# 2014학년도 수시모집 논술고사 출제문제 작성 양식

◆ 대학명: 한국항공대학교
◆ 모집시기: 수시1차
◆ 전형명칭: 일반학생전형
◆ 모집계열: 공학계열
◆ 출제유형: 통합교과형 중 자료제시 논술형
◆ 개요

- 시험시간: 120분
- 출제문항수: 3문항
- 답안지 양식, 작성 분량: 무선(지정된 칸 내에서 자유기술)
- 지정된 필기구 : 흑색필기구(볼펜만 사용 가능)
- 수험생 유의사항:
  1. 논술고사 전 별도 예비소집일은 없으며 수험생은 고사 시작 30분 전까지 본교의 지정된 장소에 입실하여야 한다.
  2. 지정된 일시에 논술고사 대기 장소에 입실하지 못한 경우에는 고사응시에 제한을 받을 수 있으며 논술고사 결시자는 불합격 처리 한다.
  3. 논술고사 당일 수험표와 신분증(주민등록증, 운전면허증, 여권, 학생증 등)이 없는 수험생은 논술고사 응시를 제한받을 수 있으며, 수험표를 분실한 경우는 사진 1매를 지참하여 입시 본부에서 재교부 받아야 한다.
  4. 전자 및 통신기기류 등을 지참하고 고사장에 입실할 수 없으며, 발견 시에는 부정행위로 간주한다.
  5. 시험 중 부정행위로 적발되면 퇴실 조치하며, 불합격 처리한다.
  6. 고사장에 입실 후 책상에 부착된 표의 수험번호와 성명을 확인하여야 한다.
  7. 논술고사 답안은 흑색필기구로 작성하여야 하며, 내용수정도 같은 색 필기구를 사용하여야 한다. 답안을 수정할 경우 수정할 부분을 두 줄로 긋고 그은 줄 위에 작성한다.
  8. 다른 필기구를 사용하거나 답안지에 수험생이 누구인지를 나타낼 수 있는 표시를 하면 그 답안지는 무효 처리됨.
  9. 논술고사 답안지는 원칙적으로 교환하여 주지 않으며, 문제지와 답안지는 가지고 나갈 수 없다.

◈ 출제방향(취지) 및 교과서 관련여부 및 근거:

[문제 1]

이등변 삼각형의 기본 성질과 삼각함수의 덧셈, 뺄셈 정리를 이용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구하는 문제이다. 고등학교 수학에서, 이등변 삼각형의 기본 성질과 삼각함수의 덧셈공식 또는 반각공식을 이용한 문제이다.

[문제 2]

본 문제는 고등학교 과학교과에서 다루는 태양에너지, 광합성, 화학반응식, 화학에너지계산, 지구온난화 등의 내용과 공통수학의 삼각함수를 이용한 정사영 계산 등의 내용을 복합적으로 포함하는 문제로 포괄적인 과학지식을 평가하고자 하였다.

[문제 3]

고등학교 수학 교과과정에서 배운 자연상수, 삼각함수 그리고 미분 적분의 기본적인 이해 정도와 활용 및 계산 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 또한, 고등학교 물리 교과과정에서 다루고 있는 파동에 대한 개념적인 이해와 분석 능력을 평가하는데 주안점을 두었다.

◆ 평가기준:

[문제 1]

[문제 1-1] 주어진 문제에 대해, 이등변 삼각형의 특징을 이용할 수 있도록 지시선을 그려서 하나 또는 다수의 이등변 삼각형을 구성하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-2] 주어진 지시문의 프톨레마이오스 정리를 적용하여 삼각형의 빨셈 정리를 유도할 수 있는지 평가한다.

[문제 1-3] 삼각형의 빨셈정리, 또는 반각공식을 이용하여 주어진 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2]

[문제 2-1] 태양상수의 개념을 정확히 이해하고 정사영의 개념을 적용하여 문제에서 요구하는 값을 정확히 산출하는 능력을 평가한다.

[문제 2-2] 태양에너지와 광합성 반응에서 수반되는 화학반응에너지를 연결하는 능력을 평가하며, SI 단위계를 이용한 단위환산, 화학양론계산, 분자량 계산 등의 계산과정을 정확히 도출하는 것이 평가의 기준이 된다.

[문제 2-3] 제시문을 바탕으로 지구온난화와 해양산성화의 연관성을 논리적이며 과학적으로 기술하는 능력을 평가하며, 이 때, 이산화탄소의 용해과정에 대한 화학반응식의 작성 및 용액의 산성화지수 (pH) 의 개념의 이해가 주 평가요소가 된다.

[문제 3]

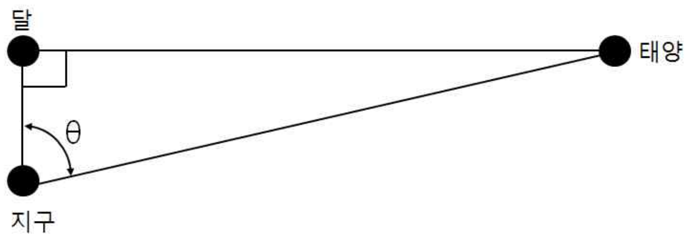
- 파동의 진동수와 파장의 관계를 이해하고 이것을 문제에 적용할 수 있는 능력
- 자연상수와 삼각함수를 이해하고 복소평면에 대한 수학적인 의미를 기술할 수 있는 능력
- 적분 계산을 정확하게 수행할 수 있는 능력

◆ 출제문제:

[문제 1] (40점)

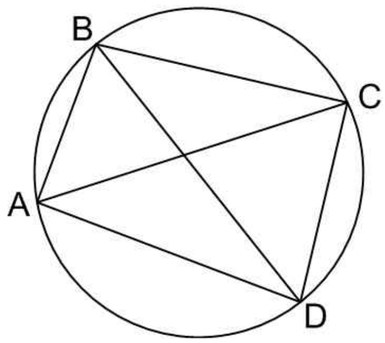
※ 다음 제시문을 읽고 답하시오

가) 고대 그리스 천문학자인 아리스타르쿠스(Aristarchus)는 <그림 1-1>과 같이 달이 정확히 반원 형상일 때 달과 태양의 각도를 관측하여 지구에서 달까지의 거리와 지구에서 태양까지의 거리 비를 구하려고 하였다. 그의 계산은 지구에서 태양까지의 거리가 지구에서 달까지 거리보다 18~20배 먼 것을 보였지만, 당시에는 각도 관측이 부정확하였고 삼각함수 값을 정확히 알지 못하였기 때문에 실제 거리비와는 많은 차이가 있었다. 특정 관측각 $\theta$의 경우, 이등변삼각형의 기하학적 성질을 이용하면 삼각함수의 정확한 값이 없어도 별 사이의 거리를 계산할 수 있다.



