2016학년도 수시 논술 해설

자연계열 I

1. 평가 목표와 출제 의도

문제 1 | 수학 주어진 상황을 이해하고 특정 사건에 대한 확률을 구하는 문제이다. 상황의 규칙을 잘 이해하여야 하며 관련된 확률을 곱셈정리 또는 조건부 확률로써 구할 수 있어야 한다. 실제 계산은 간단하며 주어진 상황을 이해하여 확률과 관련시키는 능력을 평가하고자 한다. 본 문제는 확률에 대한 기본 개념의 이해도를 평가하며 난이도는 중하 정도로 볼 수 있다.

문제 2 – 1 | 수학 적분은 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고 논리적 추론 능력을 배양하며 문제를 합리적으로 해결하는 방법과 태도의 기초를 제공한다. 본 문항에서는 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 수학적 통찰과 직관에 바탕을 둔 함수 사이의 관련과 관계에 대한 형식화의 능력과 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로 수학에서 중요한 대칭성과 자연과학과 공학에서의 중요한 지수함수, 삼각함수의 적분 계산 능력, 제시문을 읽고 이에 대한 깊은 고찰에 바탕을 둔 문제 해결 능력을 판단하고자 하였다. $x=\frac{\pi}{4}$에 대칭이라는 사실을 유추하고, 이를 이용하여 대칭으로 주어진 적분 구간에서 적분을 구하는 문제이다. 함수를 구체적으로 찾는 것이 아니라 대칭성을 논리적으로 이용하여야 한다. 치환 적분을 사용하여야 하는 문제이다. 함수의 대칭성, 치환 적분 개념을 이해해야 하며, 계산을 실수 없이 수행하여야 한다.

문제 2 – 2 | 수학 적분은 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고 논리적 추론 능력을 배양하며 문제를 합리적으로 해결하는 방법과 태도의 기초를 제공한다. 본 문항에서는 함수의 대칭성을 판단할 수 있는 수학적 통찰과 직관을 평가하고자 하였으며, 논리적 추론에 바탕을 둔 부분 적분의 계산 능력과 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로 수학에서 중요한 삼각함수의 적분 계산 능력, 삼각함수의 반각 공식 등의 습득 여부를 판단하고자 하였으며, 제시문의 이해 능력과 이에 대한 깊은 고찰을 통한 문제 해결 능력을 판단하고자 하였다.
주어진 조건에서 함수가 y축에 대칭이라는 사실을 유추하고, 이를 이용하여 대칭으로 주어진 적분 구간에서 적분을 구하는 문제이다. 함수를 구체적으로 찾는 것이 아니라 대칭성을 논리적으로 이용하여야 한다. 부분 적분을 두 번 사용하여야 하는 문제로서 제시문에 계산에 도움을 주고자 예를 들어 설명해 주었다. 함수의 대칭성, 부분 적분 개념을 이해해야 하며, 계산을 실수 없이 수행하여야 한다.

수학 3 – 1 | 수학 미분과 삼각함수의 덧셈정리는 기하학적인 직관과 심화된 수학적 지식, 사고방법을 습득하게 하며, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 공학, 자연과학 등의 학습 기초 능력을 제공한다. 특히 미분은 그래프의 개형을 그릴 수 있게 함으로써 방정식의 근의 개수를 판단할 수 있게 한다.

본 문항에서는 미분을 통하여 기본적인 그래프 개형을 그리는 능력을 판단하고자 하였다. 문제에 주어진 다항방정식은 탄젠트 함수 덧셈 공식에서 착안하여 도입하였다. 우선 주어진 다항방정식의 개형을 알기 위하여 도형의 개형을 아는지를 묻는 문제를 출제하였다. 3차 다항함수로 이해하여 미분을 통해서 극점과 극값을 계산하여 서로 다른 세 실근을 갖는다는 것을 보이면 된다. 교과서와 문제지를 통하여 자주 접했을 문제이기 때문에 계산 실수만 없다면 무난하게 풀 것으로 예상된다.

문제 3 – 2 | 수학 미분과 삼각함수의 덧셈정리는 기하학적인 직관과 심화된 수학적 지식, 사고방법을 습득하게 하며, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 공학, 자연과학 등의 학습 기초 능력을 제공한다. 본 문항에 주어진 다항방정식은 탄젠트 함수 덧셈 공식에서 착안하여 도입하였다. [문제 3–1]에서 주어진 다항방정식의 개형을 확인하였다. 이 문제에서는 α값이 1보다 큰 범위에서 함수의 개형을 좀 더 정밀하게 이해하고자 한다. 제시문에 있는 탄젠트 함수 공식을 주어진 다항방정식과 연결시켜 생각할 수 있는가가 문제 해결의 관건이다. 창의적 사고가 요구되는 문제이다.

문제 4 – 1 | 생명과학 세포가 생명활동을 유지하기 위해서는 계속적으로 에너지를 공급해야 한다. 특히, 생체 에너지는 세포 호흡을 통해 얻는데, 세포 호흡은 세포질과 미토콘드리아에서 이루어진다. 그러므로 미토콘드리아를 통한 산소 호흡과 무산소 호흡의 상호 관계 이해는 세포 호흡의 필수 원리이다. [문제 4–1]은 제시문 (가)와 (나)를 읽고 유산소 호흡에서 산소의 소비량과 이를 조절하는 미토콘드리아의 역할에 대한 연관성에 대한 내용을 주어진 실험 결과를 바탕으로 올바르게 이해하는지를 평가하고자 하였다. 약물 P와 Q를 통해 얻은 실험 결과의 해석이 논리적이고, 이를 통하여 미토콘드리아의 활성을 저해하거나 전체적인 유산소 호흡 과정의 효율을 낮춘다는 것을 합리적인 추론을 통하여 과학적인 결론을 유도할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

