(1) 공학계열

【문제 1】 (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가) 음파란 음원에서 발생된 공기의 진동이 주변으로 퍼져나가는 현상이다. 소리를 측정하는 측정기에 전달된 진동은 $A\sin(2\pi ft)$의 식으로 근사적인 표현이 가능하다. 이 표현식에서 A는 진폭, f는 진동수, t는 시간이다. 큰 소리와 작은 소리의 차이는 진폭의 차이에 의한 것이고, 소리의 높이 차이(고음과 저음의 차이)는 진동수의 차이에 의한 것이다.

나) 도플러(Doppler) 효과란 음원 또는 측정기의 위치가 시간에 따라 변할 때, 측정되는 진동수 f가 음원의 진동수 f_0와 차이가 생기는 현상을 말한다. 측정기의 이동에 의한 측정기와 음원 간 거리(l)의 시간에 대한 변화율($\frac{dl}{dt}$)을 p라고 하면, 측정되는 진동수 f는 (식1-1)과 같이 표현된다.

$$f = \frac{340-p}{340} f_0 \quad [Hz] \qquad \text{(식1-1)}$$

p가 음(-)의 값일 때 f는 f_0보다 높아짐을 알 수 있고, p가 양(+)의 값일 때 f는 f_0보다 낮아짐을 알 수 있다. p는 길이를 시간으로 나눈 물리량이므로 단위는 m/s가 된다. 위의 수식에 사용된 숫자 340은 14.2 ^oC 에서 음파의 공기 중 진행속도인 340 m/s를 대입한 것으로 음파의 진동수와는 무관한 상수이다.

한편 음원의 이동에 의한 측정기와 음원 간 거리의 시간에 대한 변화율을 q라고 하면, 측정되는 진동수 f는 (식1-2)와 같이 표현된다.

$$f = \frac{340}{340+q} f_0 \quad [Hz] \qquad \text{(식1-2)}$$

[문제 1-1] 어떤 음원의 진동수 f_0가 340 Hz이고, 좌표평면 상에서 이동하는 측정기의 x 좌표와 y 좌표는 아래와 같은 수식으로 각각 정해진다. 수식에 사용된 시간(t)의 단위는 초(s)이고, 각 좌푯값의 단위는 미터(m)이다.

$$x \text{ 좌표} : x = \cos t \quad (t \geq 0)$$
$$y \text{ 좌표} : y = \sin t \quad (t \geq 0)$$

한편 음원의 위치는 좌표 (-1, -1)에 고정되어 있다. 이와 같은 상황에서 측정기에 측정되는 소리의 진동수 f를 시간 t에 대한 함수로 나타내시오.

[문제 1-2] 문제 1-1에 주어진 상황에서, 측정기가 음원에 가장 가까운 위치를 처음 통과하는 시간과 그 때 측정되는 소리의 진동수를 구하시오. 또한, 가장 먼 위치를 처음 통과하는 시간과 그 때 측정되는 소리의 진동수를 구하시오.

[문제 1-3] 문제 1-1에서 구한 진동수의 시간에 대한 함수의 도함수를 구하고, 이로부터 진동수의 최댓값과 최솟값이 처음 나타나는 시간을 각각 구하시오. 또한, 그 때의 진동수를 각각 구하시오.

【문제 2】 (40점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가) 오존(O_3, 분자량 = 48 g/mol)은 산소 원자 3개로 이루어져 있으며, 상온 대기압에서 푸른색을 띤 기체이다. 일반적으로 오존은 성층권의 상부에 위치한 오존층에 밀집되어 있으며, 태양에서 오는 해로운 자외선을 흡수하기 때문에 지구의 생명체에게 유익하다. 오존 분자가 태양빛의 자외선을 흡수하면 오존은 산소 분자(O_2, 분자량 = 32 g/mol)와 산소 원자로 쪼개진다. 단원자 상태의 산소 원자는 매우 불안정하므로 또 다른 오존 분자와 빠르게 반응하여 두 개의 산소 분자를 생성한다. 자외선의 흡수는 오존을 파괴하므로 성층권의 오존 농도가 일정하게 유지되기 위해서 오존은 화학반응에 의해 끊임없이 생성되어야 한다. 태양 복사에너지는 산소 분자를 두 개의 산소 원자로 쪼갤 수 있으며, 각 산소 원자는 또 다른 산소 분자와 반응하여 오존 분자를 생성한다. 오존층 내에서 오존의 분해와 생성은 반복적으로 일어나기 때문에 오존과 산소의 상대적인 양은 일정하게 유지된다.

$$\text{오존분해}\begin{cases} O_3 \xrightarrow{\text{자외선}} O_2 + O \\ O + O_3 \longrightarrow 2O_2 \end{cases}$$

$$\text{오존생성}\begin{cases} O_2 \xrightarrow{\text{자외선}} 2O \\ O_2 + O \longrightarrow O_3 \end{cases}$$

냉장고, 에어컨 등의 냉각장치에서 냉매로 사용되는 프레온가스(CCl_2F_2)는 오존과 산소 간의 양적 균형을 해치는 오염물질로 보고되고 있다. 프레온가스에서 분리된 염소 원자(Cl)는 아래 반응식과 같은 연쇄 반응에 의해 오존이 산소로 분해되는 과정에서 촉매의 역할을 하여 오존 분자의 분해를 가속시킨다.

$$\text{오존분해}\begin{cases} Cl + O_3 \longrightarrow ClO + O_2 \\ ClO + O_3 \longrightarrow 2O_2 + Cl \end{cases}$$

