

2017학년도 모의논술

자연계열 문제

자연계열 - 수학

문제 1

택시 기사 김씨는 두 지역 A와 B에서만 운행하고 있다. A 지역에서 탑승한 승객이 A 지역 내로 이동할 확률은 0.6이고, B 지역으로 이동할 확률은 0.4이다. 또한, B 지역에서 탑승한 승객이 A 지역으로 이동할 확률은 0.3이고 B 지역 내로 이동할 확률은 0.7이다. 택시비는 A 지역 내에서 이동 시 2,000원, B 지역 내에서 이동 시 3,000원, A 지역과 B 지역 간 이동 시 4,000원이라고 한다. 김씨가 A 지역에서 운행을 시작할 확률이 0.4이고 B 지역에서 시작할 확률이 0.6이라고 할 때, 한 번 운행으로 얻게 되는 수입의 기댓값을 구하시오. [20점]

문제 2

다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x)| dx$ 이다.
- 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(c) = 0$ 이고 $x=c$ 의 좌우에서 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소이다.

문제 2-1

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 원 $x^2 + y^2 = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 논리적으로 구하시오. [10점]

문제 2-2

함수 $h(x) = (x+1)^2$ 에 대하여 $h(x^4 - x^2)$ 의 최솟값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

문제 3 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 좌표평면 위에서 x, y 에 대한 부등식을 만족하는 점 (x, y) 전체를 부등식의 영역이라고 한다.
- 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)일 때 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

문제 3-1

자연수 k 에 대하여 부등식 $|x - 1| + |y - 3| \leq k$ 의 영역의 넓이를 S_k 라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. [10점]

문제 3-2

자연수 n 과 두 점 $A(\sqrt{n}, 0), B(0, n)$ 에 대하여 부등식 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} \leq 0$ 을 만족하는 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 영역의 넓이를 T_n 이라 하고, $a_n = T_{n+1} - T_n$ 이라 정의하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T_n}$ 과 $\sum_{n=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$ 의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. [20 점]

문제 4 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 생물에서 겉으로 드러나는 형질을 표현형이라고 하며, 표현형의 원인이 되는 유전자 구성을 기호로 나타낸 것을 유전자형이라고 한다. 유전자형은 두 개의 문자로 표시하는데, 일반적으로 우성 대립 유전자는 대문자로 표시하고, 열성 대립 유전자는 소문자로 표시한다. 한 쌍의 대립 유전자는 감수 분열 과정에서 분리되어 각각의 생식 세포에 들어가게 되는데, 이를 분리의 법칙이라고 한다. 또한, 두 쌍 이상의 대립 형질이 동시에 유전될 때 각각의 형질을 나타내는 유전자가 서로 영향을 주지 않고 독립적으로 우성과 열성, 분리의 법칙에 따라 유전되는 현상을 독립의 법칙이라고 한다.

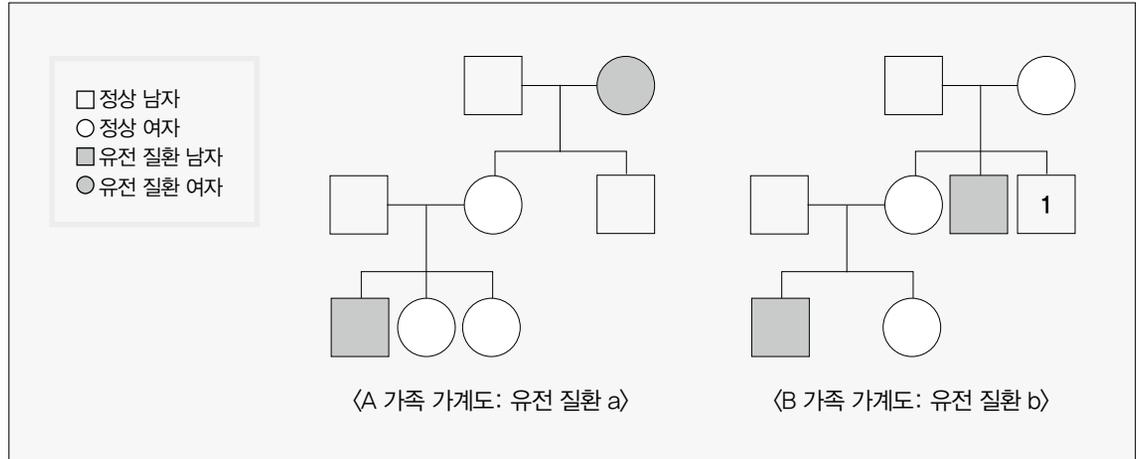
(나) 형질에 관여하는 유전자가 어느 염색체에 있느냐에 따라 상염색체에 의한 유전과 성염색체에 의한 유전으로 구분할 수 있다. 상염색체에 있는 유전자는 남녀 모두에게 나타나고 멘델의 법칙에 따라 유전되며, 가계도 분석을 통해 유전의 원리를 확인할 수 있다. 부모에게 없던 형질이 자손에게 나타날 경우 부모는 이형 접합으로 열성 유전자를 하나씩 가진다는 것을 의미한다. 유전자가 성염색체에 있으면 남녀의 성염색체 구성이 다르므로 남녀에 따라 형질이 나타나는 빈도가 달라진다. 유전자가 X 염색체에 있어서 남녀에 따라 형질이 출현하는 빈도가 달라지는 유전 현상을 반성 유전이라고 한다. 한편 유전자가 Y 염색체에 존재할 경우, Y 염색체는 아버지로부터 아들에게 그대로 전달되므로 자손 중 남자에게만 형질이 나타난다.

