

논술고사 (공학계열)

【문제 1】 (40점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오

토지 측량을 위해 고대 이집트에서는 기하학에 대해서 많은 연구가 있었다. 이러한 연구는 그리스 수학자들에 의하여 이론적으로 발전되었다. 이들은 '정의'와 '증명'과 같은 과정을 통하여 평면 도형과 관련된 수학 지식을 학문으로 체계화하는 데에 큰 공헌을 하였다. 한편, 평면에서 도형과 관계된 내용 중

- (1) 삼각형, 평행사변형, 직사각형, 사다리꼴 같은 평면도형의 면적 공식
- (2) 합동인 두 도형의 성질
- (3) 닮음인 두 도형의 성질
- (4) 평행선과 다른 한 직선이 만날 때 생기는 각의 성질
- (5) 삼각함수의 성질
- (6) 직각삼각형의 성질
- (7) 삼각형의 내심과 외심의 성질

등의 여러 가지 기본 성질을 활용하여 새로운 기하학적 사실을 이끌어 낼 수 있다. 특히, 도형 문제에 보조선을 추가하고 평면 도형의 기본 성질을 활용하면 여러 종류의 문제를 풀 수 있다. 이와 같은 수학적 방법은 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 바탕을 이룬다.

[문제 1-1]

두 개의 기계 장치가 <그림 1>에 간략하게 선분 AC와 선분 BD로 주어졌고 그 길이는 각각 p 와 q 이다. <그림 1>과같이 선분 AC와 BD의 교각은 θ 이고, 이 장치들이 정상적 작동을 하면 <그림 2>와같이 사각형 ABCD를 경계로 하는 내부의 모든 영역을 사용하게 된다. 주어진 여건에 의하여 사각형 ABCD에 할당된 면적이 $pq/4$ 로 설정되었을 때, 교각 θ 를 다음과 같은 순서로 구하여 보자. 단, 기계 장치의 길이 p 와 q 는 각각 일정하다.

(1) 사각형 ABCD의 면적 S 를 p, q, θ 에 관한 식으로 구하고, 그 과정을 평면도형과 관련된 성질을 이용하여 논리적으로 기술하시오.

(2) $S=pq/4$ 일 때, 교각 θ 를 구하시오. 단, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

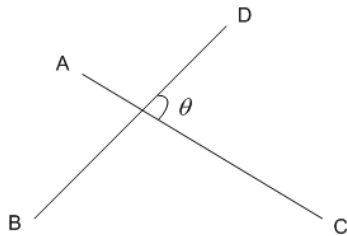


그림 1

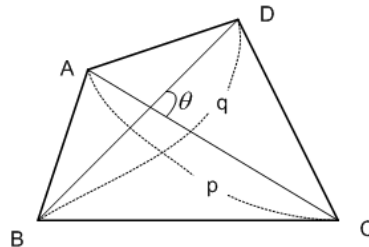


그림 2

[문제 1-2]

직각으로 교차하는 두 개의 기계 장치를 <그림 3>에 선분 AC와 선분 BD로 표시하였다. <그림 4>와같이 선분 AC와 BD의 끝점을 직선으로 연결하여 만든 사각형 ABCD가 사다리꼴이 되었다. 사다리꼴 ABCD의 높이가 h 이고 대각선 BD의 길이가 m 일 때, 평면도형과 관련된 성질을 이용해 사다리꼴 ABCD의 면적 R 을 m 과 h 에 관한 식으로 구하고 그 과정을 논리적으로 기술하시오.

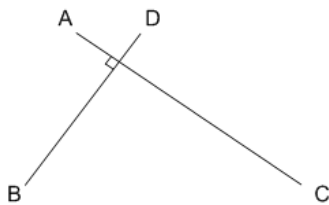


그림 3

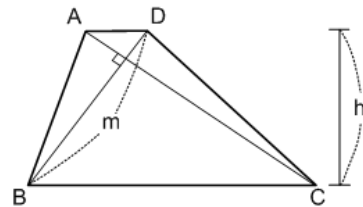


그림 4

【문제 2】 (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

(가) 근대 역학의 기초를 세운 갈릴레이는 “자연은 수학적 언어로 씌어졌다”라고 주장할 정도로 수학을 중시하였다. 그는 중력장에서 운동하는 물체의 움직임을 기술하기 위해 등속운동과 등가속도 운동을 수학적으로 정의하였다. 등속운동은 임의의 시간 간격 동안에 움직이는 물체의 이동 거리가 서로 같은 운동이라고 정의하였고, 유사한 방법으로 등가속도 운동은 같은 시간 간격 동안 동일한 속력의 증가분을 갖는 운동으로 정의하였다. 그가 제시한 자유 낙하의 법칙은 무거운 물체가 먼저 떨어진다는 기존의 통설을 뒤집는 것이었다. 즉, 공기 저항을 무시하면 같은 시간 동안 자유 낙하하는 물체의 운동거리는 물체의 질량에는 무관하고 시간의 제곱에 비례한다는 것이다. 이러한 이론들은 그의 탄도학 연구에 적용되었으며, 중력장에서 비스듬히 발사된 포탄은 수평 방향으로는 등속운동을 하고 수직 방향으로는 등가속도 운동을 하며, 그 결과로 포탄의 궤적이 포물선임을 보였다.