나) 기체분자운동론은 기체 분자를 질량을 가진 탄성 입자로 보고 이러한 입자들의 평균적 운동 양상으로 기체의 성질을 설명하는 이론이다. 기체분자운동론에서 기체는 그 입자(분자)들이 서로 멀리 떨어져 있기 때문에 독립적으로 직선운동하며, 기체 분자들 간의 탄성충돌을 통해 에너지를 서로 전달한다고 본다. 한편, 기체의 거시적 성질은 기체 분자 개개의 역학적 운동보다는 계에 존재하는 분자 전체의 평균 운동 상태에 의해 결정되므로 독립된 분자들의 운동을 통계적으로 취급하여 결정된다. 동일한 질량의 분자로 이루어진 기체라 하더라도 그 분자들의 운동속력은 상당히 큰 범위에 걸쳐 분포되어 있다. 간혹 매우 빠르게 움직이는 분자가 나타나기도 하며 이것이 얼마 후에는 움직임이 아주 느려지기도 한다. 이는 끊임없이 분자들이 탄성 충돌을

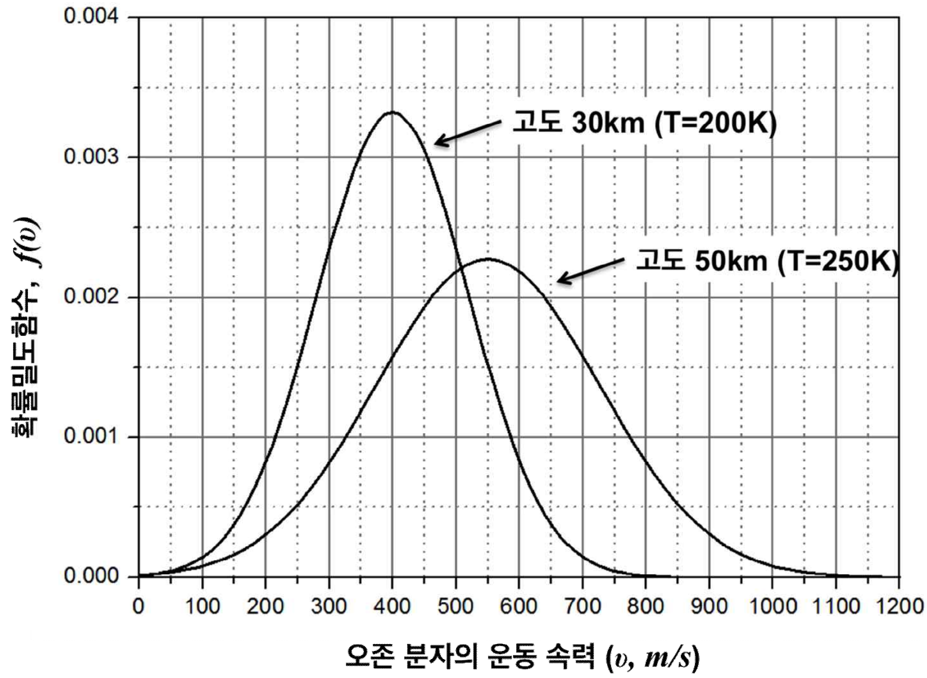
통해 서로 에너지를 주고받기 때문이다. 온도가 일정하다면 분자들의 운동속력 분포는 시간이 지나도 그 형태가 변함이 없다. 다만, 온도가 상승하면 전체적으로 운동속력이 증가한다. 분자들의 운동속력 분포와 온도에 대한 상관관계가 맥스웰에 의해 정리되었고, 이러한 확률밀도함수 형태의 분포함수를 맥스웰-볼츠만 분포함수라 한다.

다) 반응속도는 주어진 조건에서 반응이 얼마나 빨리 일어나는지에 대한 척도이며, 생성물의 생성속도로 산출된다. 반응속도에 영향을 주는 조건들은 온도, 반응물 농도, 표면적, 촉매의 존재여부 등을 포함한다. 일반적으로 더 높은 온도에서 반응은 더 빠르게 진행된다. 반응속도와 온도의 상관관계는 충돌이론에서 효과적으로 설명하고 있다. 충돌이론에 의하면 반응이 일어나기 위해 반응물 분자들은 충분한 운동에너지를 가지고 충돌해야 한다. 이런 경우를 유효충돌이라 하며, 여러 건의 충돌 중에서 유효충돌하는 경우에만 반응을 통해 생성물을 만들 수 있다. 반응물 분자가 반응에 성공하기 위해 충돌 시 가져야 할 최소한의 에너지를 활성화 에너지라 한다. 계의 온도가 올라가면 반응물 분자들의 평균 운동에너지는 증가하고, 이를 통해 전체 충돌 중 유효충돌의 비율이 증가하며, 이에 비례하여 반응속도도 증가하게 된다. 촉매의 존재 역시 반응속도에 직접적인 영향을 미친다. 촉매는 반응에서 자신은 소모되지 않고 반응이 일어나는 경로를 변화시킨다. 새로운 반응 경로는 더 낮은 활성화 에너지를 가진 경로이다. 활성화 에너지가 더 낮아지면 반응물 분자 중 새로 설정된 최소한의 에너지 요구를 충족할 수 있는 분자들의 비율이 많아지고, 이는 곧 반응속도의 증가로 이어진다.

