분법 - 2 정적분의 활용<br>미적2422. 입체도형의 부피를 구할 수 있다. |

| | | |
|---|---|---|
| 문제2-4 | 교육과정 | [확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합<br>중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [확률과 통계] - (가) 순열과 조합 - 2 순열과 조합<br>확통1124. 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다. |
| 문제2-5 | 교육과정 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (다) 미분법 - 1 여러 가지 미분법<br>함수의 몫을 미분할 수 있다.<br>[미적분 II] - (다) 미분법 - 2 도함수의 활용<br>함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. |
| | 성취기준·성취수준 | [수학 I] - (다) 도형의 방정식 - 2 직선의 방정식<br>수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.<br>[미적분 II] - (다) 미분법 - 1 여러 가지 미분법<br>미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다.<br>[미적분 II] - (다) 미분법 - 2 도함수의 활용<br>미적2322. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. |

*: 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] “수학과 교육과정”

**: 교육과학기술부 발간 「2009 개정 교육과정에 따른 성취기준·성취수준: 고등학교 수학」(교육과학기술부 발간등록번호 11-1341000-002322-01)

## 나) 자료 출처

| 참고자료 | 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행 연도 | 쪽수 |
|---|---|---|---|---|---|
| 고등학교 교과서 | 미적분 II | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2014 | 114-117<br>170-173 |
| | 미적분 II | 황선욱 외 | 좋은책 신사고 | 2014 | 145-147<br>148-155<br>160-161 |
| | 미적분 II | 이강섭 외 | 미래엔 | 2014 | 128-134<br>166-174<br>183-188 |
| | 미적분 II | 우정호 외 | 동아출판 | 2014 | 225-229 |
| | 미적분 II | 김창동 외 | 교학사 | 2014 | 111-115<br>188-190 |
| | 미적분 II | 이준열 외 | 천재교육 | 2014 | 145-151<br>197-199 |
| | 미적분 II | 김원경 외 | 비상교육 | 2014 | 158-162 |
| | 확률과 통계 | 이강섭 외 | 미래엔 | 2014 | 34-36 |
| | 확률과 통계 | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2015 | 39-45 |
| | 수학 I | 우정호 외 | 동아출판 | 2014 | 164-169 |
| | 수학 I | 김원경 외 | 비상교육 | 2014 | 126-130 |
| 기타 | | | | | |

## 5. 문항 해설

제시문의 내용은 주변에서 일어날 수 있는 여러 가지 상황을 수학적으로 관찰하고 논리적인 사고를 통해 해석하며, 이러한 수학적 문제 상황을 고등학교 수학 교과과정에서 다루는 내용을 통해 합리적으로 해결하는 능력을 요구하는 문항이다. 이 문제의 핵심적인 내용은 「미적분 II」의 여러 가지 미분법, 도함수의 활용, 여러 가지 적분법, 및 정적분의 활용, 「수학 I」의 직선의 방정식, 「확률과 통계」의 순열과 조합의 단원에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 부정적분과 정적분을 이해하고 정적분을 이용하여 다양한 입체도형의 부피를 구할 수 있는지, 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구하고 이를 통해 함수의 개형을 판단하여 극값을 구할 수 있는지 평가한다. 또한 중복조합을 이용하여 실생활 상황에서 경우의 수를 구할 수 있는지와 주어진 두 점을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가한다.