(나) 케플러는 방대한 천체 관측 자료를 분석하여 아래의 세 가지 행성 운동 법칙을 발표하였다.

케플러의 제1법칙 : 모든 행성들은 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 그리며 운동한다.

케플러의 제2법칙 : 태양과 행성을 연결하는 선분이 같은 시간 동안 행성의 궤도면에서 그리는 면적은 행성의 위치에 관계없이 일정하다.

케플러의 제3법칙 : 행성의 공전주기의 제곱은 타원 궤도의 장반경의 세제곱에 비례한다.

케플러의 법칙들은 이론적인 기초가 없이 오직 관측에만 의존하는 것이었다. 뉴턴은 그의 운동 법칙들과 만유인력 법칙을 이용하여 행성들이 타원 궤도 운동을 한다는 케플러의 주장을 증명하였다. 뉴턴의 운동 법칙과 만유인력의 법칙을 이용하면 인공위성의 궤도 운동을 설명할 수 있다. 원형 궤도 운동을 하는 인공위성이 일정 고도를 유지하기 위해서는 지구와 위성 간의 만유인력과 인공위성의 회전에 의한 원심력의 크기가 평형을 이뤄야 한다. 즉, $G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_s^2}{R}$ 의 조건이 성립하여야 한다. 여기서 G 는 만유인력 상수, M 은 지구의 질량, m 은 인공위성의 질량, R 은 지구 중심부터 인공위성까지의 거리이며 v_s 는 인공위성의 회전 속도이다. 만약 이 인공위성의 속도가 v_s 보다 크거나 작다면 인공위성은 궤도를 이탈하게 된다.

(다) 가속도 a 와 속력 v 의 정의와 미적분을 이용하면 등가속도 운동을 하는 물체의 이동거리 s 와 속력 및 가속도의 관계를 아래와 같이 표현할 수 있다.

① 속력과 가속도의 관계

가속도는 시간에 따른 속력의 변화율이다. 즉,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a$$

적분하면,

$$v = at + v_0$$

여기서 적분 상수 v_0 는 $t=0$ 일 때의 속력, 즉 초기 속력을 의미한다.

② 이동 거리와 속력의 관계

속력은 시간에 따른 이동 거리의 변화율이다. 즉,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

①에서 구한 속력 v 를 대입하면,

$$\frac{ds}{dt} = at + v_0$$

적분하면,

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

여기서 s_0 는 $t=0$ 일 때의 위치, 즉 초기 위치를 의미한다.

[문제 2-1] 갈릴레오는 관찰을 통해 정지 상태에서 자유 낙하하는 물체가 일정한 시간 간격 동안 이동한 거리는 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... 등의 비율로 증가한다고 하였다. 공기 저항을 무시할 때, 중력가속도가 g 임을 이용하여 정지 상태에서부터 자유 낙하하는 물체의 낙하 거리와 시간의 관계식을 유도하고, 갈릴레이의 주장이 타당한지 설명하시오.

[문제 2-2] <그림 1>과 같은 형상의 표면을 질량 m 인 물체가 초기 속력 v_0 로 운동하고 있다. 마찰과 공기 저항을 무시할 때, 물체가 표면에서 떨어지는 위치는 초기 속력 v_0 와 밀접한 관계가 있다. 즉, v_0 가 클수록 물체가 표면에서 떨어지는 위치를 나타내는 각도인 θ 가 작아지는 경향을 보이게 된다. 초기 속력 v_0 의 크기를 조절하여 물체가 떨어지는 지점이 $h = R/2$ 의 조건을 만족시킬 수 있는지에 대해 제시문을 참조하여 설명하시오. 단, h 와 R 은 그림에 나타낸 바와 같다.