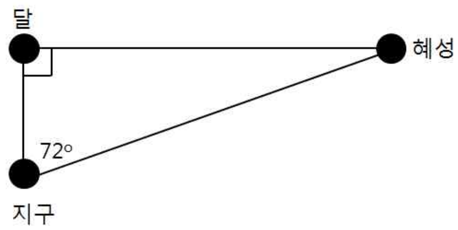

<그림 1-1>

나) ‘프톨레마이오스(Ptolemaeus)의 정리’에 의하면 <그림 1-2>와 같이 원에 내접하는 사각형에서, 서로 마주보는 변 길이의 곱의 합은 두 대각선 길이의 곱과 같다.
즉, $\overline{AB} \times \overline{CD} + \overline{BC} \times \overline{DA} = \overline{AC} \times \overline{BD}$ 가 성립한다. 이 프톨레마이오스의 정리와 원에 내접하는 삼각형 및 사각형의 성질을 이용하여 삼각함수의 덧셈정리를 유도할 수 있다. 또 이 덧셈정리로부터 다양한 삼각함수의 값을 알 수 있다.

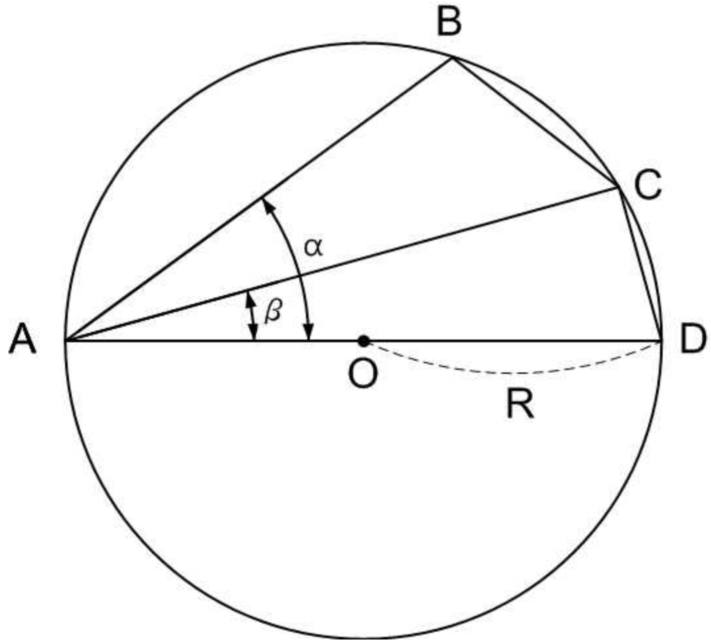



<그림 1-2>

[문제 1-1] 아래 그림과 같이 어떤 혜성과 지구, 달이 72도의 각도를 형성하고 있다. 혜성과 지구 사이의 거리는 달과 지구 사이의 거리의 몇 배인지 설명하여라. 단, 지구와 달, 혜성의 크기는 무시한다.




[문제 1-2] 아래 그림과 같이 반지름 R인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서, 선분 $AD$는 원의 원점 0를 지나고 각 $\angle BAD$는 $\alpha$, $\angle CAD$는 $\beta$이다. 제시문 (나)를 활용하여 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$가 성립함을 설명하여라.




[문제 1-3] [문제 1-2]의 그림에서, $\alpha=45^\circ$, $\beta=30^\circ$, 반지름 $\mathrm{R}=1$인 경우 선분 $BC$의 길이를 구하여라.

[문제 2] (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가) 태양 에너지는 지구의 기후에 힘을 주고 생명을 지탱시켜 주는 열과 빛 형태의 복사 에너지를 말한다. 태양의 전체 전자기복사량 중에서 지구 대기의 바깥 표면에서 평면에 대해 수직으로 들어오는 광선을 측정한 단위 면적 당 태양 전자기복사의 양을 태양상수라 하며, 이 값은 대략 1400 W/$m^2$ 로 측정된다. 따라서, 지구 대기의 바깥 표면에 $1m^2$ 당 1 시간 동안 전달되는 태양에너지의 총량은 1400 Wh 이며, 이는 SI 단위계로 나타내면 (1400 x 3600) J 에 해당하는 양이다. 막대한 양의 태양 복사에너지 중 지구의 단면적에 해당하는 일부만이 지구에 도달하며, 이 중 30%는 대기, 구름, 지표면에 의해 반사되고, 20%는 대기 및 구름에 의해 흡수되며 나머지 50% 정도가 육지 및 해양으로 구성된 지표면에 도달한다. 지표면에 도달한 태양에너지는 열에너지, 화학에너지, 빛에너지, 전기에너지 등 여러 형태의 에너지로 전환된다.

태양전지는 태양 에너지를 전기 에너지로 변환할 수 있는 장치를 말한다. 태양전지에 도달한 빛 에너지 중 일부만이 전기에너지로 변환되며 나머지는 열에너지의 형태로 대기 중에 발산된다. 이 때 태양전지에 의해 생산된 최대 전력과 입사된 태양광 에너지 사이의 비율을 태양전지의 발전효율로 정의하며, 태양광 발전소에 설치되고 있는 태양광 패널의 경우 약 20% 정도의 발전효율을 나타낸다. 태양광 발전소에서는 태양광의 흡수 면적을 증가시켜 충분한 발전량을 확보하기 위해 태양광 패널을 수만 개 이상 연결하여 이용한다.

나) 광합성은 지구상의 생물이 태양 에너지를 이용하여 화합물 형태로 에너지를 저장하는 화학 작용으로, 지구상의 생물계에서 볼 수 있는 가장 중요한 화학 작용 중 하나이다. 이는 식물의 엽록체에서 이루어지는 동화작용을 말하며, 저분자 물질을 사용하여 고분자 물질을 합성하는 동화작용은 반응물보다 생성물의 에너지 수준이 높기 때문에 외부에서 태양광의 형태로 에너지를 흡수해야 한다. 따라서 빛이 없는 경우에는 광합성이 이루어지지 않는다. 광합성의 반응물은 뿌리에서 흡수한 물과 잎의 기공을 통해 흡수한 이산화탄소이며, 광합성 과정에서 유기물인 포도당과 산소가 생성된다. 생성된 포도당은 물에 녹지 않는 형태의 녹말로 전환되어 저장되거나 설탕 등의 형태로 체관을 통해 식물의 다른 조직으로 이동하여 각종 생명활동에 사용된다. 포도당 ($C_6H_{12}O_6$) 을 생성하는 식물의 전체 광합성 반응식은 다음과 같다:

$$6\ CO_2(g) + 12\ H_2O(g) + \text{빛 에너지} \rightarrow C_6H_{12}O_6(s) + 6\ O_2(g) + 6\ H_2O(g)$$