## 6. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 2-1 | 부정적분과 정적분을 이용하여 $f(x)$를 구하였는가? | 5 |
| | $V(x)$를 올바르게 구하였는가? | 2 |
| | 원뿔의 부피를 올바르게 구하였는가? | 3 |
| 2-2 | 단면의 함수가 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가? | 3 |
| | 부분적분법을 이용하여 곱의 꼴로 된 함수의 정적분을 구할 수 있는가? | 4 |
| | 원뿔의 부피를 구할 수 있는가? | 2 |
| | 두 입체도형의 부피를 비교하여 원뿔의 높이를 올바르게 구했는가? | 1 |
| 2-3 | 기울어진 그릇에 담긴 물의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가? | 6 |
| | 원기둥의 부피를 구할 수 있는가? | 2 |
| | 원기둥에 담긴 물의 최종 높이를 구할 수 있는가? | 2 |
| 2-4 | 주어진 조건을 이용하여 제외되어야 하는 $m$와 $n$의 경우를 올바르게 구하였는가? | 4 |
| | 각각의 조건에 대하여 얻어지는 중복조합의 수를 올바르게 구하였는가? | 4 |
| | 모든 경우의 수를 빠짐없이 더하여 올바른 답을 구하였는가? | 2 |
| 2-5 | 직선의 방정식을 구할 수 있는가? | 2 |
| | 삼각형 넓이를 점 $G$ 의 $x$ 좌표에 관한 식으로 유도 하였는가? | 3 |
| | 분수함수의 도함수를 구하였는가? | 3 |
| | 함수의 그래프의 개형을 구하고 함수의 최솟값을 구하였는가? | 2 |

*※ 하위 문항에 따라 칸을 나누어 채점 기준과 배점을 작성하고 필요한 경우 채점 시 유의사항을 추가함.*

*※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.*

## 7. 예시 답안

[문제 2-1]

그릇 B에 $x$만큼의 물이 담겨 있을 때, 담긴 물의 부피 $V(x)$는 $V(x)=f(x)+\frac{\pi}{2}$로 나타내고 $f(x)=\frac{\pi}{4}e^x+2\int_0^{\ln 2} e^t f(t)dt$를 만족한다.

이때 $\int_0^{\ln 2} e^t f(t)dt$는 상수이므로 $\int_0^{\ln 2} e^t f(t)dt = a$ ($a$는 상수)라 하면 $f(x) = \frac{\pi}{4}e^x + 2a$이므로

$$\begin{aligned}&\int_0^{\ln 2} e^t f(t)dt \\ &= \int_0^{\ln 2} e^t\left(\frac{\pi}{4}e^t + 2a\right)dt \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\ln 2} e^{2t}dt + 2a\int_0^{\ln 2} e^t dt \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2} + 2a\left[e^t\right]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{8}\left(2^2 - 1\right) + 2a(2-1) = \frac{3\pi}{8} + 2a\end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{3\pi}{8} + 2a$이므로

$$a = -\frac{3\pi}{8}$$

$f(x) = \frac{\pi}{4}e^x + 2a = \frac{\pi}{4}e^x - \frac{3\pi}{4}$ 이고, $V(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$V(x) = \frac{\pi}{4}\left(e^x - 1\right)$$

그릇 A에서 감소한 물의 부피를 정적분을 이용하여 구하면 다음과 같다.
그릇 A(원뿔)의 꼭짓점을 원점 $O$로 하고, 원뿔의 밑면(그릇의 윗면)에 수직인 직선을 $x$축으로 정할 때, $x$좌표가 $x(3 \le x \le 5)$인 점을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

이므로,

$$\begin{aligned}\Delta V &= \int_3^5 S(x)\,dx = \int_3^5 \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^5 = \frac{\pi}{12}(125 - 27) = \frac{49\pi}{6}\end{aligned}$$

그릇 A에서 감소한 물의 부피와 그릇 B에 담긴 물의 부피가 동일하므로

$$V(b)=\frac{\pi}{4}\left(e^{b}-1\right)=\frac{49\pi}{6}$$

이를 만족하는 $b$를 구하면

$$b=\ln\left(\frac{101}{3}\right)$$

[문제 2-2]

그릇 C에 가득 담긴 물의 부피는 적분을 이용하여 구할 수 있다.

