

2018학년도 모의논술 I

자연계열 문제

수학

[문제 1]

원탁 테이블 3개가 있는 점심 뷔페 식당이 있다. 테이블 번호가 1부터 3까지 순서대로 매겨져 있고, 각 테이블당 최대 4명의 손님이 앉을 수 있다. 손님들은 모두 한 명씩 순서대로 각자 들어와서 다음과 같은 규칙으로 테이블을 선택한 후 식사를 한다.

- 첫 번째로 들어오는 손님은 무조건 1번 테이블에 앉는다.
- n 번째로 들어오는 손님은 비어있는 테이블들 중 번호가 가장 빠른 테이블에 $\frac{3}{n+2}$ 의 확률로 앉고, 이미 손님이 앉아 있는 테이블에는 $\frac{c}{n+2}$ 의 확률로 선택해서 앉는다. 여기서 c 는 그 테이블에 이미 앉아 있는 손님의 수를 나타낸다. (단, $n = 2, 3$)

오늘 점심 시간에 서로 알지 못하는 사이인 3명의 손님이 연이어 도착한 후 각각 순서대로 들어와서 식사를 한다고 가정하자. 오늘 이 식당에서 점심 시간에 사용될 테이블 수의 기댓값을 구하시오. [20점]

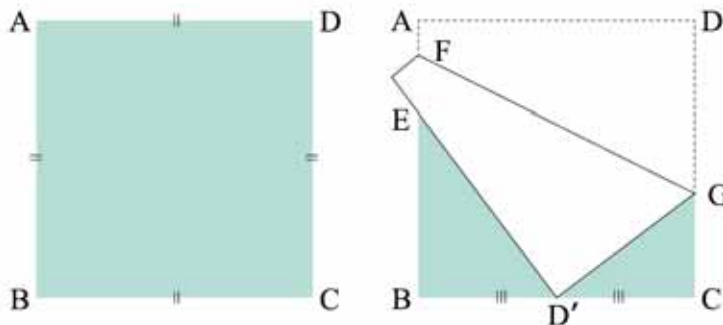
[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 점 $P'(x',y')$ 로 옮기는 것을 대칭이동이라고 한다. 점 $P(x,y)$ 의 x 축에 대한 대칭이동은 $(x,y) \rightarrow (x,-y)$, y 축에 대한 대칭이동은 $(x,y) \rightarrow (-x,y)$, 원점에 대한 대칭이동은 $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$ 와 같이 나타낸다. 일반적으로 점 $P(x,y)$ 를 직선 $ax+by+c=0$ 에 대하여 대칭이동한 점 $P'(x',y')$ 가 있을 때, 직선 PP' 는 직선 $ax+by+c=0$ 과 수직으로 만나고 그 만나는 점은 선분 PP' 의 중점이다.

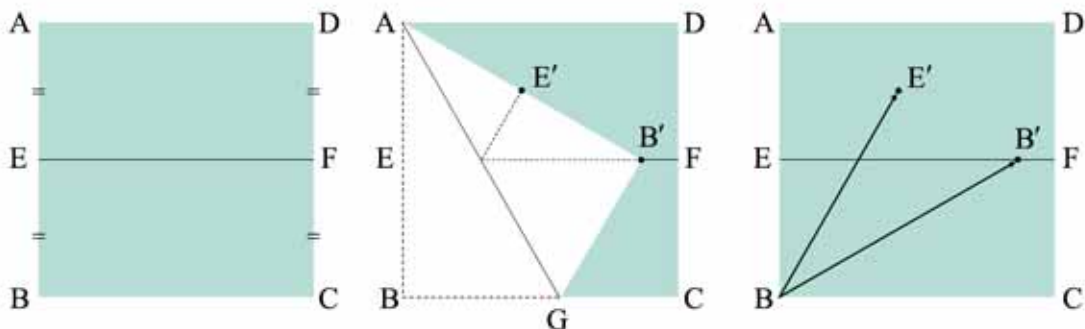
- 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)일 때 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

[문제 2-1] 한 변의 길이가 1인 정사각형 종이 ABCD가 있다. 꼭짓점 D가 변 BC의 중점 D'와 일치하도록 접었을 때 선분 AF와 선분 BE의 길이를 논리적으로 구하시오. [10점]



[문제 2-2] 한 변의 길이가 1인 정사각형 종이 ABCD가 있다. 이 종이를 반으로 접었다 펴서 변 AB의 중점 E와 변 CD의 중점 F를 연결한 선분 EF가 생기도록 자국을 내었다. 꼭짓점 B가 선분 EF 위에 놓이도록 아래 그림과 같이 접어 점 E'와 B'를 표시하고 다시 폈다. 즉 삼각형 ABG와 삼각형 AB'G는 합동이고, E와 E', B와 B'는 선분 AG에 대해 대칭이다. 벡터 $\vec{BE'}$ 와 벡터 $\vec{BB'}$ 가 이루는 각 $E'BB'$ 를 구하는 과정을 점의 대칭이동을 이용하여 논리적으로 제시하시오. [15점]



[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 한 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.
- 함수 $f(x)$ 에서 $x = a$ 를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(a) \leq f(x)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소라 하고, $f(a)$ 를 극솟값이라고 한다.