다) 헤스의 법칙으로도 알려진 총열량보존의 법칙은 에너지보존법칙의 한 형태로, 1840년 G. H. 헤스가 실시한 열화학의 기초적 실험에 의하여 발견되었다. 예를 들면, 기체 상태의 수소와 산소가 반응하여 수증기가 될 때 내놓는 에너지는 242 kJ 이지만, 물이 될 때 내놓는 에너지는 286 kJ 이다. 이렇게 44 kJ 만큼 차이가 나는 것은 물이 수증기로 기화할 때 필요한 열인 기화에너지 때문이며, 전체 반응에서 수소와 산소가 어떤 경로를 거치든 반응에 따르는 총 에너지는 변함이 없다. 총열량보존의 법칙에 따르면 어떤 화학반응에 수반되는 반응에너지는 생성물과 반응물 간의 표준생성엔탈피의 차이에 기인한다.

$$\text{반응에너지} = \sum \text{생성물의 표준 생성 엔탈피} - \sum \text{반응물의 표준 생성 엔탈피}$$

이 법칙을 이용하면 실제 일어나지 않는 반응에 대해서도 관여하는 에너지가 얼마인지를 계산할 수 있다. 또한 반응에너지를 직접 측정하는 것이 곤란한 경우라도, 다른 화학반응식의 조합을 이용하여 그 값을 산출할 수 있다. 몇 가지 흔한 물질들의 표준생성엔탈피는 다음 표에 제시된 바와 같다.

| 물질 | 화학식 | 표준생성엔탈피 (kJ/mol) | 물질 | 화학식 | 표준생성엔탈피 (kJ/mol) |
|---|---|---|---|---|---|
| 아세틸렌 | $C_2H_2(g)$ | 227 | 염화수소 | $HCl(g)$ | -92 |
| 암모니아 | $NH_3(g)$ | -46 | 산화철(III) | $Fe_2O_3(s)$ | -824 |
| 이산화탄소 | $CO_2(g)$ | -394 | 탄산마그네슘 | $MgCO_3(s)$ | -1096 |
| 일산화탄소 | $CO(g)$ | -111 | 메테인 | $CH_4(g)$ | -75 |
| 에탄올 | $C_2H_5OH(l)$ | -278 | 산화질소 | $NO(g)$ | 91 |
| 에틸렌 | $C_2H_4(g)$ | 52 | 물(g) | $H_2O(g)$ | -242 |
| 포도당 | $C_6H_{12}O_6(s)$ | -1316 | 물(l) | $H_2O(l)$ | -286 |

* 단일 원소 물질의 표준생성엔탈피는 0으로 본다.
** (g), (l), (s) 는 각각 물질의 상태인 기체, 액체, 고체를 의미한다.

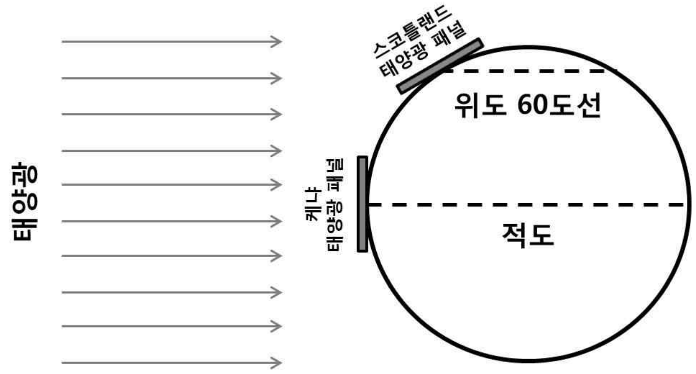
라) 물($H_2O$) 분자는 두 개의 수소 원자와 한 개의 산소 원자가 공유결합을 통하여 굽은 형의 극성 분자 구조를 형성한다. 고체와 액체 상태의 물 분자들은 수소 결합을 통하여 강한 분자 간 상호 작용을 하고 있기 때문에 타 분자들에 비하여 독특한 물리적-화학적 특성을 갖는다. 특히 극성 분자인 물은 다른 극성 분자 및 이온과 잘 섞이고, 유기 용매 또는 무극성 분자와는 잘 섞이지 않는다. 이것은 극성 분자 간 인력이 무극성 분자 간 인력보다 강하기 때문에 나타나는 현상이다. 강한 인력으로 인해 극성 분자들끼리 모이게 되면, 여기에서 배제된 무극성 분자들끼리 따로 모이게 되는 것이다. 이런 원리로 극성 분자와 무극성 분자는 서로 분리되어 잘 섞이지 않게 된다. 하지만 두 개의 산소와 한 개의 탄소가 대칭형으로 배열된 무극성 이산화탄소 분자에 대해서만은 높은 용해도를 나타내는데, 이는 용해 과정 동안 일어나는 탄산수소 이온 ( $\mathrm{HCO_3^-}$ ) 의 생성으로 설명된다. 이러한 원리로 다량의 이산화탄소가 용해된 청량음료를 만들 수 있다.

마) 동해의 전체 면적은 100만 $km^2$ 로 남북한 면적의 5배에 달하고, 평균 수심은 약 2000 m나 된다. 동해 수심 수백 m 아래에는 수온이 0도로 매우 차지만 산소가 풍부한 바닷물이 가득하다. 이는 산소가 많이 포함된 표층수가 바다 깊은 데까지 공급된다는 것을 의미한다. 이처럼 바닷물 전체가 순환하는 것을 ‘컨베이어 벨트’ 현상이라고 하는데, 지구 전체 바다에서 1000년에 걸쳐 일어나는 현상이 동해에서는 100년 만에 일어난다. 남극이나 그린란드 바다에서 발견되는 심층수가 동해에서 형성된다는 점도 특이하다. 이처럼 동해는 지구 전체 바다를 한눈에 볼 수 있는 ‘축소판 대양’이라고 할 수 있다. 이 때문에 동해는 전 세계 해양학자들의 주목의 대상이 되고 있다.

최근 국내 한 연구팀은 동해가 급격한 환경 변화를 겪고 있다는 사실을 발견했다. 그 대표적인 현상으로 동해의 빠른 산성화를 들 수 있다. 최근의 해양 산성화는 과거의 산성화보다 약 100배 이상 빠르게 진행되고 있다. 특히 동해는 지난 10년간 pH 값이 연평균 0.04 씩 감소하여 전세계 바다 연평균 감소율 0.02 보다 두 배씩 빨리 산성화가 진행되고 있는 것으로 조사되었다. 이러한 변화는 궁극적으로 먹이사슬과 생물다양성, 수산자원에도 심각한 영향을 미치게 될 것이다.