문제 4 – 2 | 생명과학 바이러스는 인간뿐 아니라 여러 생명체에 다양한 질병을 일으키는 원인이 된다. [문제 4–2]는 바이러스 감염 및 증식에 대한 생명과학 I 교과서의 제시문과 문제에 주어진 실험 결과를 논리적으로 해석할 수 있는지를 묻는 사고력 측정 문제이다. 제시문에 주어진 대로, 바이러스는 (1) 껍질 단백질이 숙주 세포 표면에 있는 수용체와 열쇠-자물쇠 방식으로 결합하여 숙주 세포 안으로 이동하고, (2) 자신의 핵산과 껍질 단백질을 대량으로 합성하고, 만들어진 핵산과 단백질 껍질이 결합하여 새로운 바이러스가 만들어진 후, (3) 새로 만들어진 바이러스가 숙주 세포를 터뜨리고 나와 근처의 다른 세포를 감염시켜 증식한다. 문제에 주어진 표를 분석하여 약물 A, B, C가 각각 단계 (1), (3), (2)를 억제시키는 특성을 가짐을 해석해 내는 것이 문제를 해결하는 핵심 포인트이다. 또한, 제시문 (라)를 이용하여, 바이러스의 껍질 단백질에 대한 변이가 매우 빨리 일어난다는 것을 파악하고, 이를 적용하여 내년에 사용될 약물을 예측하는 논리적 사고력을 함께 측정하고자 하였다.

문제 4 | 물리 운동하는 두 물체의 상대 속도, 운동량 및 역학적 에너지와 운동량 보존 법칙은 자연계에서 일어나는 역학적 운동 현상을 이해하고 설명하는 데 필요한 기본 개념으로서 고교 물리 교과과정에서 중요하게 다루어지고 있다. 본 문항 평가에서는 상대 속도와 운동량의 개념을 적용하고 에너지/운동량 보존 법칙을 적용하여 물체의 운동을 예측하는 능력을 측정하는 문제를 출제하였다.

[문제 4–1]에서는 상대적으로 작은 질량을 가진 로켓이 질량이 큰 행성에 접근, 행성의 만유인력에 의해 방향을 전환하여 나가는 경우 속력이 증가할 수 있음을 알아보는 문제이다. 질량이 큰 행성의 속력 변화가 없다고 가정하였기 때문에 이 문제에서는 운동량 보존 법칙을 사용할 수 없고 에너지 보존 법칙만 사용할 수 있다. 먼 곳에 있는 물체의 만유인력을 무시할 수 있음을 알면, 행성과 함께 움직이는 관찰자에게 로켓의 초기 속력과 최종 속력이 같음을 에너지 보존 법칙의 간단한 수식을 사용하여 쉽게 파악할 수 있다. 상대 속도에 대한 개념을 적용할 줄 알고, 움직이는 관찰자의 입장에서 바라보는 로켓의 역학적 에너지를 정확히 표현할 수 있으면, 어렵지 않게 풀 수 있는 중 정도 난이도의 문제이다.

[문제 4–2] [문제 4–1]에서 적용한 "질량이 큰 행성의 속력 변화를 무시할 수 있다."는 가정이 적정함을 알아보는 문제이다(제시된 행성의 물리량은 목성의 해당 물리량이다). 두 물체가 모두 움직이기 때문에 운동량 식을 이용하여 운동을 표현하고 두 물체에 외력이 작용하지 않을 때 운동량이 보존된다는 것을 적용하면 문제를 간단히 풀 수 있다. 주어진 로켓의 최종 속력을 대입, 운동량 보존 법칙을 이용하여 행성의 최종 속력을 원하는 물리적 성질을 잘 표현할 수 있도록 정리한다. 이후, 문제에서 주어진 실제 물리량을 대입하여 그 변화 값이 매우 작음을 보인다. 학생들이 공부한 물리 법칙과 수식이 실제 적용이 가능하고 물리 현상을 잘 설명할 수 있음을 알아보는 문제이다. 운동량 보존 법칙을 정확히 이해하고 있으며, 매우 큰 숫자와 작은 숫자를 비교하는 기본적 수학 개념을 알고 있는지 알아보는 중 정도 난이도의 문제이다.

문제 4 | 화학

고등학교 화학 I 교과과정은 주로 화학의 기본적인 언어를 습득하는 것에 주목적을 두고 있다. 본 논술 고사에서는 고등학교 화학 I 에서 다루고 있는 화학 반응, 원소, 반응식, 양적 관계, 탄화수소의 구조식, 실험식, 분자식, 산화 환원 과정 등 중요한 개념들에 관한 이해도를 평가한다.

[문제 4–1]은 제시문과 실험 과정에서 제공하는 정보들을 정확하게 숙지하여 강염기로 중화 농도와 몰을 구하고 약산의 분자량을 논리적으로 찾아내며, 당량점에서의 용액의 산성도를 판단하게 하여 가장 적합한 지시약을 찾아내도록 하는 능력을 평가한다.

[문제 4–2]는 제시문 및 실험에서 제공하는 정보들을 정확하게 숙지하여 금속과 산 사이의 화학 반응을 논리적으로 판단한 후 적합한 화학 반응식을 제시할 수 있어야 한다. 화학 반응식을 통해 반응 물질과 생성 물질 사이의 양적 관계를 파악하여, 산과 금속의 반응 시 생성되는 수소 기체의 부피와 용액 속에 존재하는 이온들의 개수와 종류를 알아낼 수 있어야 한다. 산화수가 다른 두 금속이 산과 반응했을 때 생성된 수소 기체의 부피비와 용액 속에 존재하는 음이온과 양이온의 개수 차이의 비를 이용하고 화학 반응식을 통해 두 금속의 산화수를 파악하여야 한다. 실험에 주어진 화학 반응식을 논리적으로 제시하며, 화학 반응이 일어날 때 물질들 사이의 양적 관계를 다양하게 응용하는 능력을 평가한다.