[문제 3-1] 타원 $n^2x^2 + (n+1)^2y^2 = 1$ 위의 두 점 $P_n\left(\frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$, $Q_n\left(-\frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{3}}{2(n+1)}\right)$ 에서의 두 접선의 교점을 R_n 이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nR_n$ 의 넓이를 b_n 이라 할 때 $\sum_{n=1}^{10} b_n$ 의 값을 구하시오. [10점]

[문제 3-2] $\int_0^t (3^n x^3 - 3^n x^2 + 9n) dx = 0$ 을 만족시키는 0보다 큰 상수 t 가 존재하도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [15점]

[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

가

생명체가 겉으로 드러내는 형질을 표현형이라고 하며, 표현형의 원인이 되는 유전자의 구성을 기호로 나타낸 것을 유전자형이라고 한다. 유전 연구를 위해서는 세대가 짧고 인위적 교배가 가능해야 하는데, 사람을 대상으로 이와 같은 연구를 할 수 없기 때문에 가계도 조사, 집단 조사, 쌍둥이 연구 등의 간접적 방법으로 주로 연구한다. 가계도 조사를 통해 특정 유전 형질을 가지고 있는 가계에서 형질이 어떻게 유전되는지 알아볼 수 있다. 남녀에 따라 형질이 나타나는 빈도는 유전자가 세포 내 DNA의 어디에 존재하는지에 따라 달라질 수 있다.

나

진핵 세포의 구조와 기능을 유지하는데 필요한 대부분의 유전자는 세포 핵 DNA에 존재한다. 그러나 ATP를 생성하는 세포 내 소기관인 미토콘드리아도 자체적으로 DNA를 가지고 있다. 미토콘드리아는 만 육천여 개의 염기 쌍으로 구성된 원형 DNA를 가지고 있으며 여기에는 미토콘드리아의 전자 전달계를 구성하는 일부 단백질을 암호화하는 유전자가 존재한다. 최근의 연구 결과를 통해 미토콘드리아의 기능 이상이 비만, 고혈압, 당뇨, 신경퇴행성 질환 등과 관련이 있다는 사실이 속속 밝혀지고 있다.

다

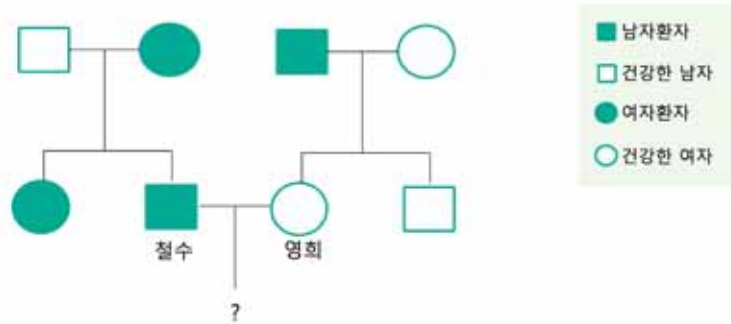
신장에서는 여과, 재흡수, 배설의 세 가지 기본 기능을 통해 소변이 생성된다. 혈액은 신동맥을 통해 신장으로 들어가며, 더 작은 소동맥으로 갈라져 사구체로 들어간다. 사구체로 들어가는 수입 소동맥의 혈관 지름보다 사구체에서 나오는 수출 소동맥의 지름이 작기 때문에 사구체 모세혈관에서는 높은 혈압이 형성된다. 이로 인해 물, 요소, 나트륨, 포도당과 같이 크기가 작은 분자들이 보면 주머니에서 여과되어 원뇨를 형성한다. 따라서 원뇨의 포도당 농도는 혈장의 포도당 농도와 비슷하다. 그러나 혈구나 단백질 등과 같이 크기가 큰 물질들은 사구체 막을 통과할 수 없기 때문에 원뇨에는 포함되지 않는다. 보면 주머니에서 여과된 원뇨 내 포도당, 무기 염류 등은 세뇨관을 지나는 동안 세뇨관을 둘러싸고 있는 모세혈관으로 재흡수된다.

