2012학년도 수시 1차 전형

논술고사 (공학계열)

【문제 1】 (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오

가) 피사의 사탑에서 수행된 갈릴레이의 낙하 시험 이전에는 무거운 물체가 가벼운 물체에 비해 낙하 속도가 빠르다고 믿어왔다. 실제로 무거운 포탄과 가벼운 깃털을 동시에 같은 높이에서 떨어뜨리면 무거운 포탄의 낙하 속도가 더 빠른 것을 관찰할 수 있다. 하지만 두 물체의 속도 차이는 질량 차이가 아닌 공기 저항 때문에 발생하는 것이다. 이러한 공기 저항은 깃털처럼 밀도가 낮고 불규칙한 형상의 물체에 더 크게 작용한다. 공기 저항력은 물체 형상 등에 의해 결정되는 공기 저항 계수와 물체의 순간 속도에 비례하며, 물체의 운동 방향과 반대 방향으로 작용한다.

나) 지표면에서 공중으로 비스듬히 던져진 물체는 포물선을 그리며 운동하는데, 이러한 운동을 포물선 운동이라 한다. 공기 저항을 무시한다면 포물선 운동을 하는 물체는 수평 방향 가속도가 0이고 수직 방향 가속도는 중력가속도 g인 운동을 한다. 따라서 포물체의 운동은 수평 방향의 등속 운동과 수직 방향의 자유 낙하 운동의 중첩으로 분석할 수 있다.

다) 변수를 분리하여 적분하는 방법

x에 대한 y의 미분을 포함하는 아래 식을 고려하자.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1}$$

초기 조건은 $x=4$ 일 때 $y=-3$이다.

식 (1)의 해를 구하기 위해서는 다음과 같이 변수 x, y를 분리한다.

$$y\,dy = -x\,dx \tag{2}$$

양변을 각각 적분하면

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \tag{4}$$

초기 조건을 대입하면 식(4)의 적분 상수 C 를 구할 수 있다. 즉 위 식의 해는 아래와 같다.

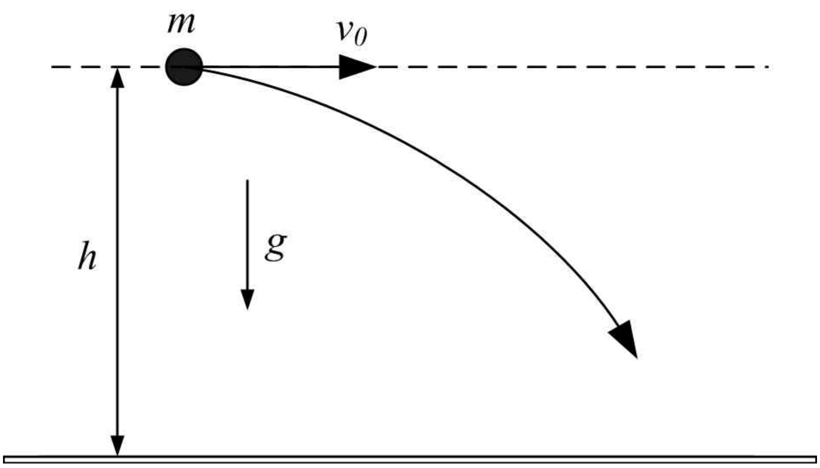
$$x^2 + y^2 = 25$$

[문제 1] 그림과 같이 고도 h에서 수평방향 속도 v_0로 비행하는 비행기에서 질량 m인 물체가 낙하를 시작한다. 위의 제시문을 이용하여 다음을 구하시오.

[문제 1-1] 공기 저항을 무시할 때 물체가 지표면에 도달하는 순간의 속도를 구하시오.

[문제 1-2] 수평 방향과 수직 방향의 공기 저항 계수를 각각 k라고 할 때, 낙하 중 속도와 시간의 관계식을 구하시오.

[문제 1-3] 문제 [1-2]의 경우에 높이 h가 무한히 높다고 가정할 때, 시간에 따른 물체의 속도를 대략적인 그래프로 나타내고 물체의 최종 속도를 구하시오.