라) [표 2-1] 표준정규분포표

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2150	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767

※ 오존 분자(O_3)의 분해반응을 기체분자운동론의 관점에서 설명하고자 한다. 촉매가 없는 반응에서 오존 분자 1 mol의 분해반응에 대한 활성화 에너지는 8640 J/mol 이다. 성층권 내 고도 30 km와 50 km 지점의 온도가 각각 200K, 250K 이라고 할 때, 각 고도에서 오존 분자의 운동속력(v)은 아래 그림과 같은 분포를 갖는다. 오존 분자의 운동속력 분포가 정규분포를 따른다고 가정하고, 이 때 표준편차는 200K 온도에서 120 m/s, 250K 온도에서는 175 m/s이다. 다음 물음에 답하시오.



[문제 2-1] 고도 30 km 지점과 50 km 지점에서 각각 평균운동속력을 갖는 오존 분자 1 mol의 운동에너지의 차이를 J (Joule) 단위로 구하시오.

[문제 2-2] 고도 50 km 지점에서 유효충돌을 통해 성공적으로 분해반응을 일으키는 오존 분자의 비율이 몇 %인지 구하시오.

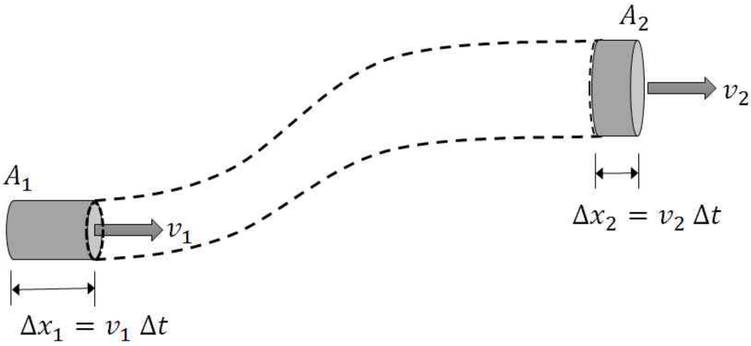
[문제 2-3] 제시문 가)와 다)에 기술한 바와 같이 대기로 배출된 프레온가스로부터 분해된 염소가 촉매 작용을 하여 오존 분해 반응속도를 증가시킨다. 고도 30 km 지점에 프레온가스가 유출되어 오존 분해 반응속도가 6배로 증가하였다. 이 때 오존 분해반응에 성공하기 위해 오존 분자가 가져야 할 최소 운동속력을 구하시오.

【문제 3】 (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

아래의 제시문에서 ρ는 유체의 밀도, A는 유체가 흐르는 파이프의 단면적, v는 그 단면에 수직한 유체의 속도, p는 압력, h는 높이, g는 중력가속도, t는 시간, x는 이동거리를 의미한다. 아래첨자 1, 2는 각각 유동의 입구와 출구를 의미한다.

가) 유체역학에서 연속방정식이란 주어진 공간 내에서의 질량보존법칙을 의미한다. 즉, 주어진 공간 내의 질량이 시간에 따라 일정하다면, 주어진 시간 동안(Δt)에 이 공간 내로 유입된 질량과 유출된 질량은 같아야 한다.



[그림 3-1] 유체에서의 연속방정식

Δt 동안 입구로 유입된 유체의 질량은 밀도와 유입된 부피의 곱으로 표현된다. 즉,

$$\Delta t \text{ 동안 유입된 질량} = \rho_1 A_1 \Delta x_1 \qquad \text{(식3-1)}$$

Δt가 0에 가까운 순간을 고려하면, $v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t}$이므로 주어진 짧은 시간 동안에 유입된 질량은 $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t$로 표현된다. 같은 방법으로 출구에서 유출된 질량은 $\rho_2 A_2 v_2 \Delta t$로 표현된다.

[그림 3-1]에서 점선으로 표시된 영역의 유체의 질량이 시간에 따라 변하지 않는다면, 주어진 시간 동안 유입된 질량은 유출된 질량과 같아야 한다. 따라서, 다음의 식이 성립한다.

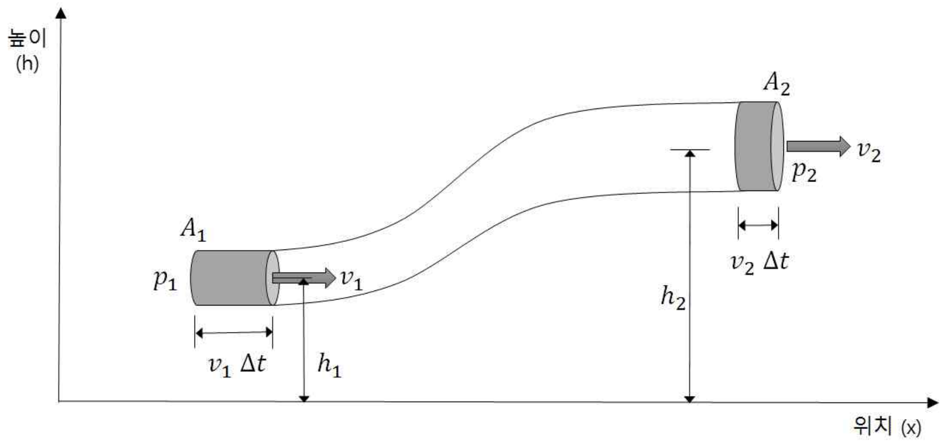
$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \qquad \text{(식3-2)}$$

만약 밀도가 일정하다면, 연속방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \text{(식3-3)}$$