급속한 해양 산성화의 직접적인 원인으로 지구의 온난화가 지목된다. 온난화의 원인은 온실기체의 증가에 있다고 보는 견해가 지배적이며, 지구온난화의 원인이 되는 온실기체로는 이산화탄소가 대표적이다. 산업 발달에 따라 석유와 석탄 같은 화석연료를 사용하고 농업 발전을 통해 숲이 파괴되면서 이산화탄소 증가에 의한 온실효과의 영향이 커졌다고 볼 수 있다.

[문제 2-1] 적도 부근에 위치한 아프리카 케냐의 평원지대에 순간 최대 발전용량이 14 MW 인 태양광 발전소를 건설하고자 한다. 발전효율이 20% 인 1m × 1m 규격의 태양광 패널을 설치할 때 필요한 패널의 수를 구하고, 순간 최대 발전용량이 동일한 태양광 발전소를 북위 60도에 위치한 스코틀랜드에 설치할 경우 필요한 패널의 수를 구하여 그 차이를 비교 설명하시오. 단, 입사하는 태양광의 지표면 도달 비율은 위도에 상관없이 일정하고, 아래 그림과 같이 태양광 패널은 항상 지표면과 평행하게 설치된다고 가정한다.



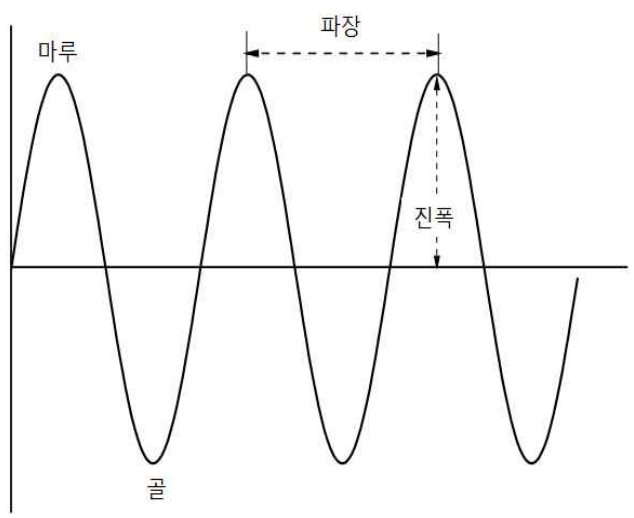

[문제 2-2] 지표면에 도달하는 태양광 에너지의 1%가 식물에 의해 흡수되어 광합성 작용에 사용된다고 가정한다. 10만 $m^2$ 면적의 적도 열대우림 지역에서 정오부터 1시간동안 광합성 작용을 하는 경우, 광합성에 의해 소모되는 대기 중 이산화탄소의 질량이 얼마인지 구하시오.

[문제 2-3] 이산화탄소가 물에 녹는 용해과정에 대한 화학반응식을 제시하고, 이를 이용하여 해양의 산성화와 지구 온난화의 직접적인 연관성을 구체적으로 설명하시오.

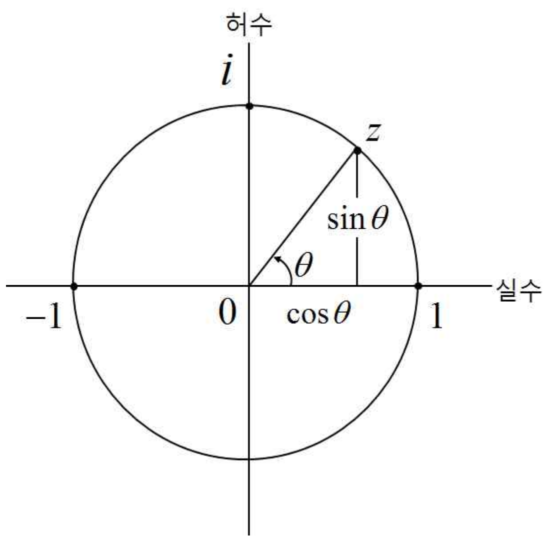
[문제 3] (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가) 연못에 빗방울이 떨어졌을 때에는 물결이 동심원을 그리며 퍼져 나간다. 수면에 일렁이는 물결과 같은 규칙적인 움직임을 파동이라고 한다. 물리학적으로 빛과 소리도 파동의 성질을 가진다. 우리 생활에서 반드시 필요한 존재인 휴대 전화도 전자기파라는 파동을 이용한다. 파동의 성질을 결정하는 중요한 요소는 파장($\lambda$)이다. 파장이란 파동의 마루(가장 높은 곳)와 마루 사이의 거리이다. 또는, 파동의 골(가장 낮은 곳)과 골 사이의 거리이다. 파장이 바뀌면 그 파동의 성질도 크게 변한다. $C_1$와 $C_2$, 두 개의 계수를 가진 삼각함수 $y = C_1 \sin(C_2 x)$를 이용하여 <그림 3-1>과 같이 파동의 특성을 간단한 그림으로 나타낼 수 있다. 파동의 특성 중 진동수(f)는 1초에 파동의 각 점이 진동하는 횟수를 나타내며 단위는 헤르츠(Hz)를 사용한다. 파동의 전파 속도($v$)는 진동수(f)와 파장($\lambda$)의 곱으로 표현된다. 즉 파동의 전파 속도가 일정할 때, 진동수가 높으면 파장이 짧아지게 된다.



<그림 3-1>



<그림 3-2>

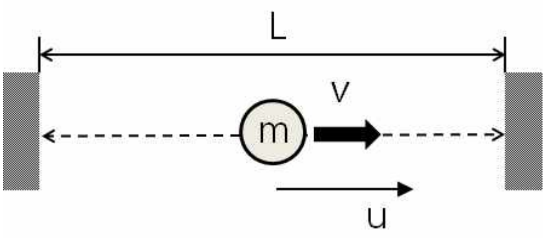
나) 1988년 수학 잡지인 The Mathematical Intelligencer에서 독자들을 상대로 어떤 수학 정리가 가장 아름다운가에 대하여 설문조사를 하였는데, 그 결과 오일러(Euler) 등식, $e^{i\pi} = -1$ 이 1 위를 차지하였다. 여기서 $e$는 자연상수, $\pi$는 원주율, $i$는 허수 단위이다. 오일러 등식은 오일러 공식의 특수한 경우이다.

오일러 공식: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta$는 라디안(rad)

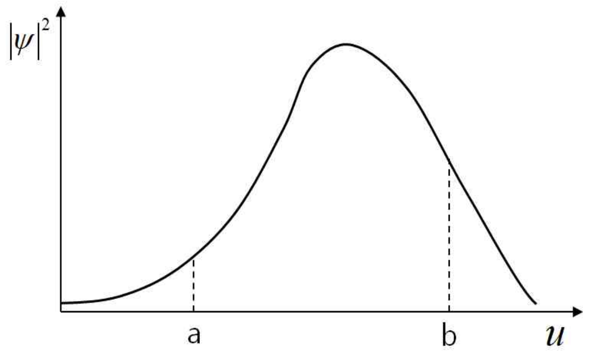
<그림 3-2>와 같이 서로 직교하는 실수 축과 허수 축으로 이루어진 좌표평면을 복소평면이라 한다. 이 복소평면에서 반지름의 크기가 1인 원 위의 점 $z = x + iy$ 를 생각해 보자. 이때 삼각함수를 이용하면 $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ 가 된다. 따라서 $x + iy = e^{i\theta}$ 임을 알 수 있다. 삼각함수의 주기적인 특성은 오일러 공식을 이용하여 복소평면 상의 회전으로 바꾸어 표현할 수 있다.