【문제 2】 (30점)

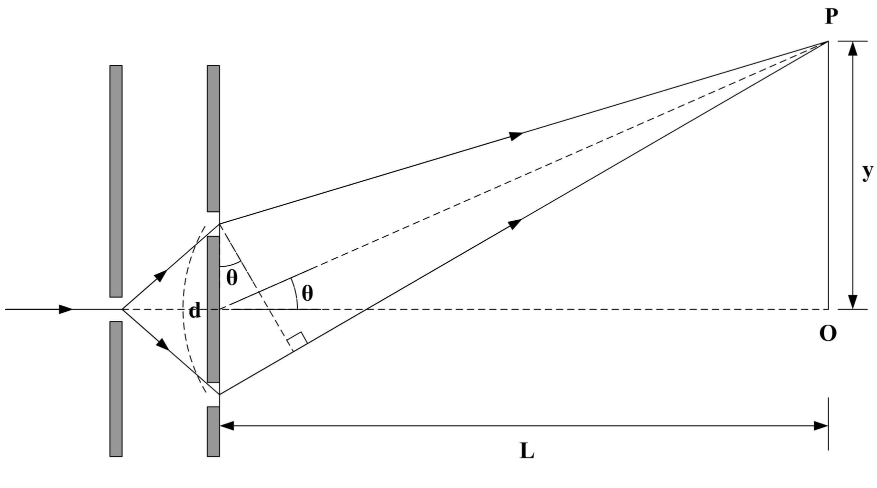
※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

가) 빛은 지구상의 거의 모든 생명체가 생명을 유지하는 데 필수적인 것이다. 예를 들면, 식물은 태양빛에 의해 전달된 에너지를 광합성을 통하여 화학 에너지로 전환한다. 게다가 빛은 우리 주변이나 우주를 통하여 정보를 주고받을 수 있도록 하는 중요한 도구이다. 빛은 전자기파의 한 형태이며 광원에서 관측자에게로의 에너지 전달을 의미하기도 한다.

19세기 이전에는 빛은 광원으로부터 방출되는 입자의 흐름이며, 눈 속으로 들어온 이 입자가 시신경을 자극한다고 생각하였다. 이와 같은 빛의 입자론을 믿는 대표적인 과학자인 뉴턴은 반사와 굴절의 법칙 등 여러 가지 빛의 본질에 관하여 알려진 실험적 사실들을 입자론에 근거하여 설명하고자 하였다.

대부분의 과학자들이 뉴턴의 입자론을 받아들였으나, 일부 과학자들은 빛이 파동의 일종이라는 이론을 제안하였다. 1678년 네덜란드의 물리학자이면서 천문학자인 호이겐스(Christian Huygens)는 빛의 반사와 굴절 법칙을 파동론으로 설명할 수 있음을 보여주었다.

나) 1801년 영(Thomas Young)은 하나의 광원에서 나온 단일 파장의 빛을 매우 좁은 두 개의 슬릿을 통과시킴으로써 빛의 파동성을 확인하는 역사적 실험을 했다. 그는 두 파 사이의 위상차가 시간에 무관하도록 아래 그림과 같이 충분히 작은 구멍을 사용하여 태양광 일부만 실험 장치에 들어가도록 하였다. 구멍을 통과한 빛은 조금 진행한 후 폭이 매우 좁고 가까이 설치된 두 개의 슬릿 쌍을 통과한 후 스크린에 도달한다. 이때 스크린에 보강간섭과 상쇄간섭이 일어나 어둡고 밝은 지역이 교대로 나타나는데, 이 때 나타나는 무늬를 간섭 무늬라 한다. 이 실험을 기하학적 도식으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 밝은 무늬(보강 간섭) 조건은 다음과 같다.

$$d\sin\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

여기서 m은 차수 (order number)이고 λ는 빛의 파장이다. 어두운 무늬(소멸 간섭) 조건은 다음과 같다.

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

다) 일반적으로 많은 물리 문제는 수학의 대수적 방법으로도 접근이 가능하다. 위의 그림과 같은 이중 슬릿 실험 장치에서 스크린 상의 점 P를 생각해 보자. 이중 슬릿을 통과한 단일 파장의 두 빛은 다른 경로를 지나서 P 지점에 도달하기 때문에 두 파의 빛 세기가 다를 것이라 생각할 수 있다. 그러나 만일 $d \ll L$이라면 경로차는 매우 작아서 빛 세기 차이를 무시할 수 있으므로 P 지점에 도달한 두 파는 진폭이 같다고 할 수 있다. P 지점에 도달한 두 파의 파동을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_1 = E_p \cos\omega t, \qquad E_2 = E_p \cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

여기서 E_p는 진폭, ω는 진동수이고 ϕ는 경로의 차이에 의해 발생하는 위상차이다. P 지점에 도달한 중첩된 파의 파동은 다음과 같다.

$$E = E_1 + E_2 = E_p[\cos\omega t + \cos(\omega t + \phi)] \tag{2}$$

식(2)를 다음과 같이 다르게 표현할 수 있다.

$$E = 2E_p \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{3}$$

식(3)은 점 P에서 파의 진동수는 파가 슬릿을 통과하는 순간의 진동수 ω와 같지만, 진폭은 $2E_p \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$배가 됨을 의미한다. 식(2)에서 식(3)의 유도는 삼각 함수의 합 공식중 하나인 식(4)를 이용한 것이다.