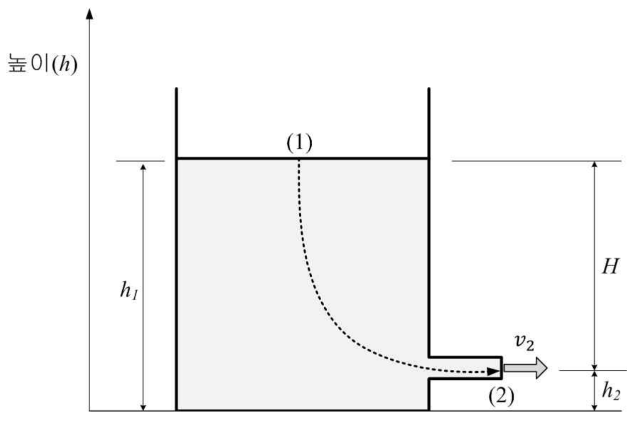
나) 실제 유동을 여러 가정을 통해 단순화하면 유체의 압력, 속도, 높이의 관계는 베르누이 방정식으로 나타낼 수 있다. 이 경우, [그림 3-2]와 같은 유동에서 다음의 베르누이 방정식이 성립한다.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{일정} \qquad \text{(식3-4)}$$



[그림 3-2] 유체의 압력, 속도, 높이의 관계

다) 베르누이 방정식을 이용하면 [그림 3-3]에서 배출구를 통한 물의 배출 속력을 구할 수 있다.



[그림 3-3] 배출구를 갖는 물통

물통 상부의 물 표면 (1)과 배출구의 끝부분 (2) 사이에 베르누이 방정식을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \qquad \text{(식3-5)}$$

대기 중에 노출된 물통 상부의 물 표면과 배출구의 끝부분의 압력은 대기압으로 동일하다. 즉, $p_1 = p_2 =$ 대기압이다.
물통의 물이 줄어드는 속력 v_1과 배출구의 끝부분에서의 물의 속력 v_2의 관계는 연속방정식을 사용하면 구할 수 있다. 즉, $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$이다. 밀도는 일정하므로,

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 \qquad \text{(식3-6)}$$

(식3-6)을 (식3-5)의 베르누이 방정식에 대입한 후, v_2에 대해 정리하면,

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{1-(A_2/A_1)^2}} = \sqrt{\frac{2gH}{1-(A_2/A_1)^2}} \qquad \text{(식3-7)}$$

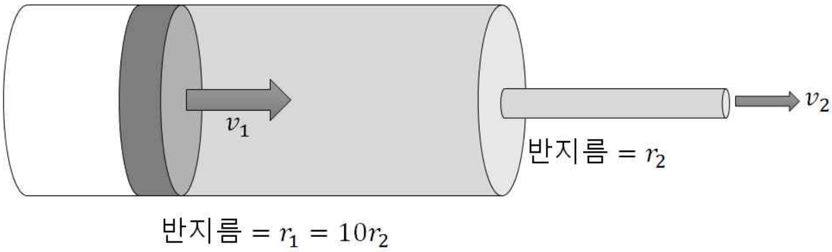
만약 물통의 지름이 배출구의 지름에 비해 매우 크다면 $(A_2/A_1)^2$은 매우 작은 값을 가지므로 무시할 수 있다. 즉, $(A_2/A_1)^2$은 0으로 가정할 수 있다. 따라서 배출구의 끝부분에서 물의 속력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_2 = \sqrt{2gH} \qquad \text{(식3-8)}$$

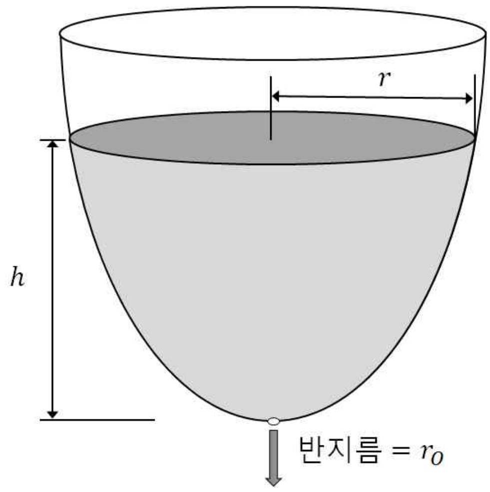
즉, 배출구에서의 물의 속력은 물통의 형상에 상관없이 물의 높이만의 함수로 표현된다.

※ 아래 문제에서는 제시문의 연속방정식과 베르누이 방정식을 적용할 수 있다고 가정한다.

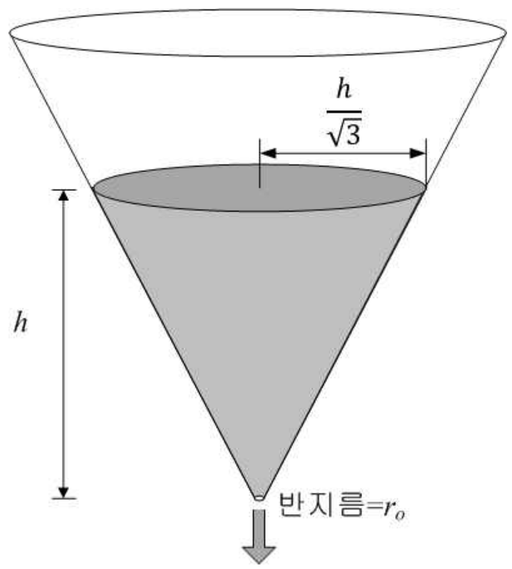
[문제 3-1] 그림과 같이 물이 채워진 주사기의 피스톤이 속력 v_1으로 이동할 때, 주사기 바늘을 통해 빠져 나오는 물의 속력 v_2를 v_1의 식으로 나타내시오. 단, 주사기의 반지름(r_1)은 바늘의 반지름(r_2)의 10배이고, 물의 밀도는 일정하다.