다) 전자는 파동과 입자의 성질을 동시에 가지고 있다. 1927년 미국의 물리학자 데이비슨(Davisson)은 전자를 대상으로 한 이중 슬릿 실험을 통하여, 전자의 파동성을 증명하였다. 이중 슬릿이 있는 판에 전자를 하나씩 쏘고, 판 뒤에서 전자의 위치를 관찰하는 실험을 생각하자 (이중 슬릿 실험). 전자가 단순한 입자라면 슬릿 바로 뒤에서만 전자가 발견될 것이다. 그러나 전자를 여러 번 되풀이해 발사하면, ‘간섭무늬’ 라는 독특한 명암의 줄무늬를 관찰할 수 있다. 간섭무늬가 나타나는 것은 파동 특유의 성질이며, 이것은 전자가 파동의 성질을 가진 증거이다. 이런 전자의 파동은 전자의 발견 확률과 관계가 있다. 전자의 발견 확률은 전자의 파동 진폭이 큰 곳일수록 높아진다. 즉 마루나 골에서 전자가 발견될 가능성이 가장 높고, 높이가 0인 점에서 전자가 발견될 가능성은 0이다.

$u$축을 따라 움직이는 자유입자에 대한 파동 방정식은 $\psi = Ae^{iku}$로 나타낼 수 있다. $A$는 일정한 진폭이고 $k$는 파동수이다. <그림 3-3>은 1차원 상자 속에 질량 $m$인 입자가 속도 $v$로 거리 $L$인 두 개의 투과할 수 없는 벽 사이에 갇힌 예를 보여주고 있다. 파동이 단일 입자로 표현된다면, 비록 입자의 위치를 완전하게 정하는 것은 불가능하지만, 확률로서 입자의 위치를 설명하는 것은 가능하다. 입자가 $a \le u \le b$ 안에 존재할 확률은 $P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 du$로 주어진다. <그림 3-4>와 같이 확률 $P_{ab}$는 $|\psi|^2$ 곡선 아래의 $u=a$와 $u=b$ 사이의 면적이 된다.




<그림 3-3>




<그림 3-4>

[문제 3-1] 제시문 가)를 이용하여 다음에 답하시오. 일정 파장의 음원이 관측자로부터 멀어지거나 가까워지면 관측자에게는 소리가 낮아지거나 높아지는 것처럼 들린다. 이처럼 파원의 움직임에 따라 파장이 달라지는 현상을 도플러 효과라고 한다. 구급차가 진동수($f$) $300\,\mathrm{Hz}$의 사이렌을 울리며 일정한 속도($v_o$ )로 병원으로 이동하고 있다. 병원에서 구급차 사이렌 소리의 진동수가 $330\,\mathrm{Hz}$로 측정되었을 때, 구급차의 속도 $v_o$를 구하여라. 단, 공기 중에서 음속은 $v=330\,\mathrm{m/s}$로 일정하다.

[문제 3-2] $(\sqrt{3}+i)^{12}$의 값을 제시문 나)의 오일러 공식을 이용하여 구할 수 있음을 보여라.

[문제 3-3] 제시문 다)의 <그림 3-3>과 같은 상자 속 입자에 대한 파동 함수는 실수인 삼각함수로 표현된다. 전자의 파동방정식이 아래와 같이 주어졌을 때 $u=0$과 $u=L/4$사이에서 전자가 존재할 확률을 구하여라.

$$\psi(u)=\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{2\pi u}{L}\right)$$

◆ 출제문제 해설:

[문제 1]

- 출제의도

삼각함수의 정확한 값을 알지 못하는 경우에도 이등변 삼각형의 기하학적 특성과 삼각함수의 덧셈, 뺄셈 공식 등을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지 묻고 있다.

- 제시문 해설

제시문에서는 삼각함수의 값을 정확히 모르는 경우에 별과 지구의 거리를 구하려는 고대 천문학자의 시도를 나타내고 있고, 이등변 삼각형의 특징을 이용하면 특정한 각도의 경우에는 달-지구와 행성-지구 간의 거리비를 구할 수 있음을 암시하고 있다. 두 번째 제시문은 삼각함수의 뺄셈 정리를 기하학적으로 유도할 수 있는 프톨레마이오스 정리를 보여주고 있다.

- 논제분석(해설)

[문제 1-1] 두 변의 길이가 같고 두 각의 크기가 같은 이등변 삼각형의 특징을 적절히 활용할 수 있도록 하나 또는 다수의 이등변 삼각형의 구성하는 과정이 요구된다.

[문제 1-2] 제시문의 프톨레마이오스 정리를 이해하고 주어진 문제를 주어진 정리에 대입할 수 있는 과정이 요구된다.

[문제 1-3] 삼각함수의 뺄셈공식 또는 반각공식을 이용할 수 있는 능력이 요구된다.

[문제 2]

- 출제의도: 본 출제문제에서는 제시문을 읽고, 제시문에서 제공하는 내용을 습득한 후 이를 이용하여 문제의 실마리를 찾아가는 전 과정을 평가하고 있다. 관련된 교과목은 수학, 물리, 화학으로, 위도에 따른 단위면적당 입사 태양광 에너지는 물리, 지구과학, 공간도형 등의 개념을 적용하여 산출할 수 있으며, 광합성 반응과 온실효과의 이해를 위해 화학 반응식 및 반응에너지의 개념이 필요하다.

- 제시문 해설:

가) 최근 이슈가 되고 있는 신재생에너지 기술 중에서 태양전지/태양발전에 대한 내용을 소개하고 있다. 태양상수 및 태양에너지의 단위 및 개념을 이해하고, 이러한 빛의 형태의 에너지를 전기에너지로 변환하는 태양광 발전의 상황에서 에너지 변환 상관관계에 대한 아이디어를 도출할 수 있다.

나) 제시문에서는 광합성에 대한 소개를 하고 있다. 특히 광합성의 정의에 입각해서 광합성 반응이 작용하는 데 필요한 에너지를 빛의 형태로 공급받는다는 것을 이해하여야 하며, 이 때 필요한 빛 에너지 량은 제시된 화학반응식을 통해서 유추할 수 있음을 파악하여야 한다.