2. 제시문 출전

· **[문제 1 : 수학]** 제시문: 적분과 통계 Ⅲ-2 조건부 확률 ((주)교학사, 김수환 외 13 인, 116-126쪽)
· **[문제 2 : 수학]** 제시문: (주)중앙교육연구소 '적분과 통계' 28쪽 부분적분법
더텍스트 '미적분과 통계기본' 103쪽 적분과 미분의 관계
EBS 수능특강 적분과 통계 36쪽 정적분(2)
(주)교학사 수학 Ⅱ 삼각함수의 반각공식
좋은책 신사고 적분과 통계 익힘책 29쪽
· **[문제 3 : 수학]** 제시문: 천재교육(수학 Ⅱ)에서 도함수의 활용 중 그래프의 개형(201-206쪽)
EBS 수능특강 수학 Ⅱ에서 방정식과 부등식(4-9쪽)
금성출판사 수학 Ⅱ에서 삼각함수 중 덧셈정리(44-46쪽)
· **[문제 4: 생명과학]** 제시문 (가): 생명과학 Ⅰ, 단원 3, 생명활동과 에너지((주)교학사, 박희송 외, 134쪽)
제시문 (나): 생명과학 Ⅰ, 단원 3, 생명활동과 에너지((주)교학사, 박희송 외, 134쪽)
수능특강 생명과학 Ⅰ, 9강 세포의 생명활동(EBS 교재, 93쪽)
제시문 (다): 생명과학 Ⅰ, 단원 3, 항상성과 건강(교학사, 박희송 외, 180쪽)
생명과학 Ⅰ, 단원 3, 항상성과 건강(천재교육, 이준규 외, 162쪽)
제시문 (라): 생명과학 Ⅰ, 단원 3, 항상성과 건강(천재교육, 이준규 외, 164쪽)
· **[문제 4: 물리]** 제시문 (가): 고등학교 물리 Ⅰ, 단원 1 시공간과 우주(교학사, 34쪽)
제시문 (나): 고등학교 물리 Ⅰ, 단원 1 시공간과 우주(교학사, 56쪽)
제시문 (다): 고등학교 물리 Ⅰ, 단원 1 시공간과 우주(교학사, 47쪽, 49쪽)
· **[문제 4: 화학]** 제시문 (가): 화학 Ⅰ, 단원 Ⅳ, 닮은꼴 화학 반응(교학사, 231-242쪽);
EBS 화학 Ⅰ, 단원 4, 닮은꼴 화학 반응(EBS 탐스런 화학, 252-256쪽)
제시문 (나): 화학 Ⅰ, 단원 1, 화학의 언어(비상교육, 42-45쪽);
화학 Ⅰ, 단원 1, 화학의 언어(EBS 탐스런 화학, 49-53쪽); 화학
제시문 (다): 화학 Ⅰ, 단원 4, 닮은꼴 화학반응(EBS 탐스런 화학, 220쪽);
4, 닮은꼴 화학반응(천재교육, 229쪽)

3. 예시 답안 / 채점 기준

문제 1 예시 답안

가) 방법 1

(1) 6번 시행 후, −1과 1 사이에서만 머물러 있기 위해서는 우선 왼쪽으로 간 횟수(x)와 오른쪽으로 간 횟수(y)가 같아야 한다. 즉, $x = y = 3$. 다른 경우는 −1과 1 사이에만 머물러 있을 수 없다. 이것의 확률은,

$$ {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16} $$

(2) $x = y = 3$ 라고 하더라도, −1과 1 사이에서만 머물기 위해서는, 짝수 번째 시행에서 항상 원점으로 돌아와야 한다. 이것의 경우의 수는 세 쌍의 (1, −1)을 나열하는 방법의 수와 같다. 따라서, $x = y = 3$일 때 −1과 1사이에 머물기 위한 확률은, (1, 1, 1, −1, −1, −1)을 배열하는 경우의 수에서 세 쌍의 (1, −1)을 나열하는 경우의 수의 비율이다.

$$ \frac{2\text{x}2\text{x}2}{6!/(3!3!)} = \frac{2}{5} $$

(3) 이상에서, 두 개의 사건 A와 B를 다음과 같이 정의하면, 관심 있는 사건은 A∩B 이다.

- A : 6번 시행 후, $x = y = 3$ 인 사건
- B : −1과 1 사이에만 머무는 사건
- 따라서, $P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{16}\text{x}\frac{2}{5} = \frac{1}{8}$

나) 방법 2

(1) −1과 1 사이에 머물러 있기 위해서는 동전을 두 번 던져서 0으로 다시 돌아와야 한다.

이것의 확률은 $\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2}\text{x}\,2 = \frac{1}{2}$ 이다.

(2) (1)번과 같은 상황이 두 번 연속 일어나야 하므로, 구하고자 하는 확률은, $\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$이 된다.