[문제 3-2] 그림과 같이 물의 수위 h가 감소하는 속력이 k로 일정한 물통을 만들고자 한다. 이 때, 물통의 반지름 r을 물의 높이 h의 함수로 표현하시오. 단, 원형 배출구의 반지름은 r_o이고, 중력가속도 g는 아래 방향으로 작용한다. 또한, r은 r_o에 비해 매우 크다고 가정한다.



[문제 3-3] 그림과 같은 원뿔형 물통의 아래 부분에 있는 반지름 r_o인 원형 배출구를 통해 물이 흘러 나간다. 물의 높이가 $h=h_o$에서 $h=\frac{1}{4}h_o$로 줄어드는데 걸리는 시간을 구하시오. 단, 중력가속도 g는 아래 방향으로 작용하고, h_o는 r_o에 비해 매우 크다고 가정한다.



2) 출제의도, 채점기준, 모범답안

(1) 공학계열

■ 출제의도

[문제 1]

본 문제는 고등학교 수학 교과과정에서 배운 함수의 극댓값과 극솟값을 찾기 위해 함수를 미분하여 도함수를 구하고 이를 활용하는 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 또한, 도플러 효과를 다룬 제시문을 통해 고등학교 과학 교과과정에서 배운 음파의 진동수 개념과 도플러 효과에 대한 이해를 평가하는 내용을 담고 있다. 시간을 변수로 음원과 측정기 간 거리를 표현하는 능력과 이를 통해 얻어진 함수의 도함수가 도플러 효과를 유발하는 주요인임을 이해하는 능력을 평가하고자 하였다.

[문제 2]

본 문제는 고등학교 수학 교과과정에서 배운 통계의 활용 및 계산 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 또한, 기체의 반응을 다룬 제시문을 통해 고등학교 과학 교과과정에서 배운 운동에너지의 개념, 기본적인 물리량 및 촉매작용의 이해를 평가하는 내용을 담고 있다. 주어진 정규분포도의 정보를 해석하고, 표준정규분포로의 변환 및 표준정규분포표를 이용한 계산 등의 내용을 다루어 통계에 대한 기본적인 이해 정도와 활용능력을 평가하고자 하였다.

[문제 3]

베르누이 정리는 초등학교 수준의 과학실험에도 소개될 만큼 유명한 법칙이다. 제시문에는 문제 풀이에 필요한 법칙에 대한 설명이 있으며, 결과 식만을 적용하여도 문제를 풀 수 있다. 문제 3-1은 제시문의 활용을 유도하기 위해 출제한 문제이고, 3-2번과 3-3번은 제시문의 결과식을 적용하여 적분을 하는 문제이다. 제시문과 도형의 부피 적분을 이용하면 해결할 수 있는 문제이다.

■ 채점기준

[문제 1]

[문제 1-1] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 10점이 되도록 한다.

[문제 1-2] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 7점이 되도록 한다.

[문제 1-3] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 18점이 되도록 한다.

[문제 2]

[문제 2-1] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 10점이 되도록 한다.

[문제 2-2] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 10점이 되도록 한다.

[문제 2-3] 모범답안에 표시된 단계별 부분점수들을 모두 합하면 총 10점이 되도록 한다.

[문제 3]
[문제 3-1] 부호 틀리면 2점 감점, 계산 과정 중 실수는 3점 감점
[문제 3-2] 부호 틀리면 2점 감점, 계산 과정 중 실수는 3점 감점
[문제 3-3] 부호 틀리면 2점 감점, 계산 과정 중 실수는 3점 감점

■ 모범답안

【문제 1】 (30점)

[문제 1-1]

(1단계) 부분점수 3점
음원과 측정기 간 거리 l을 구하기 위해 두 좌표 사이의 거리를 구하는 공식에 대입하여 아래와 같은 수식으로 올바르게 유도했으면 부분점수 3점 부여함.

$$l(t)=\sqrt{[\cos t-(-1)]^2+[\sin t-(-1)]^2}=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+2(\cos t+\sin t)+2}$$
$$=\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}$$

(2단계) 부분점수 5점
거리 $l(t)$의 t에 대한 변화율을 구하기 위해 아래와 같이 $l(t)$를 올바르게 미분했으면 부분점수 5점 부여함.

$$\frac{dl}{dt}=p(t)=\frac{2(-\sin t+\cos t)}{2\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}}=\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}}$$

(3단계) 부분점수 2점
문제에서 주어진 f_0=340과 위에서 구한 $p(t)$를 측정기가 이동하는 경우의 도플러 효과와 관계된 식 $f=\frac{340-p}{340}f_0$에 대입했으면 2점 부여함.

$$f=\frac{340-p}{340}\times 340=340-p=340+\frac{\sin t-\cos t}{\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}}$$ (※ 이 후부터 $f(t)$라고 함)

※ 다음과 같은 풀이도 올바른 풀이임.