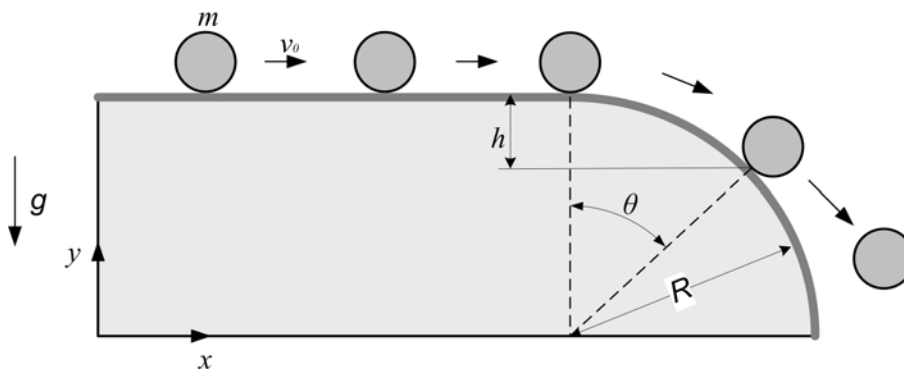


그림 1

【문제 3】 (30점)

※ 다음 제시문을 읽고 답하시오.

(가) 기체는 불규칙하게 운동하는 작은 입자(원자나 분자)로 구성되어 있으며, 기체입자의 평균 운동에너지는 절대온도에 비례한다. 보일의 법칙에 의하면, 일정한 온도에서 기체의 부피는 압력에 반비례한다. 샤를의 법칙에 의하면, 일정한 압력에서 기체의 부피는 온도에 비례한다. 아보가드로의 법칙에 의하면, 일정한 압력과 온도에서 기체의 부피는 몰 수에 비례하며, 0℃, 1기압($1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$)에서 기체 1몰은 22.4리터의 부피를 차지한다. 보일, 샤를, 아보가드로의 세 가지 법칙을 하나로 묶으면 이상기체 법칙을 만들 수 있다. 몰 수는 질량을 분자량으로 나눈 수이다.

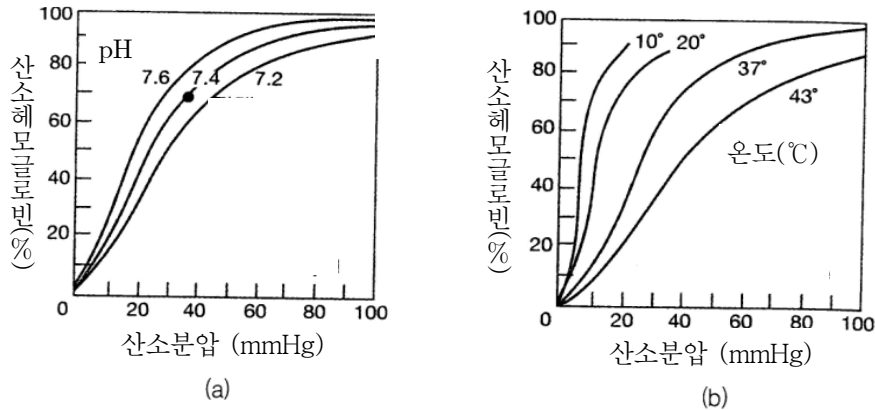
액체에 대한 기체의 용해도는 압력과 온도에 영향을 받는다. 1803년 영국의 화학자 헨리는 기체가 물에 녹아 들어가는 양과 그 기체의 압력과 관계를 연구하여, 일정한 온도에서 기체의 용해도는 액체 위에 있는 기체의 분압(부분압력)에 비례한다는 것을 발견하였다. 이것을 헨리의 법칙이라고 한다. 온도가 올라가면 액체에 대한 기체의 용해도는 감소한다. 물에 대한 질소의 용해도는 1기압에서 0.0024 g/cm^3 이고 물 속 40m 깊이의 압력인 5기압에서는 0.012 g/cm^3 이다. 물에 대한 헬륨의 용해도는 질소의 약 1/5 정도이다.

(나) 잠수부가 흡입한 공기 중 산소는 몸의 각 조직에서 소비되지만 질소는 그대로 혈액 속에 남는다. 잠수부가 산소와 질소가 주성분인 공기통을 사용하면 질소 기체가 잠수병의 원인이 될 수 있다. 수면에서는 1기압이 작용하지만 물속으로 10m 내려갈 때 마다 약 1기압씩 높아진다. 잠수부가 빠른 속도로 수면 위로 올라오게 되면 압력이 낮아져 질소의 용해도가 급격하게 변한다. 이 때, 혈액 속에서 기포가 만들어진다. 이로 인해 혈액의 흐름을 방해하여, 신체 장기에 손상을 주거나 뇌의 모세혈관을 터뜨릴 수도 있다. 잠수부의 공기통에는 100% 산소만 넣는 게 아니라 대기 성분과 비슷하게 질소 대 산소를 약 8:2로 넣는다. 공기통에 질소 대신 헬륨 기체를 넣어 사용하면 헬륨은 체내에서 반응을 하지 않을 뿐 아니라, 혈액에 대한 용해도가 질소와 큰 차이가 있기 때문에 잠수병을 일으킬 위험이 감소한다.