다) 제시문에서는 “헤스의 법칙”으로 알려져 있는 총열량 보존의 법칙을 소개하고 있으며, 이를 통해 제시문 (나)에서 소개된 광합성 반응식의 화학양론에 따른 반응에너지를 유추할 수 있음을 파악하여야 한다.

라) 제시문에서는 고등학교 공통과학에서 다루는 “용해”의 개념 중에서 용매와 용질의 극성 유무에 따른 용해도의 차이를 설명하고 있으며, 예외적인 상황으로 무극성인 이산화탄소가 극성인 물에 용해되는 원인을 탄산수소이온의 형성을 통해 설명하고 있다. 이러한 내용을 바탕으

로 이산화탄소가 물에 용해될 때 형성되는 생성물을 유추할 수 있다.
마) 제시문에서는 지구 온난화의 영향으로 일어나는 지구상의 변화의 한 예로 해양의 산성화를 들고 있다. 또한 지구 온난화의 주범을 대기 중 이산화탄소 농도의 증가로 지목하면서 제시문 (라)에서 소개된 물에 대한 이산화탄소의 용해과정을 떠올리게 된다.

- 논제분석(해설)

[문제 2-1] 제시문에서 소개된 발전효율의 정의를 이해하고 이를 이용하여 발전용량을 계산하는 과정이 필요하다. 또한 “정사영” 개념을 도입하여 위도에 따른 단위면적당 입사 태양에너지의 차이를 설명할 수 있어야 한다.
[문제 2-2] 본 문제는 제시문 (가), (나) 와 (다)를 이용하여 해결할 수 있다. 제시문 (나) 에서는 광합성 반응에서 반응에 필요한 최소한의 에너지 량인 반응에너지의 존재를 파악하여야 하며, 이 반응 에너지를 빛의 형태로 공급받는다는 것이 광합성 반응의 핵심이다. 광합성에 사용되는 빛 에너지량은 제시문 (가)를 통해 얻을 수 있으며, 제시문 (나)에서 소개된 광합성 반응식과 (다)의 헤스의 법칙을 이용하여 광합성 반응의 화학 양론과 반응에너지의 양을 구할 수 있다.
[문제 2-3] 제시문 (라)에서 서술하고 있는 물에 대한 이산화탄소의 용해과정을 이해함으로써 용해에 대한 화학반응식을 구할 수 있다. 즉, 생성물 중 탄산수소이온이 존재하기 때문에 다른 하나의 생성물은 수소이온이 된다는 것을 알 수 있을 것이다. 이 내용을 제시문 (마)의 내용과 연결지어 보면, 지구 온난화와 대기 중 이산화탄소의 농도 관계를 일단 만들 수 있을 것이고, 이산화탄소 농도 증가는 곧 해수로 용해되는 이산화탄소의 양 증가로 설명된다. 마지막으로 용액의 산성도를 의미하는 pH 값이 용액 중 수소이온농도와 직접적으로 연관된다는 것을 이용하여 답안을 작성할 수 있다.

[문제 3]

- 출제의도

고등학교 수학 교과과정에서 배운 자연상수, 삼각함수 그리고 적분의 기본적인 이해 정도와 활용 및 계산 능력을 평가하기 위해 출제하였다. 고등학교 물리 교과과정에서 다루고 있는 파동에 대한 개념적인 이해와 분석 능력을 평가하는데 주안점을 두었다.

- 제시문 해설

- 파동에 대한 간단한 소개와 이를 활용하여 진동수와 파장의 관계식을 유도할 수 있음을 기술하였다.
- 자연상수, 원주율 그리고 허수를 이용한 오일러 공식을 설명하였고, 삼각함수와 복소평면의 수학적 특성을 이해할 수 있도록 하였다.
- 전자 파동의 물리적인 특성을 간단히 설명하고 삼각함수 적분을 도출할 수 있도록 하였다.

- 논제분석(해설)

- 파동에 대한 물리적은 개념을 설명하였고 진동수와 파장의 관계식을 유추할 수 있도록 기술하였다. 도플러 효과의 정의 및 진동수와 파장의 정의를 이용하여 파동의 수학적 그리고 물리적 특성을 유추하도록 하였다.
- 자연상수, 원주율 그리고 허수를 이용한 오일러 공식을 이해하고 삼각함수의 주기성을 이용

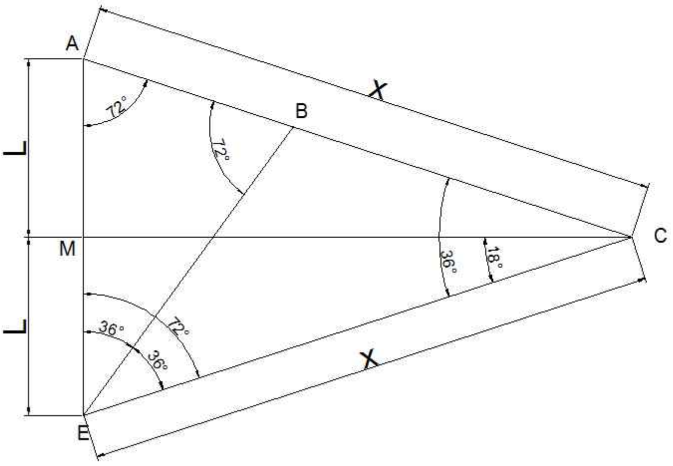
하여 자연상수의 수학연산을 계산할 수 있도록 하였다.

- 전자의 파동 특성을 물리적으로 설명하였고 삼각함수의 적분을 이용하여 확률을 계산하도록 하였다.

◆ 예시답안:

[문제 1]

[문제 1-1] (15점)




지구($E$)와 달($M$)의 거리를 $L$이라고 하고 혜성의 위치를 $C$라고 한다. 그림과 같이 선분 $MC$에 대해 삼각형 $EMC$에 대칭인 삼각형 $MAC$를 그린후, $\angle CEM$을 이등분하도록 보조선 $EB$ 그린다. [5점]

혜성과 지구의 거리를 $X$라고 한다.