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4}$$

점 P에서 빛의 세기는 식(5)와 같이 중첩된 파동의 제곱에 비례한다.

$$I = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{4E_p^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos^2\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{5}$$

여기서 c는 빛의 속력이고 μ_0는 상수로서 진공의 투자율이다.

대부분의 빛 검출기는 일정한 시간 동안의 빛 세기의 평균을 나타낸다. 어떤 시간 구간 (a, b)에서 주어진 함수 $f(t)$의 평균값은 다음과 같이 정의된다.

$$< f(t) > = \frac{\int_a^b f(t)dt}{(b-a)} \tag{6}$$

따라서 점 P에서 $0 \le \omega t \le 2\pi$ 동안 빛의 평균 세기는 다음과 같다.

$$< I > = \frac{2E_p^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{7}$$

[문제2-1] 제시문의 그림에서 $d \ll L$일 때 밝은 무늬(보강간섭)와 어두운 무늬(소멸간섭)가 나타나는 스크린 상의 각각의 위치 y를 L, d, m, λ로 표현하시오. 단, 이 경우 $\tan\theta \approx \sin\theta$를 이용하시오.

[문제2-2] 제시문 (나)의 식(4) 좌변에 삼각 함수의 2배각 공식을 적용하여 식(4)의 우변을 유도하시오.

[문제2-3] 식(6)의 평균값 정의를 이용하여 구간 $0 \le \theta \le 2\pi$에서 $\cos^2\theta$와 $\sin^2\theta$의 평균값을 구하시오.

【문제 3】 (40점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

어떤 TV 프로그램은 n명의 참가자를 받아서, 이 중에 1등 한 명을 뽑는다. 1등을 뽑는 과정은 다음과 같은 순서대로 진행된다.

단계 1. 1라운드에서는 모든 참가자에게 1부터 n까지 일련번호를 부여한 후 번호순으로 한 줄로 세운다.

단계 2. 현재 라운드에 남아 있는 사람이 한 명이면 이 사람이 자동으로 1등이다. 그렇지 않고 남아 있는 사람이 두 명 이상이면, 다음 규칙을 따른다.

- 사람 수가 짝수라면 두 번째 사람부터 시작하여 한 칸씩 건너뛰면서 줄의 끝 사람까지 차례로 탈락시킨다.
- 사람 수가 홀수라면 두 번째 사람부터 시작하여 한 칸씩 건너뛰면서 줄의 끝 직전 사람까지 차례로 탈락시킨 후, 줄의 첫 번째 사람도 탈락시킨다.

단계 3. 탈락되지 않고 남은 사람들을 다시 번호순으로 한 줄로 세운 뒤, 단계 2로 이동하여 다음 라운드를 진행한다.

예를 들어, 참가자 수가 6명인 경우를 생각해보자. 1라운드에서 탈락되는 사람들은 다음과 같다. 이 라운드에 남아있는 사람의 수가 짝수이므로, 2, 4, 6번 참가자를 탈락시킨다.

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~

2라운드에 진출하는 사람들은 1, 3, 5번 참가자이다. 이 라운드에 남아있는 사람의 수가 홀수이므로, 3번 참가자를 탈락시킨 후 첫 번째인 1번 참가자도 탈락시킨다.

~~1~~	~~3~~	5

3라운드에서는 5번 참가자 한명만 남아있기 때문에, 이 사람이 1등이 된다.

5

[문제 3-1] 제시문을 참고하여 참가자 수가 n명일 때 1등의 1라운드에서 위치가 m 번째임을 알고 있다면 이를 이용하여 참가자 수가 $2n$명일 때 1등의 1라운드에서 위치가 $2m-1$ 번째임을 보이시오.

[문제 3-2] 참가자 수가 n명일 때 1등의 1라운드에서 위치가 m 번째임을 알고 있다면, 참가자 수가 $2n+1$명일 때 1등의 1라운드에서 위치를 구하시오.

[문제 3-3] 전체 참가자 수가 $n=2012$일 때 1등의 1라운드에서 위치를 구하시오.