문제 1 채점 기준

가) 방법 1

(1) −1과 1 사이에서만 머물러 있기 위해서 어떠한 상황이 전개되어야 하는지 이해하고 있으면 : **+5점**

(2) 3번 왼쪽 이동과 3번 오른쪽 이동하여야 하는 상황을 이해하고

${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ 와 같은 확률 계산을 하면 : **+5점**

(3) $x = y = 3$라고 하더라도, −1과 1 사이에서만 머물기 위해서는, 짝수 번째 시행에서 항상 원점으로 돌아와야 한다는 상황을 이해하고 $\left(\frac{2\text{x}2\text{x}2}{6!/(3!3!)}\right) = \frac{2}{5}$ 와 같은 확률 계산을 하면 : **+5점**

(4) (2)와 (3)의 확률을 이용하여 최종적으로 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A) = \frac{5}{16}\text{x}\frac{2}{5} = \frac{1}{8}$과 같은 답을 유도하면 : **+5점**

※ 각 단계에서 답이 틀려도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능

나) 방법 2

(1) −1과 1사이에서만 머물기 위해서는, 짝수 번째 시행에서 항상 원점으로 돌아와야 한다는 상황을 이해하고 첫 번째 원점으로 돌아올 확률이 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}$ 임을 계산하면 : **+10점**

(2) (1)번과 같은 상황이 반복적으로 3번 일어나야 함을 이해하면 : **+5점**

(3) (1)번과 (2)번의 상황을 이용하여 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ 과 같은 답을 유도하면 : **+5점**

※ 각 단계에서 답이 틀려도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능

문제 2 – 1 예시 답안

주어진 적분식에 치환적분 ($x = \pi - t$)을 이용하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(\pi - t)dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + (f(\pi - x))dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(e^{\frac{\pi}{2} - x} + e^{x - \frac{\pi}{2}}) \sin x dx$$ ………(*) 를 얻는다.

$\frac{\pi}{2} - x = t$ 라 두면 적분식 (*)는 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t}) \cos t \, dt$ 가 된다.

제시문 (가)의 부분적분 공식의 보기와 유사한 방법을 적용해서

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t}) \cos t \, dt = [(e^t - e^{-t}) \cos t]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t - e^{-t}) \sin t \, dt$$

$$= [(e^t - e^{-t}) \cos t + (e^t + e^{-t}) \sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t}) \cos t \, dt = [(e^t - e^{-t}) \cos t + (e^t + e^{-t}) \sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

그러므로, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t}) \cos t \, dt = \frac{1}{2} [(e^t - e^{-t}) \cos t + (e^t + e^{-t}) \sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$

문제 2 – 1 채점 기준

1. 치환 적분과 주어진 식 $f(x) + f(\pi - x) = (e^{\frac{\pi}{2} - x} + e^{x - \frac{\pi}{2}}) \sin x$을 이용하여 (*)을 얻으면 : **+4점**
2. 부분 적분 공식을 사용하여 최종적으로 $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$ 답을 얻으면 : **+6점**
3. 계산 방법은 알고 있으나 계산 실수를 통해 오답을 도출한 경우 3점 감점

▶ 적분 계산 과정을 상세히 체크함으로써 논리적인 오류가 없는지 체크하는 것이 필요함

문제 2 – 2 예시 답안

주어진 적분식에 제시문 (다) 미적분학의 기본 정리를 적용하면, $\{f(x)\}^2 - \{f(-x)\}^2 = 0$을 얻으므로 주어진 함수 $\{f(x)\}^2$은 y 축에 대하여 대칭인 함수이다. 따라서, $(16x^2 + 8px + p^2)\sin^2 2x$가 짝함수이기 위해서는, $p = 0$이어야 한다(적분 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt + \int_0^{-x} \{f(t)\}^2 dt = 0$으로 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt$ 가 홀함수임을 이용할 수도 있다. 이를 통해 $p = 0$을 얻을 수 도 있다).

$f(x) = 4x \sin 2x$이므로 반각의 공식 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$ 을 이용하고, 두 번의 부분적분을 통하여,

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 16x^2 \sin^2 2x = 2\int_0^{\frac{\pi}{8}} 16x^2 \sin^2 2x dx = 16\int_0^{\frac{\pi}{8}} (x^2 - x^2 \cos 4x) dx = 16\left\{\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} x \sin 4x \, dx\right\}$$

$$= 16\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + 8\left[-\frac{x}{4}\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = 16 \cdot \frac{\pi^3}{3 \cdot 8^3} - 16 \cdot \frac{\pi^2}{4 \cdot 8^2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi^3}{96} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}$$ 을 얻는다.

문제 2 – 2 채점 기준

1. $\{f(x)\}^2$이 y 축에 대하여 대칭인 함수이며 $p=0$이라는 결론을 논리적으로 유추한 경우 : **+3점**
   (적분식을 이용하여 $f(x)=4x\sin 2x$를 논리적으로 유추해도 똑같은 **+3점**)
2. 부분적분을 반각의 공식 등을 사용하여 $\frac{\pi^3}{96}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}$ 를 정확히 계산하면 : **+7점**

($16\cdot\frac{\pi^3}{3\cdot 8^3}-16\cdot\frac{\pi^2}{4\cdot 8^2}+\frac{1}{2}$, $\frac{\pi^3}{3\cdot 2^5}-\frac{\pi^2}{2^4}+\frac{1}{2}$ 등 답의 표현은 약간씩 다르게 보여도 상관없음)

부분적분을 사용하는 계산 방법은 알고 있으나 계산 실수를 통해 오답을 도출한 경우, 3점 감점

▶ 적분 계산 과정을 상세히 체크함으로써 논리적인 오류가 없는지 체크하는 것이 필요함

문제 3 – 1 예시 답안

$y=f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha$의 그래프를 그려 보자. $f'(x)=3x^2-6\alpha x-3=0$의 근은
$\alpha\pm\sqrt{1+\alpha^2}$ 이다. $x^2=2\alpha x+1$을 이용하거나 직접 계산하면,
$f(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})=-2(1+\alpha^2)(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})>0$, $f(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})=-2(1+\alpha^2)(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})<0$ 이다.
따라서 서로 다른 세 실근을 가진다.