(다) 핵은 세포를 염색하여 현미경으로 관찰했을 때 가장 선명하게 보이는 둥근 모양의 세포 소기관으로, 대부분의 세포에 한 개씩 들어 있으며, 세포의 구조와 기능을 결정하고 세포의 생명활동을 조절하는 역할을 한다. 리보솜은 RNA와 단백질로 이루어진 두 개의 크고 작은 단위체로 구성되어 있고, DNA의 유전 정보에 따라 단백질을 합성한다. 소포체에 붙어 있는 리보솜에서 합성된 단백질은 소포체 내부로 들어간다. 소포체는 납작한 주머니와 관이 복잡하게 연결되어 있는 모양의 세포 소기관이며 단일막으로 이루어져 있다. 골지체는 단일막으로 이루어진 세포 소기관으로, 단백질을 포장하여 세포 내의 다른 위치로 운반하거나 세포 밖으로 분비하는 역할을 한다. 미토콘드리아는 DNA와 리보솜을 가지고 있기 때문에 스스로 복제하여 증식할 수 있고, 유기물을 분해하여 에너지를 얻는 세포 호흡이 일어나는 장소이다.

(라) 만약, 우리 몸을 구성하는 세포의 세포 주기 조절에 이상이 생기면 어떤 일이 발생할까? 정상 세포를 배양하면 세포에 따라 일정한 수만큼 분열한 후 더 이상 분열하지 못한다. 그러나 암세포는 세포 주기를 지속적으로 반복하기 때문에 영양분이 계속 공급되는 상황에서는 무한정 분열할 수 있다. 이러한 암세포의 특성은 세포 주기를 조절하는 신호를 무시하기 때문인 것으로 알려져 있는데, 많은 암세포에서 세포 주기를 조절하는 유전자의 이상으로 인한 비정상적인 단백질 합성이 발견된다.

문제 4-1

다음 그림은 유전 질환 a, b를 각각 가지고 있는 두 가족의 유전 형질을 조사한 가계도이다. 각 가족의 유전 질환을 결정하는 유전자는 어떤 염색체에 있는지 제시문 (가), (나)에 근거하여 설명하고, 1번 남자와 유전 질환 b를 가지고 있는 여자 사이에서 유전 질환 b가 있는 남자 아이가 태어날 확률을 논리적으로 설명하시오. 단, 돌연변이는 고려하지 않는다. [10점]



문제 4-2

아래 표는 어느 환자의 정상 조직에서 얻은 정상 세포와 질환이 있는 부위에서 얻은 세포(C 세포)의 특징을 조사하여 정리한 것이다. 동일한 개수의 정상 세포와 C 세포를 일정 시간 동안 배양할 경우 예상할 수 있는 세포 수의 변화를 그래프로 나타내고, 그 이유를 제시문 (다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]

	DNA의 상대적 양 / 세포	세포질 RNA의 상대적 양 / 세포	ATP 합성량 / 포도당 1분자	단백질 합성 효율
정상 세포	1	1	38	보통
C 세포	1	1.5	38	높음