$\angle EAB = \angle ABE = 72^\circ$ 이므로 삼각형 $EAB$는 이등변 삼각형이다. 따라서,

$$\overline{EA} = \overline{EB} = 2L \qquad [2점]$$

또 $\angle CEB = \angle BCE = 36^\circ$ 이므로 삼각형 $EBC$는 이등변 삼각형이다. 따라서,

$$\overline{EB} = \overline{BC} = 2L \qquad [2점]$$

삼각형 $EAC$와 삼각형 $EAB$ 닮은꼴이므로 $\overline{EA} : \overline{AC} = \overline{AB} : \overline{EA}$ 이므로

$$2L : X = (X - 2L) : 2L \qquad [3점]$$

따라서,

$$X^2 - 2LX - 4L^2 = 0$$

$$X = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 + 4 \cdot 4L^2}}{2} = \frac{2L \pm \sqrt{20L^2}}{2} = L(1 \pm \sqrt{5})$$

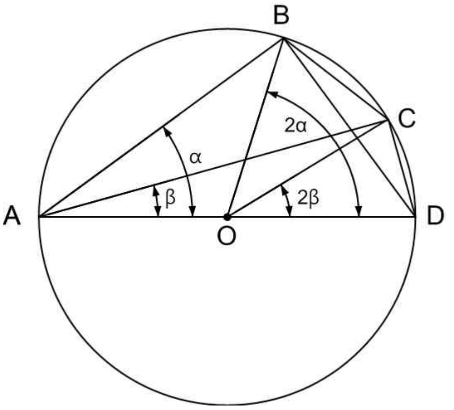
$X > 0$이므로,

$$X = L(1 + \sqrt{5})$$

따라서, 지구-달, 지구-혜성의 거리비는

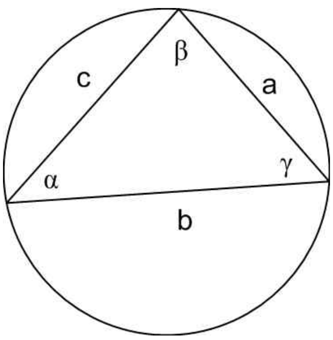
$$거리비 = \frac{\overline{EC}}{\overline{EM}} = \frac{L(1+\sqrt{5})}{L} = 1 + \sqrt{5} \qquad [3점]$$

[문제 1-2] (20점)




<그림 1-1>

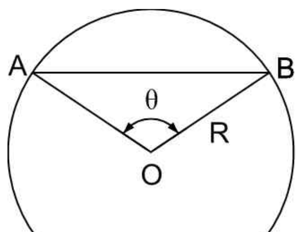
제시문 나)의 프톨레마이오스의 정리에 의해 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{DA}=\overline{AC}\times\overline{BD}$가 성립한다. 또 원에 내접하는 삼각형의 성질에 의해, $\angle BOD=2\alpha, \angle COD=2\beta$를 만족한다.




<그림 1-2>

그림 1-2에서 반지름 $R$인 원에 내접하는 삼각형의 각을 $\alpha, \beta, \gamma$라고 하고 마주보는 변의 길이를 각각 $a, b, c$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \qquad (1\text{-}1)$$




<그림 1-3>

또는 그림 1-3에서 선분 AB의 길이는 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\overline{AB}=2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (1\text{-}2)$$

식 (1-1) 또는 식 (1-2)를 그림 1-1의 삼각형 ABC와 ACD에 각각 적용하면,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\alpha-\beta)}=2R,\ \frac{\overline{CD}}{\sin\beta}=2R$$

따라서, 각 변의 길이를 각도 $\alpha, \beta$와 원의 반지름 $R$로 나타낼 수 있다.

$$\overline{AB}=2R\sin\left(\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)\right)=2R\sin(90^\circ-\alpha) \qquad [2점]$$

$$\overline{BC}=2R\sin\left(\frac{1}{2}(2\alpha-2\beta)\right)=2R\sin(\alpha-\beta) \qquad [2점]$$

( $\overline{BC}$는 코사인법칙으로도 구할 수 있음)

$\overline{CD}=2R\sin\left(\frac{1}{2}(2\beta)\right)=2R\sin(\beta)$ [2점]

$\overline{AD}=2R$ [2점]

$\overline{AC}=2R\sin\left(\frac{1}{2}(180^\circ-2\beta)\right)=2R\sin(90^\circ-\beta)$ [2점]

$\overline{BD}=2R\sin\left(\frac{1}{2}(2\alpha)\right)=2R\sin(\alpha)$ [2점]

프톨레마이오스의 정리에 대입하면,

$$2R\sin(90^\circ-\alpha)\times 2R\sin\beta+2R\sin(\alpha-\beta)\times 2R=2R\sin(90^\circ-\beta)\times 2R\sin\alpha$$

정리하면

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ [8점]

[문제 1-3] (5점)

[문제 1-2]에서 $\overline{BC}=2R\sin(\alpha-\beta)=2R\sin(15^\circ)$

삼각함수의 반각 공식을 이용하여 $\sin(15^\circ)$를 구한다.

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$\frac{\theta}{2}=15^\circ$, 즉 $\theta=30^\circ$ 이므로,

$$\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \sin 15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

따라서, $\overline{BC}=2\sin(15^\circ)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

[문제 2] (30점)

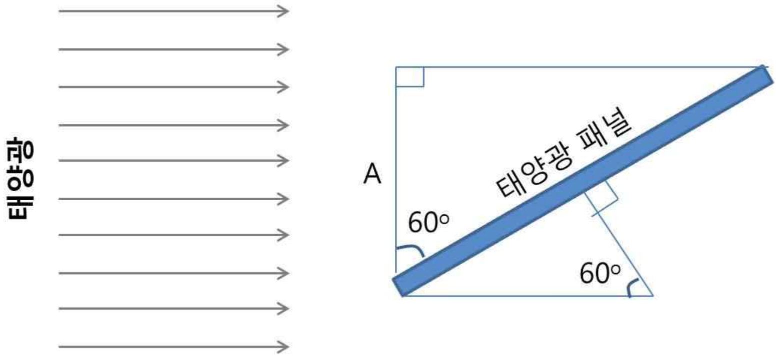
[문제 2-1] (10점)

태양광 발전소의 순간 최대 용량은 태양의 일중 고도가 가장 높은 순간에 발생한다. 적도 부근에 위치한 아프리카 케냐 지역의 태양광 발전소에서 순간 최대 발전용량이 발생하는 순간의 태양의 위치는 지표면에 연직 방향에 있으며, 따라서 이 상황에서 1 ㎡ 면적의 태양광 패널에 도달하는 태양 에너지량은 태양 상수값의 50% 에 해당하여 700 W 가 된다. [2점]

태양광 발전효율이 20% 라면 태양광 패널 한 개에서 생산하는 순간 최대 발전량은

$700\,W \times 0.2 = 140\,W$ 가 된다. 따라서, 14 MW 의 순간발전량을 얻기 위해서 100,000 개의 태양광 패널이 필요하다. [4점]

한편, 위도 60도에 위치한 스코틀랜드에서 태양의 일중 고도가 가장 높은 순간에 입사되는 단위면적당 태양에너지량은 다음 그림을 이용하여 구할 수 있다.




입사 태양광에 수직한 면 A는 태양광 패널 면의 정사영이라 할 때, A 의 면적은 $태양광패널의면적 \times \sin 30^\circ$ 가 되며, 즉 태양광 패널 면적의 절반에 해당한다.