문제 3 – 1 채점 기준

$f'(x)$가 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이면 : **4점**
$f(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})=-2(1+\alpha^2)(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})>0$ 보이면 : **3점**
$f(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})=-2(1+\alpha^2)(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})<0$ 보이면 : **3점**

문제 3 – 2 예시 답안

[풀이 1] $y=f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha$의 그래프에서 $\alpha>1$에 대하여 $f(-1)=-2\alpha+2<0$, $f(0)=\alpha>0$ 그리고

$f(1)=-2\alpha-2<0$ 이므로 그래프를 그려 보면 $-1<x_1<0<x_2<1$ 임을 알 수 있다.

제시문에서 $\tan 3\Theta=\alpha$ 그리고 $\tan\Theta=x$로 놓으면 다항식 $x^3-3ax^2-3x+a=0$이 된다.

$a\to\infty$은 $3\Theta\to\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$, 다시 말해 $\Theta\to\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ 을 의미한다.

따라서 $\tan\Theta\to\frac{1}{\sqrt3},\infty,\frac{-1}{\sqrt3}$ 을 의미한다. 따라서 정답은 $\lim_{\alpha\to\infty}x_1=\frac{-1}{\sqrt3}$ 이고 $\lim_{\alpha\to\infty}x_2=\frac{1}{\sqrt3}$ 이다.

[별해 1] $y=f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha$의 그래프에서 $\alpha>1$에 대하여 $f(-1)=-2\alpha+2<0$, $f(0)=\alpha>0$ 그리고

$f(1)=-2\alpha-2<0$ 이므로 그래프를 그려 보면 $-1<x_1<0<x_2<1$ 임을 알 수 있다. 한편 $\alpha=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$ 이므로

α가 무한대로 감에 따라 분자가 무한대로 가거나 분모가 0으로 가야 하는데 $-1<x_1<0<x_2<1$ 이므로

α가 무한대로 감에 따라 분모 0가 되어야 하고 따라서 정답은 $\lim_{\alpha\to\infty}x_1=\frac{-1}{\sqrt3}$ 이고 $\lim_{\alpha\to\infty}x_2=\frac{1}{\sqrt3}$ 이다.

[별해 2] $y=f(x)=x^3-3\alpha x^2-3x+\alpha$의 그래프에서 $\alpha>1$에 대하여 $f(-1)=-2\alpha+2<0$, $f(0)=\alpha>0$ 그리고

$f(1)=-2\alpha-2<0$이므로 그래프를 그려 보면 $-1<x_1<0<x_2<1$ 임을 알 수 있다. 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2+x_3=3\alpha$ 이므로 $\lim_{\alpha\to\infty}\frac{x_3}{\alpha}=3$이다. $x_1x_2+(x_2+x_1)x_3=-3$이고 x_3이 무한대로 커지므로 -3과 등식을

유지하기 위하여 x_2+x_1 이 0으로 수렴하여야 한다. $x_2\to b$ 라 하면 $-\alpha=x_1x_2x_3\to -b^2 3\alpha$ 이므로

$\lim_{\alpha\to\infty}x_1=\frac{-1}{\sqrt3}$ 이고 $\lim_{\alpha\to\infty}x_2=\frac{1}{\sqrt3}$ 이다.

문제 3 – 2 채점 기준

$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ 보이면, **8점**(문제 3–1의 결과는 인정하면서 근의 범위를 구하는 문제이므로 다른 방법으로 보여도 $-1 < x_1 < 0$: 4점, $0 < x_2 < 1$: **4점**)

$\lim_{\alpha \to \infty} x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ 나오면 : **6점**(논리적으로 설명하지 못하고 답만 맞으면 3점)

$\lim_{\alpha \to \infty} x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 보이면 : **6점**(논리적으로 설명하지 못하고 답만 맞으면 3점)

문제 4 – 1 | 생명과학 예시 답안

약물 P를 처리한 세포는 O_2 소비량이 없고, 포도당의 불완전 분해에 의한 중간산물은 생성되었다. 이는 제시문 (나)에 근거하여 약물 A가 유산소 호흡을 하는 세포를 무산소 호흡을 하도록 전환시켰다는 뜻이다. 세포 호흡에서 산소와 함께 작용하여 포도당을 완전 분해하는 세포 내 소기관은 미토콘드리아이므로 약물 A는 미토콘드리아의 기능을 억제시키는 역할을 하여 유산소 호흡을 불가능하게 한다.

약물 Q를 처리한 세포에서 중간산물은 생성되지 않았고 포도당 1분자당 ATP 생성량은 대조군과 동일하므로 정상적인 유산소 호흡을 한다고 생각할 수 있다. 그러나 시간당 O_2 소비량과 CO_2 방출량이 감소하였으므로 이는 약물 B가 미토콘드리아에서 유산소 호흡을 하는 전체적인 반응을 느리게 하는 역할을 한다.

문제 4 – 1 | 생명과학 채점 기준

1. 약물 P가 미토콘드리아에서 작용한다는 설명이 있으면 : **+2점**
2. 약물 P가 미토콘드리아의 기능억제 또는 미토콘드리아에서 산소 전달 저해 등의 언급이 있으면 : **+3점**
3. 약물 Q가 미토콘드리아에서 작용한다는 설명이 있으면 : **+2점**
4. 약물 Q가 유산소 호흡 반응을 느리게 한다는 설명이 있으면 : **+3점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능

문제 4 – 2 | 생명과학 예시 답안

약물 A를 처리한 경우, 대조군에 비해 1일 후 배양액 속의 바이러스 수가 많고, 세포 내 바이러스 수가 적은 것으로 보아, 약물 A는 바이러스가 숙주 세포로 들어가는 것을 억제하는 약물이다.

약물 B를 처리한 경우, 대조군에 비해 5일, 10일에 세포 내 바이러스 수가 많고, 배양액 속 바이러스 수가 적은 것으로 보아, 약물 B는 바이러스가 숙주 세포를 터뜨리고 나가는 것을 억제하는 약물이다.