높이가 $\frac{\pi}{2}$이고, 밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면과 평행한 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{\frac{9}{2}\left(e^{x}\cos x+\frac{1}{\pi}\right)}$인 원이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \frac{9\pi}{2}\left(e^{x}\cos x+\frac{1}{\pi}\right)$$

따라서 물의 부피 $V_C$는

$$\begin{aligned} V_C &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\pi}{2}\left(e^{x}\cos x+\frac{1}{\pi}\right)dx \\ &= \frac{9\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx + \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하여 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx$ 를 구하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx = \left[e^{x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin x\,dx = -1+\left[e^{x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$$

이 결과를 이용하여 $V_C$ 를 구하면

$$\begin{aligned} V_C &= \frac{9\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx + \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx \\ &= \frac{9\pi}{4}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) + \frac{9\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

그릇 C에 담긴 물의 부피와 그릇 A에 원래 담겨 있던 물의 부피는 같으므로, 그릇 A에서 감소한 물의 부피 $V_A$ 도 $\frac{9\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$ 가 된다.

그릇 A에 원래 담겨 있던 물의 부피를 적분을 이용하여 구하면,

$$V_A = \int_0^a \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{12}a^3$$

따라서 그릇 A에 원래 담겨 있던 물의 높이 $a$를 구하면

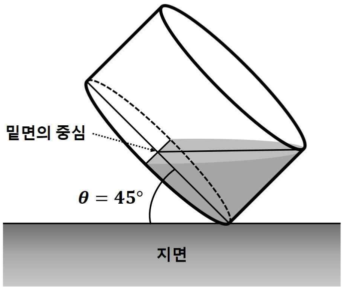
$$\frac{\pi}{12}a^3 = \frac{9\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a^3 = 27\, e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a = 3e^{\frac{\pi}{6}}$$

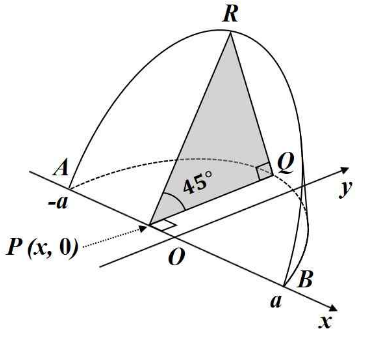
[문제 2-3]

그릇 D에 물을 가득 채운 후에 $\theta = 45^\circ$ 가 되도록 기울이면 그릇에 남아있는 물은 아래 그림과 같다.




그릇 D는 밑면의 반지름과 높이가 같은 원기둥이므로, 위의 그림과 같이 그릇을 $45^\circ$ 기울이면, 수면은 밑면의

중심을 지나게 된다. 따라서 그릇 D에 남은 물의 부피 $V_D$ 는 다음과 같은 적분을 이용하여 구할 수 있다. 그릇 D의 밑면의 반지름의 길이를 $a$라 하자. 수면이 지나는 밑면의 지름의 양 끝점을 각각 $A$와 $B$라하고 밑면의 중심을 원점 $O$, 선분 $AB$의 연장선을 $x$축, 중심을 지나고 선분 $AB$에 수직인 직선을 $y$축으로 하여 나타내면 아래 그림과 같다.




선분 $AB$ 위의 점 $P(x,0)$을 지나고, 선분 $AB$에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 $Q$라고 하면 $\triangle OPQ$에서 $\overline{OP} = |x|$, $\overline{OQ} = a$이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

점 $Q$에서 수직이 되도록 그은 직선이 수면과 만나는 점을 $R$이라고 하면

$$\overline{QR} = \overline{PQ}\tan 45^\circ = \sqrt{a^2 - x^2}$$

이때 $\triangle PQR$의 넓이 $S(x)$는

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}(a^2-x^2)$$

따라서 그릇 D에 담긴 물의 부피 $V_D$ 는

$$\begin{aligned} V_D &= \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{2a^3}{3} \end{aligned}$$

남은 물의 부피가 $\frac{16}{3}$이므로 그릇 D의 밑면의 반지름 $a$는

$$\frac{2a^3}{3} = \frac{16}{3}$$

이고, 따라서 $a=2$ 이다.
다시 그릇 D를 $\theta=0^\circ$ 이 되도록 바로 놓았을 때 물의 높이가 $d$이면

$$\pi a^2 d = 4\pi d = \frac{16}{3}$$

이므로, 따라서 $d=\frac{4}{3\pi}$이다.