라

당뇨병 환자의 혈장 내 포도당 농도는 비정상적으로 높아져 있고, 이로 인해 생체 내 장기에 손상이 발생할 수 있다. 당뇨병은 크게 인슐린 의존성 당뇨병인 유형 I과 인슐린 비의존성 당뇨병인 유형 II로 구분된다. 유형 I은 인슐린 분비 세포가 파괴되어 인슐린을 생산하지 못하는 경우로 전체 당뇨병 환자의 5% 정도를 차지하며 소아성 당뇨병이 대부분 여기에 해당된다. 유형 II는 인슐린은 생산되지만 인슐린 수용체를 통한 세포 신호 전달에 문제가 생겨 혈당이 조절되지 않는 경우인데 당뇨병 환자의 95% 정도가 여기에 해당된다. 당뇨병 환자의 경우 체내의 혈당량 조절에 문제가 있기 때문에 소변에서 포도당이 검출될 수 있다.

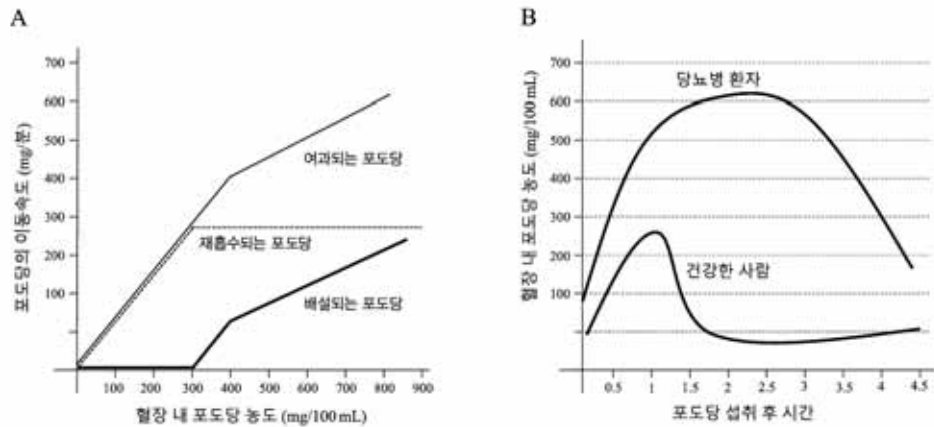
[문제 4-1]

중년의 나이에 갑자기 시력을 잃는 어떤 유전병은 미토콘드리아에 존재하는 Q라는 유전자의 돌연변이로 인해 전자 전달계 특정 단백질의 기능이 상실되어 발병한다고 알려져 있다. 아래의 가계도에서 철수와 영희가 결혼하여 아들을 낳았을 때, 아들이 이 유전병을 가질 확률을 제시문 (가), (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]



[문제 4-2]

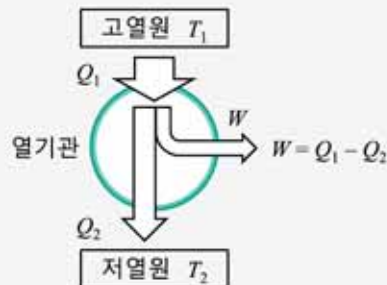
다음 그림 A는 기능이 정상적인 신장의 혈장 내 포도당 농도에 따른 포도당의 여과, 재흡수 및 배설의 속도를 나타낸 그래프이다. 또한 그림 B는 건강한 사람과 당뇨병 환자가 포도당을 섭취했을 때 시간에 따른 혈장 내 포도당 농도의 변화를 나타낸 그래프이다. 제시문 (다), (라)에 근거하여 이 두 사람이 포도당을 섭취한 후 시간이 지남에 따라 소변 내 포도당 농도가 어떻게 변화하는지를 비교 설명하시오. (단, 당뇨병 환자의 신장 기능은 정상이라고 가정한다.) [20점]



[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

가

열에너지를 유용한 일로 바꾸는 장치를 열기관이라고 한다. 열기관은 몇 단계의 열역학 과정을 거쳐서 원래 상태로 돌아오는 순환 과정을 통하여 작동한다. 열기관은 다음 그림과 같이 높은 온도의 고열원으로부터 열 Q_1 을 흡수한다. 이때 열 Q_1 이 모두 일 W 로 바뀌지 않고, 열기관의 주위를 둘러싸고 있는 저열원으로 열의 일부가 흘러 나간다. 저열원으로 방출되는 열을 Q_2 라고 하면 열기관이 외부에 한 일 W 는 $W = Q_1 - Q_2$ 가 된다.