약물 C를 처리한 경우, 대조군에 비해 시간이 지나도 세포 내 바이러스 수가 늘어나지 않는 것으로 보아, 약물 C는 숙주 세포 내에서 바이러스가 새로 만들어지는 것을 억제하는 약물이다.

약물 B는 시간이 지나면 결국 숙주 세포가 죽으므로 약물로 적합하지 않다. 제시문 (라)와 문제의 단서에 의하면 이 바이러스는 껍질 단백질을 만드는 유전자의 변이 속도가 빠르므로 내년에는 이 바이러스가 올해와는 다른 껍질 단백질을 가지게 되어, 약물 A는 바이러스가 숙주 세포 안으로 들어가는 과정을 억제하지 못할 가능성이 높다. 따라서, 세포 내에서 바이러스의 증식을 억제하는 것으로 보이는 약물 C가 가장 적절한 약물이다.

문제 4 – 2 | 생명과학 **채점 기준**

1. 약물 A가 바이러스가 숙주 세포로 들어가는 것을 막는다는 것을 실험 결과 해석과 함께 논리적으로 설명하면 : **+5점**
2. 약물 B가 바이러스가 숙주 세포를 터뜨리고 나오는 것을 막는다는 것을 실험 결과 해석과 함께 논리적으로 설명하면 : **+5점**
3. 약물 C가 숙주 세포 안에서 새로운 바이러스가 만들어지는 것을 막는다는 것을 실험 결과 해석과 함께 논리적으로 설명하면 : **+5점**
4. 각 약물에 대하여 논리적인 설명 없이 단답형으로 답만 맞혔을 경우는 : **2~2.5점**
5. 껍질 단백질을 만드는 유전자의 변이 때문에 다음 해에는 약물 A를 항바이러스제로 사용하기 어렵고, 약물 B는 결국 세포를 죽게 하기 때문에 항바이러스제로 사용하기 어려워 약물 C가 가장 적절한 항바이러스제임을 논리적으로 설명하면 : **+5점**
6. A를 제외하는 논리(유전자 변이)만 맞으면 **3점**, B를 제외하는 이유(결국 세포가 죽음)만 맞으면 **2점**, 단답형으로 C가 적절한 항바이러스제라고 하면 : **2점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능

문제 4 – 1 | 물리 **예시 답안**

- 상대 속도를 고려, <u>움직이는 관찰자</u>가 측정한 로켓의 초기 속력은 $u = v + V$이다.
- 행성과 함께 <u>움직이는 관찰자</u>에게, 충돌 전 역학적 에너지는 $E_i = \frac{1}{2}mu_i^2 - G\frac{mM}{r}$,

  충돌 후 역학적 에너지는 $E_i = \frac{1}{2}mu_f^2 - G\frac{mM}{r}$ 이다. 먼 곳에서 $G\frac{mM}{r} \approx 0$ 이므로

  역학적 에너지 보존 법칙에 의해 $\frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{1}{2}mu_f^2$이고, 따라서, $u_i = u_f = u$ 임을 알 수 있다.
- 따라서, 행성과 함께 <u>움직이는 관찰자</u>가 측정한 로켓의 최종 속력은 u=v+V이다.
- 상대 속도를 고려할 때, <u>정지해 있는 관찰자</u>가 측정한 로켓의 최종 속력은 $v' = u + V = v + 2V$ 이다.

문제 4 – 1 | 물리 **채점 기준**

1. <u>움직이는 관찰자</u>가 측정한 로켓의 초기 속력(상대 속력, $u = v + V$)을 구하면 : **+1점**
2. <u>움직이는 관찰자 입장에서 역학적 에너지 보존 법칙</u>을 올바르게 적어 충돌 전후의 속력이 같음을 보이면 : **+3점**
   (설명이 없거나, 역학적 에너지 보존 법칙이 아닌 **운동량 보존 법칙(가정에 의해 적용할 수 없다)을 이용하면 0점**)
3. <u>움직이는 관찰자</u>가 측정한 로켓의 최종 속력(상대 속력, $u = v + V$)을 구하면 : **+3점**
4. 상대 속도를 고려하여 정지해 있는 관찰자가 본 로켓의 최종 속력이 $v' = u + V = v + 2V$가 됨을 논리적으로 옳게 설명하면 : **+3점**

※ <u>움직이는 관찰자</u>의 관점에서 역학적 에너지 보존 법칙을 이용한 것이 명확하고 움직이는 관찰자가 측정한 로켓의 최종 속력을 정확히 쓰면 초기 상대 속력을 구하지 않아도 **10점을 부여**(다시 말해, 2~4가 맞으면, 1번 배점 +1은 자동 부여)

※ $v' = u + V = v + 2V$ 결과로부터 움직이는 관찰자가 측정한 로켓의 최종 속력 $u = v + V$ 를 역으로 구하고 움직이는 관찰자의 입장에서의 역학적 에너지 보존 법칙을 적용하지 않았다면, 상대 속도의 개념에 해당하는(채점 기준 3) **3점만 부여**

※ 채점자는 답안에 따라 – 0.5 ~ + 0.5점을 부여할 수 있다.

문제 4 – 2 | 물리 **예시 답안**

- 문제의 조건에 의해, 정지해 있는 관찰자가 측정한 로켓의 최종 속력 $v' = v + 2V$를 이용한다.
- 행성의 속력 변화를 고려하면, 정지해 있는 관찰자에게 충돌 전과 충돌 후의 운동량 총합이 보존되므로 $-mv + MV = mv' + MV'$인 관계가 만족된다. 따라서, $-mv + MV = m(v + 2V) + MV'$

$$V' = V\left(1 - \frac{2m}{M}\left(1 + \frac{v}{V}\right)\right)$$
$$V' = V\left(1 - \frac{2\times10^{3}\ \mathrm{kg}}{2\times10^{27}\ \mathrm{kg}}(1.5)\right)$$
$$V' = V(1 - 1.5\times10^{-24})$$
$$V' = 10(1 - 1.5\times10^{-24})\mathrm{km/s}$$

괄호 안의 2번째 항의 값은 1보다 매우 작아, 행성의 속력 변화를 무시할 수 있다.