$\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$이고,

$\cos t-\sin t=\sqrt{2}\cos(t+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})$이므로,

$\sin(t+\frac{\pi}{4})$, $\cos(t-\frac{\pi}{4})$, $\cos(t+\frac{\pi}{4})$, $\sin(t-\frac{\pi}{4})$ 등이 포함된 식으로 유도될 수 있으며, 유도과정이 맞으면 부분점수를 모두 받을 수 있음. 예를 들어 아래와 같은 답도 유도될 수 있음.

$l(t)=\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})+3}$, $\quad \frac{dl}{dt}=p(t)=\frac{\sqrt{2}\cos(t+\pi/4)}{\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3}}$,

$f=f(t)=340-\frac{\sqrt{2}\cos(t+\pi/4)}{\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3}}$

[문제 1-2]

(1단계) 부분점수 4점

($\cos t$, $\sin t$)로 주어진 측정기의 이동 궤적은 좌표평면에서 반지름이 1인 원이다. 음원의 좌표 (-1, -1)과 원의 중심을 모두 지나는 직선과 x축이 이루는 각도는 $\frac{\pi}{4}$이다. 또한 이 직선과 원이 만나는 두 교점 중 좌표 (-1, -1)에 더 가까운 교점이 음원과 측정기 간 거리가 가장 짧은 지점(=가까운 지점)이며, 이 위치는 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$이다. 한편 두 교점 중 좌표 (-1, -1)에서 더 먼 교점이 음원과 측정기 간 거리가 가장 긴 지점(=먼 지점)이며, 이 위치는 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$이다.

※ 좌표평면에 해당 도형을 그리고, 그림 안에 위 풀이에서 언급된 요소들이 모두 표시되어 있으면 올바른 풀이로 인정함.

(2단계) 부분점수 3점

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$에 이르는 시간은 $t=2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$이므로, $t=\frac{5\pi}{4}$ 초가 처음으로 가장 가까운 지점을 통과하는 시간이며, 이 때 진동수는 $f(t)$에 $t=\frac{5\pi}{4}$를 대입한 값, 340+0=340 Hz이다.

$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$에 이르는 시간은 $t=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$이므로, $t=\frac{\pi}{4}$가 처음으로 가장 먼 지점을 통과하는 시간이며, 이 때 진동수는 $f(t)$에 $t=\frac{\pi}{4}$ 초를 대입한 값, 340+0=340 Hz이다.

※ 다음과 같은 예시도 올바른 풀이이며 이에 대한 채점기준을 아래와 같이 정함.

문제 1-1에서 구한 $\frac{dl}{dt}=p(t)=\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}}$을 이용하여 풀이하는 경우로서,

(1단계) 부분점수 3점

$\frac{dl}{dt}=\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}}=0$인 $t=n\pi+\frac{\pi}{4}$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$를 찾는다.

$l(t)=\sqrt{2(\cos t+\sin t)+3}$는 주기함수이므로 극댓값이 최댓값이고, 극솟값이 최솟값이다.

(2단계) 부분점수 4점

$0 \le t < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{dl}{dt} > 0$ 이고, $\frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$ 에서 $\frac{dl}{dt} < 0$ 이므로 $t = \frac{\pi}{4}$ 가 $l(t)$의 극댓값 즉, 최댓값이 나타나는 첫 번째 시간이다. 이 때 진동수는 $f(t)$에 $t = \frac{\pi}{4}$ 초를 대입한 값, 340+0=340 Hz이다.

$\frac{\pi}{4} < t < \frac{5\pi}{4}$ 에서 $\frac{dl}{dt} < 0$ 이고, $\frac{5\pi}{4} < t < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{dl}{dt} > 0$ 이므로 $t = \frac{5\pi}{4}$ 초가 $l(t)$의 극솟값 즉, 최솟값이 나타나는 첫 번째 시간이다. 이 때 진동수는 $f(t)$에 $t = \frac{5\pi}{4}$ 초를 대입한 값, 340+0=340 Hz이다.

[문제 1-3]

(1단계) 부분점수 6점

문제 1-1에서 구한 $f(t) = 340 + \frac{\sin t - \cos t}{\sqrt{2(\cos t + \sin t) + 3}}$ 를 아래와 같이 미분한다.

$$\frac{df}{dt} = \frac{(\cos t + \sin t)\sqrt{2(\cos t + \sin t) + 3} - \frac{(\sin t - \cos t)(-\sin t + \cos t)}{\sqrt{2(\cos t + \sin t) + 3}}}{2(\cos t + \sin t) + 3}$$

$$= \frac{(\cos t + \sin t)(2(\cos t + \sin t) + 3) + (\sin t - \cos t)^2}{[2(\cos t + \sin t) + 3]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2(\cos t + \sin t)^2 + 3(\cos t + \sin t) + (\sin t - \cos t)^2}{[2(\cos t + \sin t) + 3]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3 + 2\sin t cos t + 3(\cos t + \sin t)}{[2(\cos t + \sin t) + 3]^{\frac{3}{2}}}$$

※ 문제 1-1에서 $f(t)$를 아래와 같이 유도한 경우, 도함수는 아래와 같이 전개됨. 채점기준은 동일하게 적용됨.