문제 4 다음 제시문 (가), (나), (다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 플랑크는 “열복사 에너지는 불연속적인 값을 갖는다.”는 양자 가설을 제안하였다. 1905년 아인슈타인은 플랑크가 제안한 양자 가설을 이용하여 “빛은 진동수에 비례하는 에너지를 갖는 광자(광양자)라고 하는 입자들의 흐름이다.”라는 광양자설로 광전 효과를 설명하였다. 광양자설에 의하면 진동수 f 인 광자의 에너지는 $E_{\text{광자}} = hf$ (h : 플랑크 상수)이다. 빛에 의해 전달되는 에너지는 연속적인 값이 아니라 광자들이 갖는 에너지의 정수배로 이루어지는 불연속적인 값을 갖는다.

(나) 모든 관성 좌표계에서 보았을 때, 진공 중에서 진행되는 빛의 속력은 관찰자나 광원의 속도에 관계없이 일정하다. 아인슈타인이 특수 상대성 이론을 발견할 수 있었던 것은 관찰자나 광원의 속도에 관계없이 광속이 일정하다는 사실을 받아들였기 때문이다. 빛의 속력이 관찰자의 운동 상태와 관계없이 항상 일정하다는 점은 직관적으로 받아들이기 어렵다. 그러나 광속이 일정하다는 사실은 마이컬슨·몰리의 실험뿐 아니라 수많은 실험으로도 증명되었다. 진동수를 f , 파장을 λ , 빛의 속력을 c 라고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$c = f\lambda$$

따라서 빛의 속력이 일정할 때 진동수가 다르면 파장도 다르다.

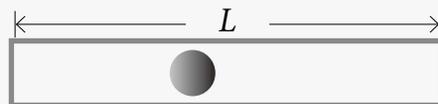
(다) 드브로이는 질량 m 인 입자가 속력 v 로 움직일 때 운동량이 p 인 입자의 물질파 파장은

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (h : \text{플랑크 상수})$$

가 될 것으로 예상하였다. 이 파장을 드브로이 파장이라고 한다. 아래 그림과 같이 길이 L 인 1차원 상자에 질량 m 인 입자가 있을 때 이 입자의 에너지는 물질파의 파장 $\lambda = \frac{h}{p}$ 를 이용해 구할 수 있다. 입자는 벽을 통과할 수 없으므로 벽의 경계에서 입자가 발견될 확률은 0이다. 이것은 물질파가 정상파 모양을 가질 때만 가능하다. 따라서 물질파의 파장은 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

운동량 p 를 입자의 에너지 식 $E = \frac{p^2}{2m}$ 에 대입하면 이 입자의 에너지를 구할 수 있다.



문제 4-1

제품 A에 사용하는 레이저의 파장은 600nm이고 제품 B에 사용하는 레이저의 파장은 900nm이다. A에 사용하는 레이저를 에너지가 E_A 인 광자의 흐름이라 하고 B에 사용하는 레이저를 에너지가 E_B 인 광자의 흐름이라 할 때, $E_A - E_B$ 를 제시문 (가), (나)에 근거하여 논리적으로 구하시오. 단, 플랑크 상수 h 는 $6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 이고 빛의 속도 c 는 $3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 이며, 공기는 고려하지 않는다. [10점]

문제 4-2

길이 L 인 1차원 상자에 있는 질량 m 인 입자가 특정 에너지 상태에 있을 때, 이 입자는 두 상태의 에너지 차이와 똑같은 크기의 에너지를 가지는 광자 한 개를 흡수하거나 방출하면서 다른 상태로 이동한다. 이러한 광자가 가질 수 있는 파장의 최댓값을 구하는 과정을 제시문에 근거하여 논리적으로 제시하시오. [20점]

문제 4 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

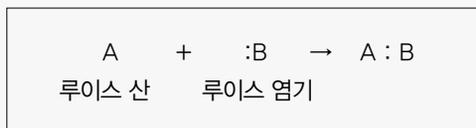
(가) 비금속 원자가 서로 전자를 내어 전자쌍을 만들고, 이 전자쌍을 두 원자가 공유함으로써 형성되는 결합을 공유 결합이라고 하며, 공유 결합을 형성하는 원자들은 중심 원자와 180°, 120°, 109.5° 등 일정한 결합각을 이룬다. 공유 결합 분자에서 중심 원자를 둘러싸고 있는 전자쌍들은 서로 같은 전하를 띠고 있으므로, 반발력이 최소가 되기 위해서 최대한 멀리 떨어져 있으려고 한다. 이를 전자쌍 반발 이론이라고 한다. 특히, 공유 결합 분자에서 한 원자에만 속해 있는 비공유 전자쌍 사이의 반발력이 공유 전자쌍 사이의 반발력보다 더 크게 나타난다.