열기관의 효율 e 는 열기관에 공급된 열 Q 과 외부에 한 일 W 의 비율에 의해 결정된다. 즉, 열기관의 효율 e 는 다음과 같다.

$$e = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

프랑스의 과학자인 카르노는 열효율이 가장 높은 이상적인 열기관에 대하여 연구하였다. 카르노 기관의 열효율 ($e_{\text{카}}$)은 어떤 열기관보다도 높고, 고열원의 온도 T_1 과 저열원의 온도 T_2 로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$e_{\text{카}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

나

일반적으로 기체에 가해 준 열량 Q , 내부 에너지의 증가량 ΔU , 기체가 외부에 한 일 W 의 관계는 다음과 같다.

$$Q = \Delta U + W$$

즉, 기체에 가해 준 열에너지는 내부 에너지의 증가와 외부에 한 일의 합과 같다. 이러한 관계를 열역학 제1법칙이라고 한다.

다

기체 상수를 R 이라고 할 때, 압력 P , 부피 V , 온도 T 인 n 몰의 이상 기체에 대하여 $PV = nRT$ 의 관계가 성립한다. 이것을 이상 기체 상태 방정식이라고 한다. 단원자 분자로 이루어진 n 몰의 이상 기체가 있을 때 그 내부 에너지 U 는 다음과 같다.

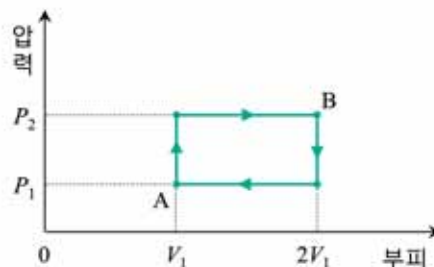
$$U = \frac{3}{2}nRT$$

라

정적 과정은 기체의 부피가 일정하게 유지되는 열역학 과정이다. 열을 받은 기체는 분자 운동이 활발해지면서 압력이 증가한다. 정적 과정에서는 기체가 외부에 한 일이 0이므로 기체에 가해 준 열량 Q 는 모두 내부 에너지의 변화 ΔU 로 나타난다. 한편, 등압 과정은 기체의 압력이 일정하게 유지되면서 부피가 변하는 과정이다. 기체의 압력이 P 로 일정하게 유지되면서 부피가 $\Delta V = V_2 - V_1$ 만큼 바뀐다면, 기체가 외부에 한 일 W 는 $W = P \cdot \Delta V = P(V_2 - V_1)$ 이 된다. $W > 0$ 이면 기체가 팽창하면서 외부에 일을 한 것이고, $W < 0$ 이면 기체가 수축하면서 외부로부터 일을 받은 것이다. 등압 과정에서 부피가 팽창하면서 압력이 일정하게 유지되는 경우, 이상 기체 상태 방정식에 따라 기체의 온도가 상승한 것이고, 이것은 내부 에너지도 증가한 것을 의미한다. 따라서 등압 과정에서 기체가 받은 열량은 내부 에너지의 증가와 외부에 일을 하는 데 사용된다.

[문제 4-1] 온도가 서로 다른 열원 A, B, C가 있다. 열원 A와 B 사이에서 동작하는 카르노 기관의 효율이 e_1 , 열원 B와 C 사이에서 동작하는 카르노 기관의 효율이 e_2 일 때, 열원 A와 C 사이에서 동작하는 카르노 기관의 효율을 구하는 과정을 제시문 (가)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, 세 열원 중 열원 B의 온도가 가장 높고, $e_2 > e_1$ 이다.) [10점]

[문제 4-2] n 몰의 단원자 이상 기체의 열역학 과정을 통해 일을 하는 열기관이 있다. 이 열기관의 이상 기체는 아래 그래프와 같이 A 상태에서 정적 과정과 등압 과정을 통해 외부에 일을 하여 B 상태가 된 후, 다시 정적 과정과 등압 과정을 통해 외부에서 일을 받아 A 상태로 되돌아 온다. 이 순환 과정에서 열기관이 순수하게 한 일은 외부에 한 일과 외부에서 받은 일의 차이만큼이며, 이를 이용하여 계산된 열기관의 효율을 e_0 이라고 하자. A 상태의 온도를 갖는 저열원과 B 상태의 온도를 갖는 고열원 사이에서 동작하는 카르노 기관의 효율을 $e_{\text{카}}$ 라고 할 때, e_0 을 $e_{\text{카}}$ 의 식으로 나타내는 과정을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]



[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하십시오.