문제 1-1에서 구한 $f = 340 - \frac{\sqrt{2}\cos(t + \pi/4)}{\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3}}$ 를 아래와 같이 미분한다.

$$\frac{df}{dt} = -\frac{-\sqrt{2}\sin(t + \pi/4)\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3} - \frac{\sqrt{2}\cos(t + \pi/4)[2\sqrt{2}\cos(t + \pi/4)]}{2\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3}}}{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin(t + \pi/4)\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3} + \frac{2\cos^2(t + \pi/4)}{\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3}}}{2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3}$$

$$= \frac{4\sin^2(t + \pi/4) + 3\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 2\cos^2(t + \pi/4)}{[2\sqrt{2}\sin(t + \pi/4) + 3]^{\frac{3}{2}}}$$

(2단계) 부분점수 6점

도함수를 다음과 같이 추가적으로 전개한다.

$$\frac{df}{dt}=\frac{3+2\sin t\cos t+3(\cos t+\sin t)}{[2(\cos t+\sin t)+3]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+2\sin t\cos t+3(\cos t+\sin t)+2}{[2(\cos t+\sin t)+3]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(\cos t+\sin t)^2+3(\cos t+\sin t)+2}{[2(\cos t+\sin t)+3]^{\frac{3}{2}}}=\frac{(\cos t+\sin t+1)(\cos t+\sin t+2)}{[2(\cos t+\sin t)+3]^{\frac{3}{2}}}$$

$f(t)$의 극값이 나타나는 t는 $\frac{df}{dt}=0$을 만족하는 t인데, 식의 분모는 모든 t에 대해 0보다 크고, 분자의 인수 중 $\cos t+\sin t+2$는 0이 될 수 없으므로,

$\cos t+\sin t+1=0$ 즉, $\cos t+\sin t=-1$(인수분해 대신 그 전에 $\cos t+\sin t=x$로 치환하고, 이차방정식 근의 공식을 사용해도 됨)을 만족하는 t를 찾으면 $t=2n\pi+\pi$ 또는 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$ 이다.

또는 $\cos t+\sin t+1=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})+1=0$ 즉, $\sin(t+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$인 t를 찾아도 동일한 답이 유도됨.

※ 문제 1-1에서 $f(t)$를 아래와 같이 유도한 경우, 1단계에서 이어지는 2단계 과정은 아래와 같이 전개됨. 채점기준은 동일하게 적용됨.

문제 1-1에서 구한 $f=340-\frac{\sqrt{2}\cos(t+\pi/4)}{\sqrt{2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3}}$

$$\frac{df}{dt}=\frac{4\sin^2(t+\pi/4)+3\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+2\cos^2(t+\pi/4)}{[2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2\sin^2(t+\pi/4)+3\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+2}{[2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+1)(\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+2)}{[2\sqrt{2}\sin(t+\pi/4)+3]^{\frac{3}{2}}}$$

(3단계) 부분점수 6점

$f(t)$는 주기가 2π인 주기함수이므로 극댓값이 최댓값이고, 극솟값이 최솟값이다.

$0\le t<\pi$에서 $\frac{df}{dt}>0$이고, $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$에서 $\frac{df}{dt}<0$이므로 $t=\pi$ 초가 처음으로 극댓값 즉, 최댓값이 나타나는 시간이다.

$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$에서 $\frac{df}{dt}<0$이고, $\frac{3\pi}{2}<t<3\pi$에서 $\frac{df}{dt}>0$이므로 $t=\frac{3\pi}{2}$ 초가 처음으로 극솟값 즉, 최솟값이 나타나는 시간이다.

최댓값은 $f(t)$에 $t=\pi$를 대입했을 때의 값, 340+1=341 Hz이다.

최솟값은 $f(t)$에 $t=\frac{3\pi}{2}$를 대입했을 때의 값, 340-1=339 Hz이다.

【문제 2】 (40점)

[문제 2-1]
■ 채점기준 : 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

문제에서 주어진 정규분포 곡선으로부터 평균운동속력을 구한다. 즉, 고도 30km 지점의 온도는 200K이고 그 때의 평균운동속력은 400m/s이다. 고도 50km지점의 온도는 250K이고 그 때의 평균운동속력은 550m/s이다. (4점)

운동에너지 $KE=\frac{1}{2}mv^2$ 으로 정의되며, 오존분자 1몰의 질량은 분자량인 48g/mol 이므로, 서로 다른 두 지점에서 평균속력을 갖는 오존 분자들의 평균운동에너지 차이는,

$$KE_{50km}-KE_{30km}=\frac{1}{2}(48g)(v_{50km}^2-v_{30km}^2)$$
$$=\frac{1}{2}\times(0.048kg)\times(550^2-400^2)m^2/s^2$$
$$=0.024\times(302500-160000)=3420\,kg\cdot m^2/s^2=3420J$$

이다. (6점)

※ $1J=1kg\cdot m^2/s^2$ 의 단위 환산이 잘못된 경우 3점 감점
※ 질량을 kg 단위가 아닌 g 단위를 그대로 사용하여 3420000 J로 답한 경우 3점 감점

[문제 2-2]
■ 채점기준 : 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

문제에 주어진 대로 고도 50km 지점에서의 오존분자 운동속력분포는 평균(m) 550 m/s, 표준편차(σ) 175 m/s 의 정규분포 $N(550,175^2)$을 따른다.