(다) 생물은 호흡을 통해 체내의 유기물을 분해함으로써 살아가는 데 필요한 에너지를 얻는다. 숨을 들이쉴 때 폐포에서 공기 중의 산소가 혈액으로 들어가고 이산화탄소가 혈액에서 공기 중으로 나간다. 폐포를 둘러싸고 있는 모세혈관으로 확산된 산소는 적혈구 내의 헤모글로빈(Hb)에 의하여 운반된다. 혈액이 가지고 있는 산소를 각 기관에 운반해 준다는 것은 혈액 속에서 운반의 주체가 되는 철에 결합된 산소가 해리되어 조직으로 떨어져 나간다는 뜻이다. 헤모글로빈의 분자식은 $\text{C}_{3032}\text{H}_{4816}\text{N}_{780}\text{S}_8\text{Fe}_4$ 이고, 헤모글로빈의 분자량은 6.45×10^4 이다. 헤모글로빈의 활성자리에는 Fe^{2+} 이온이 존재한다. 철 원자 1개에 대해 1분자씩의 산소가 결합하므로 1분자의 헤모글로빈은 4분자의 산소를 운반할 수 있다.

헤모글로빈은 산소와 결합을 이루는 독특한 성질이 있어서 산소분자는 헤모글로빈 분자의 철이온에 달라붙는데, 산소가 많을 때는 결합하여 산소헤모글로빈이 되고 산소가 적은 곳에서는 해리한다. 이런 헤모글로빈의 성질로 인해서 허파와 같은 호흡기로부터 조직세포로 산소를 운반할 뿐 아니라, 반대로 조직세포로부터 허파로 이산화탄소를 운반함으로써 혈액의 pH(산성도)가 변하는 것을 방지한다. 산소 분압(P_{O_2})이 낮아지면 헤모글로빈의 산소결합 친화력이 낮아져서 많은 산소가 해리하여 조직세포로 방출된다. pH가 낮아져도 산소를 보다 잘 방출하게 된다.

산소 분압 변화에 따른 헤모글로빈의 산소에 대한 친화력(또는 산소헤모글로빈의 포화도)을 나타내는 그래프를 산소헤모글로빈 해리곡선이라 한다. pH(H^+ 의 농도), 온도, CO_2 농도 등도 산소헤모글로빈의 친화 및 해리에 영향을 미치는 인자이다. 허파에서 혈액의 산소 분압은 100mmHg이고 산소헤모글로빈의 포화도는 97%이상이다. 정맥피에서 산소의 분압은 40mmHg 정도가 되고 산소헤모글로빈의 포화도는 75% 이하로 떨어진다. 운동을 하면 산소의 분압은 더 떨어지게 된다. 아래 그림은 산소헤모글로빈 해리곡선의 예를 나타낸 것이다.



[문제 3-1] 수심 변화에 대한 신체 폐쇄조직(예; 폐, 중이, 귀마개로 막힌 외도 등)의 적응 능력은 폐쇄조직의 부피 변화율로 알 수 있다. 아래 두 가지 경우 중 어느 경우가 신체의 폐쇄조직이 더 적응하기 어려운지 설명하시오. 단, 해수의 온도는 일정하고, 경우 (a)와 (b)에서 잠수부의 상승 속도는 같다고 가정한다.

(a) 잠수부가 수심 10m에서 해수면까지 상승할 경우

(b) 잠수부가 수심 40m에서 수심 30m까지 상승할 경우

[문제 3-2] 혈액이 5리터인 사람이 있다. 이 사람이 산소와 질소만 들어있는 공기통을 사용하여 40m 잠수 후 급격히 수면으로 올라왔을 때, 혈액 내에서 기체로 변하는 가스의 부피를 구하시오. 수심 40m에서 공기는 혈액에 용해되어 포화상태에 있다고 가정한다. 수면에서 혈액에 가해지는 압력은 1기압이다. 1기압, 37°C의 혈액 100ml에는 질소 1.4mg이 용해된다. 본 문제를 풀 때 혈액의 고체 성분은 무시한다. 37°C, 1기압에서 기체 1몰은 25.4리터의 체적을 차지한다.

[문제 3-3] 혈액 100ml에는 15mg의 헤모글로빈이 있다고 가정한다. 헤모글로빈 1g은 최대 1.34ml의 산소와 결합한다. 허파에서 혈액의 산소 분압은 100mmHg이고 헤모글로빈의 산소에 대한 친화력(또는 산소헤모글로빈의 포화도)은 97%이다. 운동을 할 때, 어느 조직의 정맥피에서 산소 분압이 30mmHg이고 헤모글로빈의 산소에 대한 친화력이 57%라면 이 조직에 혈액 100ml 당 공급되는 최대 산소량은 얼마인지 구하시오.