문제 4 – 2 | 물리 **채점 기준**

1. 정지해 있는 관찰자의 관점에서 운동량 보존 법칙을 정확히 쓰면 : **+10점**
2. 행성의 최종 속력을 구체적으로 옳게 표현하면 : **+5점**
3. 속력 변화가 매우 작아 가정이 타당하다고 논리적으로 설명하면 : **+5점**

※ 문제의 조건($v' = v+2V$)을 이용하지 않고, 정지해 있는 관찰자의 입장에서 에너지 보존 법칙과 운동량 보존 법칙을 정확히 구하고 연립하여 문제를 풀어 $V' = V\left(1 - \frac{2m}{M+m}\left(1 + \frac{v}{V}\right)\right)$인 결과를 얻고, 속력 변화가 매우 작음을 보이면 **총 17점**만 부여(조건을 이용하지 않았기에 –3점 감점)

※ 채점자는 답안에 따라 – 0.5 ~ +0.5점을 부여할 수 있다.

문제 4 – 1 | 화학 **예시 답안**

- 이 적정 실험은 약산을 강염기로 중화 반응하는 실험이다.
- (Ⅲ)에서 (Ⅰ)의 수용액 10mL를 중화 적정하는 데 0.1M NaOH 수용액 20mL가 필요하므로 (Ⅰ)의 HA 수용액 농도는 0.1M × 20mL = xM × 10mL , x = 0.2M이다.
- HA 1.2g을 녹여 0.1L(100mL)가 되었으므로, 수용액 1L에는 12.0g(0.2mol)의 HA가 녹아 있다.
- 따라서 HA의 몰질량은 60g/mol이다.
- 약산을 강염기로 적정하는 중화 반응에서 생성되는 염은 염기성을 나타낸다.

$$\mathrm{HA}(aq) + \mathrm{OH^-}(aq) \rightarrow \mathrm{A^-}(aq) + \mathrm{H_2}Ol$$

당량점에서 $\mathrm{A^-}(aq) + \mathrm{H_2}Ol \rightleftharpoons \mathrm{OH^-}(aq) + \mathrm{HA}(aq)$ (pH>7)

- 지시약의 변색 범위는 pH가 7 이상인 것이 좋고, 따라서 Ⅱ에서 지시약으로 가장 적절한 것은 페놀프탈레인이다.

문제 4 – 1 | 화학 **채점 기준**

(1) 약산을 강염기로 중화 적정하는 실험이라는 표현이 있으면 : **+2점**
(2) HA 수용액의 농도 0.2M과 수용액 1L에 녹아 있는 HA의 몰수(0.2mol)를 맞게 계산하면 : **+3점**
(3) HA의 몰질량을 맞게 계산하면 : **+2점**
(4) 약산을 강염기로 적정할 때 당량점에서 생성되는 염이 염기성을 나타내므로 지시약의 변색 범위가 염기성(pH >7)이 좋으므로 가장 적절한 지시약은 페놀프탈레인임을 제시하면 : **+3점**
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능

문제 4 – 2 | 화학 **예시 답안 [1]**

- 산화수가 x인 금속과 묽은 염산 용액의 화학 반응식을 쓰면 다음과 같다.

$$M(s) + xHCl(aq) \rightarrow M^{x+}(aq) + \frac{x}{2}H_2(g) + xCl^-$$

- 금속과의 반응 전, 묽은 염산 용액 속에 염산이 y몰 존재한다고 하고, 반응이 진행되면서 염산 a몰이 소모되었다고 하면 다음과 같이 화학 반응식을 쓸 수 있다.

$$M(s) + xHCl(aq) \rightarrow M^{x+}(aq) + \frac{x}{2}H_2(g) + xCl^-$$

	$xHCl(aq)$	$M^{x+}(aq)$	$\frac{x}{2}H_2(g)$	xCl^-
반응 전	y			
반응 후	y - a	$\frac{a}{x}$	$\frac{a}{2}$	y

- 반응 후에 용액 속에 존재하는 이온의 종류와 양은 다음과 같다. 과량으로 존재하는 수소 이온(H^+)이 y – a, 생성된 금속 양이온(M^+)이 $\frac{a}{x}$ 그리고 반응에 참여하지 않은 염화 음이온(Cl^-)이 y만큼 존재한다.
- 전체 음이온 개수와 전체 양이온 개수의 차이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$y - (y - a + \frac{a}{x}) = a(1 - \frac{1}{x})$

- 산화수가 1일 경우는

$a(1 - \frac{1}{1}) = 0$

- 산화수가 2일 경우는

$a(1 - \frac{1}{2}) = \frac{a}{2}$

- 산화수가 3일 경우는

$a(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2a}{3}$

- 표에서 주어진 정보를 보면 생성된 수소 기체의 부피가 같을 때, 금속 A와 금속 B의 반응에서 생성되는 전체 음이온 개수와 양이온 개수 차이의 비가 3:4라는 것을 알 수 있다. 이 조건을 만족하는 경우를 생각해보면 $\frac{a}{2} : \frac{2a}{3} = 3 : 4$이므로 금속 A의 산화수는 +2, 금속 B의 산화수는 +3이다.