가

옥텟 규칙에 따라 금속 원자는 전자를 잃어 양이온이 되려고 하고, 비금속 원자는 전자를 얻어 음이온이 되려고 한다. 나트륨 원자와 염소 원자가 서로 가까이 접근하면 나트륨 원자의 전자 1개가 염소 원자로 옮겨가서 각각 나트륨 이온(Na^+)과 염화 이온(Cl^-)이 된다. 이때 나트륨 이온과 염화 이온은 서로 반대의 전하를 띤 입자이므로 인력이 작용하여 염화 나트륨을 형성하게 된다. 이와 같이 양이온과 음이온 사이의 정전기적 인력에 의해 만들어진 화학 결합을 이온 결합이라고 한다.

나

결정성 고체를 구성하는 입자들의 규칙적인 배열은 결정 격자 구조로 설명되며, 각 결정 구조에서 결정 격자의 특성을 나타내는 가장 작은 구조를 단위 세포라고 한다. 결정 격자 구조의 단위 세포에는 정육면체의 8개 꼭짓점에 같은 종류의 입자가 배열된 단순 입방 격자, 단순 입방 격자의 단위 세포 중심에 또 하나의 입자가 자리잡은 체심 입방 격자, 단순 입방 격자의 단위 세포 6개 면의 중심에 또 다른 입자가 자리잡은 면심 입방 격자가 있다. 단순 입방 격자 단위 세포의 꼭짓점에 있는 입자들은 각 단위 세포에 $\frac{1}{8}$ 씩 기여하고, 면심 입방 격자 단위 세포의 면에 있는 입자들은 각 단위 세포에 $\frac{1}{2}$ 씩 기여한다.

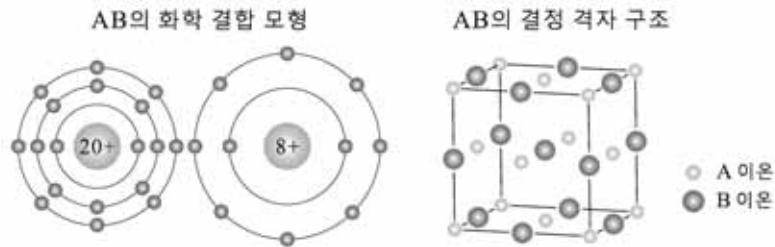


다

원자는 양성자, 중성자, 전자로 구성되어 있다. 원자는 전기적으로 중성이므로 양성자 수와 전자 수가 항상 같지만, 양성자 수와 중성자 수는 항상 같지는 않다. 원자핵 속의 양성자 수를 그 원소의 원자 번호라고 한다. 전자의 질량은 양성자나 중성자의 질량에 비해 무시할 정도로 작으므로 양성자 수와 중성자 수를 합한 수로 원자의 질량을 나타내는데, 이것을 질량수라고 한다.

전자가 여러 개 있는 원자에서는 다른 전자들이 핵의 (+)전하를 가리기 때문에 최외각 전자 껍질의 전자가 실제로 느끼는 핵전하는 양성자 수에 따른 핵전하에 비해 작은 값을 갖게 되는데, 이때 전자가 실제로 느끼는 핵전하를 유효 핵전하라고 한다. 주기율표의 같은 족에서는 원소의 원자 번호가 증가할수록 핵과 바깥 껍질에 있는 전자 사이의 거리가 멀어지기 때문에 원자 반지름이 증가한다. 주기율표의 같은 주기에서는 원소의 원자 번호가 증가하여도 전자 껍질의 수가 같고, 바깥 껍질의 전자는 가림 효과가 크지 않아 원자 반지름이 감소하는 경향이 있다.

[문제 4-1] 다음 그림은 화합물 AB의 화학 결합 모형과 결정 격자 구조를 나타낸 것이다.



화합물 AB에 있는 A 양이온의 전하와, 결정 격자 구조의 단위 세포에 포함된 B 이온의 수를 제시문 (가), (나)에 근거하여 구하시오. (단, A와 B는 임의의 원소 기호이다.) [10점]

[문제 4-2] 아래 표는 이온 결합 화합물인 X를 구성하는 C이온과 D이온에 대한 자료로, C이온과 D이온은 모두 원자 번호 18번인 아르곤(Ar)과 바닥 상태의 전자 배치가 같다.

	중성자 수	전자 수	질량수
C 이온	a	a	$2a - 1$
D 이온	b	$b - 2$	$2b$

제시문 (다), (라)에 근거하여 X의 화학식을 구하고, C이온과 D이온의 이온 반지름 크기를 비교하는 과정을 논리적으로 설명하시오. (단, C와 D는 임의의 원소 기호이다.) [20점]