[문제 2-4]

세트상품에 포함된 그릇 A, B, C, D의 개수를 각각 $m,\ n,\ p,\ q$라고 할 때 그릇 A, B, C, D는 반드시 1개 이상 포함되어야 하므로

$$m \geq 1,\ n \geq 1,\ p \geq 1,\ q \geq 1$$

의 조건을 만족해야 한다.
$(m-1)^2+2(n-1)^2 \geq 4$를 만족해야 하므로

(1) $m=1$인 경우에 $n \geq 3$이다.
(2) $m=2$인 경우에 $n \geq 3$이다.
(3) $m \geq 3$인 경우에 $n \geq 1$이다.

(1) ~ (3)에 해당하는 경우의 수를 구하면

(1) $m=1,\ n=3,\ p=1,\ q=1$을 반드시 포함하고,

그릇 B, C, D를 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우: ${}_3H_6 = \frac{\{6+(3-1)\}!}{6!\,(3-1)!} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$

(2) $m=2,\ n=3,\ p=1,\ q=1$을 반드시 포함하고,

그릇 B, C, D를 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우: ${}_3H_5 = \frac{\{5+(3-1)\}!}{5!\,(3-1)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$

(3) $m=3,\ n=1,\ p=1,\ q=1$을 반드시 포함하고,

그릇 A, B, C, D를 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우: ${}_4H_6 = \frac{\{6+(4-1)\}!}{6!\,(4-1)!} = \frac{9!}{6!\,3!} = 84$

따라서 해당하는 전체 경우의 수는 $28+21+84=133$이다.

[문제 2-5]

점 F의 좌표를 $(0, f)$, 점 G의 좌표를 $(g, 0)$이라고 하면, 유리벽은 다음과 같은 직선의 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{x}{g}\right)+\left(\frac{y}{f}\right)=1$$

유리벽은 점 $(1, 2)$를 지나는 직선이므로, 위의 방정식에 $x=1$과 $y=2$를 대입하면,

$$\left(\frac{1}{g}\right)+\left(\frac{2}{f}\right)=1$$

$$f=\frac{2g}{g-1}$$

를 만족한다.

$\triangle EFG$의 넓이 $S$는 $\frac{1}{2}fg$ 이므로

$$S(g)=\frac{g^2}{g-1}$$

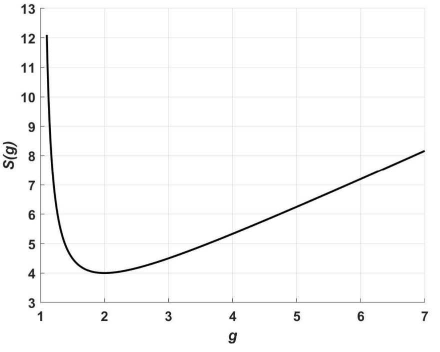
이다. 유리벽과 공장의 두 벽이 삼각형을 이루기 위해서는 $g>1$이어야 하고, 이 구간에서 $S(g)$를 $g$에 관하여 미분한 도함수 $S'(g)$가 0이 되는 $g$값을 구하면,

$$S'(g)=\frac{2g(g-1)-g^2}{(g-1)^2}=\frac{g(g-2)}{(g-1)^2}=0$$

$$g=2$$

이다. 함수 $S(g)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $g$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $S'(g)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $S(g)$ | | $\searrow$ | 4<br>(극소) | $\nearrow$ |




따라서 $S(g)$는 $g$가 $2$일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $\triangle EFG$의 넓이를 가장 작게 하는 점 $G$의 위치는 $(2,0)$이다.