- 금속 A와 묽은 염산의 반응에 대한 화학식을 적으면 다음과 같다.

$$A(s) + 2HCl(aq) \rightarrow A^{2+}(aq) + H_2(g) + 2Cl^-$$

	$A(s)$	$2HCl(aq)$	$A^{2+}(aq)$	$H_2(g)$	$2Cl^-$
반응 전	0.01	0.06			
반응 후		0.04	0.01	0.01	0.06

- 금속 B와 묽은 염산의 화학 반응식은

$$B(s) + 3HCl(aq) \rightarrow B^{3+}(aq) + \frac{3}{2}H_2(g) + 3Cl^-$$

	$B(s)$	$3HCl(aq)$	$B^{3+}(aq)$	$\frac{3}{2}H_2(g)$	$3Cl^-$
반응 전	0.03	0.06			
반응 후	0.01		0.02	0.03	0.06

- 생성된 수소 기체의 부피비는 위에서 계산된 몰수비와 같다.

0.01 : 0.03 = 1 : 3

문제 4 – 2 | 화학 **예시 답안 [2] 금속의 산화수를 구하는 방법이 다름**

- 산화수가 x인 금속과 묽은 염산 용액의 화학 반응식을 쓰면 다음과 같다.

$$M(s) + xHCl(aq) \rightarrow M^{x+}(aq) + \frac{x}{2}H_2(g) + xCl^-$$

- 산화수가 +1 에서 +3까지 가능하므로 각각의 산화수에 대해서 화학 반응식을 쓰면 다음과 같다.

$$M(s) + HCl(aq) \rightarrow M^{1+}(aq) + \frac{1}{2}H_2(g) + Cl^-$$
$$M(s) + 2HCl(aq) \rightarrow M^{2+}(aq) + H_2(g) + 2Cl^-$$
$$M(s) + 3HCl(aq) \rightarrow M^{3+}(aq) + \frac{3}{2}H_2(g) + 3Cl^-$$

- 생성된 수소 기체의 부피가 같을 때 음이온과 양이온의 개수 차이의 비가 3:4이므로,

$$4M(s) + 4HCl(aq) \rightarrow 4M^{1+}(aq) + 2H_2(g) + 4Cl^-$$
$$2M(s) + 4HCl(aq) \rightarrow 2M^{2+}(aq) + 2H_2(g) + 4Cl^-$$
$$\frac{4}{3}M(s) + 4HCl(aq) \rightarrow \frac{4}{3}M^{3+}(aq) + 2H_2(g) + 4Cl^-$$

- 산화수가 +1인 경우: 반응 전 과량의 염산 몰수를 y라 하면 반응 후 반응에 참여하지 않은 수소 이온(H^+)의 양은 y–4, 금속 양이온(M^+)은 4, 염화 음이온(Cl^-)은 y이므로 양이온과 음이온의 개수 차이는 y–(y–4+4) = 0이다. 즉, 산화수가 +1이면 항상 양이온의 개수와 음이온의 개수가 같다.

- 산화수가 +2인 경우: 반응 전 과량의 염산 몰수를 y라 하면 반응 후 반응에 참여하지 않은 수소 이온(H^+)의 양은 y–4, 금속 양이온(M^+)은 2, 염화 음이온(Cl^-)은 y 이므로 양이온과 음이온의 개수 차이는 y–(y–4+2) = 2이다. 즉, 산화수가 +2이면 항상 양이온의 개수와 음이온의 개수의 차이는 2몰이다.

- 산화수가 +3인 경우: 반응 전 과량의 염산 몰수를 y라 하면 반응 후 반응에 참여하지 않은 수소 이온(H^+)의 양은 y–4, 금속 양이온(M^+)은 4/3, 염화 음이온(Cl^-)은 y 이므로 양이온과 음이온의 개수 차이는 y–(y–4+4/3) = 8/3이다. 즉, 산화수가 +3이면 항상 양이온의 개수와 음이온의 개수의 차이는 8/3몰이다.

- 금속 A와 금속 B의 개수비가 2:8/3 = 3:4이므로 금속 A의 산화수는 +2, 금속 B의 산화수는 +3이다.

문제 4 – 1 | 화학 **채점 기준 [답안 1의 경우]**

1. 임의의 산화수에 대한 화학 반응식을 올바르게 제시하면 : **+2점**
2. 일반화된 식으로 음이온과 양이온의 개수 차이를 표현하면 : **+3점**
3. 산화수를 대입하여 각각의 개수 차이를 구하면 : **+3점**
4. 양이온과 음이온의 개수 차이의 비를 이용하여 산화수를 올바르게 구하면 **+4점**
5. 금속 A의 반응에서 생성된 수소 기체의 양을 구하면 : **+3점**
6. 금속 B의 반응에서 생성된 수소 기체의 양을 구하면 : **+3점**
7. 금속 A와 금속 B에서 생성된 수소 기체의 부피비를 정확히 구하면 : **+2점**

문제 4 – 1 | 화학 **채점 기준 [답안 2의 경우]**

1. 각 산화수에 대한 화학 반응식을 옳게 제시하면 : **+4점**(4개 모두 제시하여야 함. 각 화학식당 +1점)
2. 부피가 같다는 조건을 이용하여 음이온과 양이온의 개수 차이를 정확히 표현하면 : **+4점**
   (각각의 경우당 +1점씩, 과량의 염산에 대한 고려가 반드시 포함되어야 한다.)
3. 양이온과 음이온의 개수 차이의 비를 이용하여 산화수를 올바르게 구하면 : **+4점**
4. 금속 A의 반응에서 생성된 수소 기체의 양을 구하면 : **+3점**
5. 금속 B의 반응에서 생성된 수소 기체의 양을 구하면 : **+3점**
6. 금속 A와 금속 B에서 생성된 수소 기체의 부피비를 정확히 구하면 : **+2점**