유효 충돌을 통해 성공적으로 분해반응을 일으키기 위해서는 오존분자들은 활성화 에너지 (8640 J/mol) 이상의 운동에너지를 가져야 하며, 이만큼의 운동에너지를 갖기 위한 분자의 운동속력은 다음의 과정을 통해 구할 수 있다.

$$v=\sqrt{\frac{2\times KE}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 8640}{48\times10^{-3}}}=\sqrt{360000}=600m/s$$

즉, 600m/s 이상의 운동속력을 갖는 분자는 유효충돌하여 반응에 성공한다. (4점)

분자의 운동속력의 확률변수 X 에 대해, 확률변수 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$$P(X \geq 600) = P(Z \geq \frac{600-550}{175}) = P(Z \geq 0.29)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.29)$$

제시문 라)의 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 0.29) = 0.1141 \text{ 이므로}$$
$$P(X \geq 600) = 0.5 - 0.1141 = 0.3859$$

즉, 분해반응을 일으키는 오준 분자의 비율은 38.59% 이다. (6점)

[문제 2-3]

■ 채점기준 : 총 10점을 배점하고 단계별 부분점수는 다음과 같다.

문제에 주어진 대로 고도 30km 지점에서의 오존분자 운동속력분포는 평균(m) 400 m/s, 표준편차(σ) 120 m/s 의 정규분포 $N(400, 120^2)$을 따른다.

촉매가 없는 환경에서 반응에 필요한 오존 분자의 최소 운동속력은 [문제 2-2]에서 보인 바와 같이 600m/s 이다.
이에 대해

$$P(X \geq 600) = P(Z \geq \frac{600-400}{120}) = P(Z \geq 1.67)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.67)$$

제시문 라)의 표준정규분포표에서

$$P(0 \leq Z \leq 1.67) = 0.4525 \text{ 이므로}$$
$$P(X \geq 600) = 0.5 - 0.4525 = 0.0475$$

즉, 촉매가 없는 환경에서 분해반응을 일으키는 오준 분자의 비율은 4.75% 이다. (3점)

프레온가스에서 분해된 염소가 촉매로 작용하여 분해반응속도가 6배로 증가했다면, 유효충돌하는 오존분자의 비율은 $4.75\% \times 6 = 28.5\%$ 가 된다. (2점)

새로 설정된 활성화 에너지에 해당하는 분자운동속력을 Vm/s라 하면 다음의 식이 성립된다.

$$P(Z \geq \frac{V-400}{120}) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq \frac{V-400}{120}) = 0.2850$$

$$P(0 \leq Z \leq \frac{V-400}{120}) = 0.2150$$

제시문 라)의 표준정규분포표에 의하면

$$\frac{V-400}{120} = 0.57$$

$$V = (0.57 \times 120) + 400 = 468.4$$

즉, 오존분자가 가져야 할 최소 운동속력은 468.4 m/s 이다. (5점)

【문제 3】 (30점)

[문제 3-1]

Δt 동안 피스톤에 의해 밀린 질량은 바늘을 통해 빠져나간 질량과 동일하다. 즉,

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

v_2에 대해 정리하면,

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} v_2 = 100 v_1$$

[문제 3-2]

Δt동안 물이 줄어든 질량은 배출구를 통해 빠져나간 질량과 같다. Δt동안 질량 변화를 계산하면,

$$\pi\rho r^2 v_1 \Delta t = \pi\rho r_0^2 v_2 \Delta t$$

또는 $\pi r^2 v_1 \Delta t = \pi r_0^2 v_2 \Delta t$

제시문에서 $v_2 = \sqrt{2gh}$ 이다.

또한 문제에서 $v_1 = k$주어져 있다.. 따라서

$$\pi r^2 (k) \Delta t = \pi r_0^2 \sqrt{2gh}\ \Delta t$$

$$\therefore r = \left(\frac{r_0^2 \sqrt{2gh}}{k} \right)^{1/2} = r_0 \left(\frac{\sqrt{2g}}{k} \right)^{1/2} h^{1/4} = r_0 \frac{(2g)^{1/4}}{\sqrt{k}} h^{1/4}$$

[문제 3-3]

Δt 동안 물통에서 줄어든 물의 질량 = Δt 동안 배출구를 통해 빠져나간 물의 질량

$$\rho \pi r_1^2 v_1 \Delta t = \rho \pi r_0^2 v_2 \Delta t$$

제시문에서 $v_2 = \sqrt{2gh}$ 이고

$v_1 = -\dfrac{dh}{dt}$ 이다.

(부호 틀리면 2점 감점)

$r_1 = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ 을 대입하여 정리하면,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3r_0^2\sqrt{2gh}}{h^2}$$

역함수의 미분성질을 이용하면,

$$\frac{dt}{dh} = -\frac{h^2}{3r_0^2\sqrt{2gh}} = -\frac{h^{3/2}}{3r_0^2\sqrt{2g}}$$

t를 적분하여 h에 대한 함수로 나타내면,

$$t = -\frac{2}{5}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}h^{5/2} + C$$

$h = h_0$에서의 시간은,

$$t_{h_0} = -\frac{2}{5}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}h_0^{5/2} + C$$

$h = \dfrac{1}{4}h_0$일 때의 시간은

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{4}h_0} &= -\frac{2}{5}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{4}h_0\right)^{5/2} + C \\ &= -\frac{2}{5}\frac{1}{32}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}(h_0)^{5/2} + C \end{aligned}$$

따라서, $h = h_0$에서 $h = \dfrac{1}{4}h_0$까지 걸린 시간은

$$t_{\frac{1}{4}h_0} - t_{h_0} = \left(-\frac{2}{5}\frac{1}{32}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}(h_0)^{5/2} + C\right) - \left(-\frac{2}{5}\frac{1}{3r_0^2\sqrt{2g}}(h_0)^{5/2} + C\right)$$

$$\therefore t = \frac{31}{240}\frac{h^{5/2}}{\sqrt{2g}\,r_0^2}$$

(계산 과정 중 실수는 3점 감점)