(나) 원자가 공유 전자쌍을 끌어당기는 능력을 상대적 수치로 나타낸 것을 전기 음성도라고 한다. 공유 결합을 이루는 두 원자 사이의 전기 음성도 차이에 의해 공유 전자쌍이 한쪽으로 치우쳐서 부분적으로 음전하(δ^-)와 양전하(δ^+)를 띠게 되는 결합을 극성 공유 결합이라 하고, 이때 전자쌍이 한쪽 방향으로 치우치는 것을 쌍극자라고 한다. 극성 분자에서 극성의 크기는 쌍극자 모멘트에 의해 결정되는데, 극성 공유 결합으로 세 개 이상의 원자가 결합되어 형성된 분자는 분자의 구조가 쌍극자 모멘트에 영향을 미친다. 다음은 비활성 기체를 제외한 원자 번호 1에서 9에 해당하는 원소들의 폴링의 전기 음성도 값이다.

H 2.1						
Li 1.0	Be 1.5	B 2.0	C 2.5	N 3.0	O 3.5	F 4.0

(다) 극성 분자들이 서로 접근하면 한 분자의 부분적 양전하(δ^+)와 이웃한 분자의 부분적 음전하(δ^-) 사이에 정전기적 인력이 작용할 수 있는데, 이러한 분자 사이의 힘을 쌍극자-쌍극자 힘이라고 한다. 반면 쌍극자 모멘트가 0인 무극성 분자의 경우에는 일시적으로 분자 내의 전자가 한쪽으로 쏠리면서 전자 분포가 치우쳐 편극되면 '순간 쌍극자'가 형성될 수 있다. 순간 쌍극자 사이에 작용하는 정전기적 인력을 분산력(반 데르 발스 힘)이라고 한다. 물질의 상태가 액체에서 기체로 변하는 온도인 끓는점은 분자 사이에 작용하는 힘이 작을수록 낮고, 클수록 높다.

(라) 다음 그림은 루이스 산-염기 반응의 개념을 나타내고 있다. 루이스 산은 공유 결합을 형성하기 위해서 비공유 전자쌍을 받는 물질이며, 루이스 염기는 비공유 전자쌍을 주는 물질이다. 산과 염기의 세기는 비공유 전자쌍을 받거나 주는 정도를 의미하며, 이는 산-염기 반응의 반응성에 영향을 미친다.

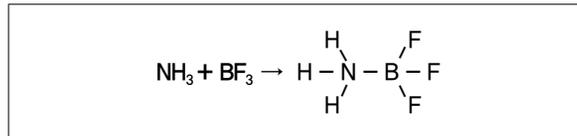


문제 4-1

암모니아(NH₃)와 삼플루오로린화 붕소(BF₃)의 극성 정도를 설명하고, 이를 바탕으로 NH₃와 BF₃ 중 끓는점이 높은 것을 제시문 (가), (나), (다)에 근거하여 논리적으로 제시하시오. [10점]

문제 4-2

다음은 암모니아(NH₃)와 삼플루오로린화 붕소(BF₃)의 루이스 산-염기 반응을 통해 BF₃NH₃ 화합물이 형성되는 반응이다. 단, 비공유 전자쌍은 그림에서 생략하였다.



위 반응 전후 분자 내에서 H-N-H의 결합각과 F-B-F 결합각의 변화를 제시문 (가), (라)에 근거하여 각각 논리적으로 설명하시오. 또한, 삼플루오로린화 붕소(BF₃) 대신 보레인(BH₃)이 암모니아와 반응하는 경우, 루이스 산-염기 반응에서 반응성의 변화(증가 또는 감소)를 제시문 (나), (라)에 근거하여 논리적으로 추론하시오. [20점]