태양광 패널에 입사되는 태양에너지의 총량은 면적 A에 입사되는 태양에너지의 총량과 같다. 따라서 태양광 패널에 입사되는 단위 면적당 태양에너지는 A 면에 입사되는 단위면적당 태양에너지의 절반이다. 그러므로, 스코틀랜드에 설치한 태양광 발전소에서 적도에 위치한 태양광 발전소와 같은 순간 최대 발전 용량을 얻기 위해서는 태양광 패널의 수를 두 배로 증가시켜 200,000 개의 태양광 패널을 설치하여야 한다. [4점]

[문제 2-2] (10점)

[문제 2-1]에서 구한 바와 같이 태양의 일중고도가 가장 높은 정오 시간대에 적도지역의 지표면에 도달하는 단위면적당 태양에너지량은 700 W/m$^2$ 이며, 10만 m$^2$ 의 면적에 한 시간 동안 지표면에 도달하는 태양에너지의 총량은 70 MWh 에 달한다. 광합성 작용에 사용되는 태양에너지량은 지표면에 도달하는 태양에너지의 1% 이므로, 700 kWh 가 되며, 이를 SI 단위계로 환산하면, $700\,kJ/s \times 3600s = 2520\,MJ$ 이다. [3점]

광합성 작용의 반응식

$$6\ CO_2(g) + 12\ H_2O(g) + \text{빛 에너지} \rightarrow C_6H_{12}O_6(s) + 6\ O_2(g) + 6\ H_2O(g)$$

에서 이 반응에 필요한 빛 에너지의 양을 헤스의 법칙을 이용하여 구하면,

반응에너지 = (포도당의 표준생성엔탈피) + 6(수증기의 표준생성엔탈피)
- 6(이산화탄소의 표준생성엔탈피) - 12(수증기의 표준생성엔탈피)
= -1316 kJ - 6(242 kJ) + 6(394 kJ) + 12(242 kJ) = 2500 kJ [3점]

즉, 광합성에 의해 포도당 1 mol 을 생성하는 데 빛 에너지 2500 kJ 이 요구되며, 이 때 이산화탄소 6 mol 이 소모된다.

10만 m$^2$ 면적의 적도 열대우림에 공급되는 빛 에너지는 모두 2520 MJ 이며 이는 1008 mol 의 포도당을 생성할 수 있는 에너지이고, 이산화탄소 소모량은 6048 mol 이 된다. [2점]

이산화탄소의 분자량은 44 g/mol 이므로, 소모되는 이산화탄소의 질량은 266112 g (약 266 kg) 이다. [2점]

[문제 2-3] (10점)
지구 온난화의 주 원인으로 온실기체의 농도 증가에 따른 온실효과의 심화를 들 수 있다. 즉, 대기 중 6대 온실기체인 이산화탄소($CO_2$), 메탄($CH_4$), 아산화질소($N_2O$), 수소화불화탄소(HFCs), 과불화탄소(PFCs), 육불화황($SF_6$)의 농도 증가로 인해 지구 복사에너지의 대기 흡수비율이 증가하고 이 때 흡수된 에너지가 대기복사에 의해 다시 지표로 재 방출되는 과정이 반복되면서 지표의 온도가 상승하는 것이다. 6대 온실기체 중 이산화탄소의 양이 80%를 차지하기 때문에 지구 온난화를 가속하는 주 원인으로 이산화탄소 농도 증가를 꼽을 수 있다.
제시문 라)에서 나타낸 바와 같이 이산화탄소는 물에 용해되며, 용해 과정은 다음의 화학식으로 표현할 수 있다.

$$H_2O + CO_2 \rightarrow H^+ + HCO_3^- \quad [4점]$$

즉, 이산화탄소의 용해과정의 생성물로 탄산수소이온 ($HCO_3^-$) 과 수소이온 ($H^+$) 이 만들어진다.
수용액 중의 수소 이온 농도를 산성화지수 (pH) 로 표현하며,

$$pH = -\log[H^+] \ ,$$

이다. 여기서 $[H^+]$ 는 수소이온의 농도이다.

따라서 대기 중 이산화탄소의 농도가 증가하면 해수에 용해되는 이산화탄소의 양이 증가하며, 이는 해수 내의 수소이온 농도의 증가로 이어진다. 수소이온농도의 증가는 pH 값의 감소를 뜻하며, 즉, 해수의 산성도 증가를 초래한다. [6점]

[문제 3] (30점)

[문제 3-1] (10점)
파동의 전파속도($v$) = 진동수($f$) × 파장($\lambda$) 이다.
구급차가 병원을 향해 일정한 속도($v_o$)로 움직이면, 병원에서 측정한 구급차 사이렌 소리의 파장($\lambda'$)은 $d\lambda = v_o/f$ 만큼 실제 구급차 사이렌 소리의 파장($\lambda$) 보다 짧아진다.
병원에서 측정된 구급차 사이렌 소리의 파장 $\lambda' = \lambda - v_o/f$ 이다. ------- (5점)
공기중의 음속(파동의 전파속도) $v$는 일정하므로($v = f\lambda = f'\lambda'$),
병원에서 관측된 진동수 $f' = \dfrac{v}{\lambda'} = f\left(\dfrac{v}{v - v_o}\right)$ 이다. ------------------- (3점)
구급차 속도 $v_o = v\left(1 - \dfrac{f}{f'}\right) = 330\left(1 - \dfrac{300}{330}\right) = 30\,m/s$ ---------------- (2점)

* $f' = f\left(\dfrac{v}{v - v_o}\right)$을 유도하지 않고 공식만을 이용하면 5점 감점
* 과정은 맞지만 답이 틀리면 2점 감점

[문제 3-2] (10점)

$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ------------------ (2점)

$(\sqrt{3}+i)^{12}=2^{12}e^{i(12\times\frac{\pi}{6})}=2^{12}e^{i(2\pi)}$ -------------------------------- (3점)

$e^{i(2\pi)}=1$이므로 $2^{12}e^{i(2\pi)}=2^{12}=4096$ -------------------------------- (5점)

* $2^{12}$ 도 답으로 인정

[문제 3-3] (10점)

$P_{ab}=\int_0^{\frac{L}{4}}\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi u}{L}\right)\right)^2 du=\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{2\pi u}{L}\right)du$

$\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}u\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi}{L}u\right)}{2}$로 표현가능하다. ------------------------------ (5점)

따라서, $P_{ab}=\frac{1}{L}\int_0^{\frac{L}{4}}1-\cos\left(\frac{4\pi u}{L}\right)du=\frac{1}{L}\left[u-\frac{L}{4\pi}sin\left(\frac{4\pi}{L}u\right)\right]_0^{\frac{L}{4}}=\frac{1}{4}=0.25$ ----- (5점)

* 계산과정은 맞지만 답이 틀리면 2점 감점