

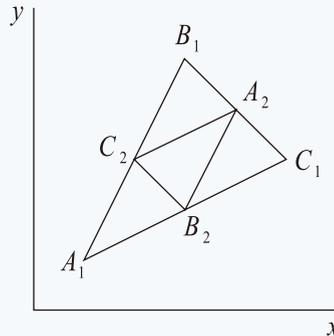
[수학]



[문제 1] S보험회사는 보장 기간이 10년인 암보험 상품을 A와 B 두 사람에게 각각 판매하였다. 이 상품은 가입시 보험료 100만원을 한 번만 내면, 보장 기간 내에 암 진단을 받을 경우 가입자에게 보험금 2,000만원을 지급한다. 두 사람 중 A만 보장 기간 10년 이내에 암 진단을 받을 확률은 0.015이고, B만 암 진단을 받을 확률은 0.01이다. 그리고 A와 B 두 사람 모두 10년 이내에 암 진단을 받지 않을 확률은 $p(0 < p < 1)$ 이다. B가 10년 이내에 암 진단을 받지 않았다고 할 때, A와 B 두 사람으로부터 기대되는 S보험회사의 이익이 160만원 이상이 되기 위한 p 의 범위를 구하시오. 단, 금융 수익 및 비용은 고려하지 않는다. [20점]

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 좌표평면상의 두 점 x 와 y 의 중점은 두 점을 잇는 선분을 1:1로 내분하는 점을 의미한다.
- 좌표평면상의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표는 $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 이다.
- 좌표평면상에 세 점 $A_1(1, 1)$, $B_1(3, 5)$, $C_1(5, 3)$ 이 있다. 자연수 n 에 대하여 A_{n+1} 은 B_n 과 C_n 의 중점이고, B_{n+1} 은 C_n 과 A_n 의 중점이고, C_{n+1} 은 A_n 과 B_n 의 중점이라 하자. 또한, 각 점들의 좌표를 $A_n(a_{n1}, a_{n2})$, $B_n(b_{n1}, b_{n2})$, $C_n(c_{n1}, c_{n2})$ 로 표기한다.



[문제 2-1] 삼각형 $A_n B_n C_n$ 의 면적을 T_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ 의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. [10점]

[문제 2-2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n1} + b_{n1} + c_{n1}}{a_{n1} + a_{n2}}$ 의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. [10점]

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 다음과 같은 부분 적분 공식이 성립한다.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- $f(1) = f(-1) = 0$ 이고 $f'(1) = f'(-1) = 0$ 을 만족하는 세번 미분 가능한 임의의 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음을 만족하는 3차 함수 $p(x) = ax^3 + bx$ 가 있다.

$$\int_{-1}^1 f^{(3)}(x)p(x)dx = 6 \int_{-1}^1 f(x)dx$$

여기서, $f^{(k)}(x)$ 는 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 k 번 미분한 함수를 의미한다.

[문제 3-1] 함수 $h(x) = x^{10}(1-x)^{10}$ 에 대하여 A, B를 다음과 같이 정의한다.

$$A = \int_0^1 h^{(10)}(x)x^{10}dx, \quad B = \int_0^1 h(x)dx$$

이때 $\frac{A}{B}$ 의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. **[10점]**

[문제 3-2] 제시문의 3차 함수 $p(x) = ax^3 + bx$ 를 구하는 과정을 논리적으로 제시하시오. **[20점]**



[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

가)

동화 작용은 작은 분자들이 결합하여 큰 분자로 합성되는 반응으로, 광합성이 그 대표적인 예이다. 광합성은 작은 분자인 이산화탄소와 물이 결합되어 큰 분자인 포도당으로 합성되는 과정이다. 식물 세포에서 광합성 결과 만들어진 포도당을 여러 개 결합하여 녹말을 만드는 것도 동화 작용에 해당된다. 이화 작용은 동화 작용과 반대로 큰 분자를 작은 분자로 분해하는 반응이다. 포도당을 물과 이산화탄소로 분해하는 세포 호흡은 대표적인 이화 작용이다.

나)

식물세포는 태양으로부터 오는 빛에너지와 이산화탄소를 엽록체에서 흡수하여 포도당 합성을 통한 화학 에너지 형태로 저장한다. 식물은 포도당을 분해하여 생체 에너지인 ATP를 얻으며, 에너지 생산에 쓰이지 않고 남은 포도당은 녹말, 지방, 단백질 등으로 변환되어 저장된다. 식물과 동물은 세포 호흡을 통해 양분을 분해하여 양분 속에 저장되어 있는 에너지를 얻는다. 세포 호흡은 세포 내에 있는 미토콘드리아에서 일어난다. 미토콘드리아에서 포도당은 산소와 반응하여 물과 이산화탄소로 분해되고 그 결과 에너지가 방출된다. 즉, 세포 호흡은 포도당에 저장된 화학 에너지를 방출하는 과정이다.

다)

생명 공학 분야의 핵심 기술인 유전자 재조합은 DNA를 인위적으로 자르고 연결하여 새로운 유전자 조합을 만드는 기술이다. 유전자 재조합을 이용하면 특정 생물의 유용한 유전자를 플라스미드나 바이러스 DNA 등과 같은 DNA운반체에 결합시킬 수 있다. 그리고 이를 대장균과 같은 숙주 세포에 도입시켜 짧은 시간에 유용한 유전자나 유전자 발현 산물을 대량으로 얻을 수 있다. 재조합된 플라스미드를 갖고 있는 대장균은 배지에서 콜로니 형태로 자란다. 제한 효소는 DNA의 특정 서열을 인식하여 그 부위의 DNA 사슬을 자르는 효소이다. 제한 효소는 종류에 따라 인식하는 부위와 자르는 형태가 다양하여 특정한 제한 효소를 이용하면 원하는 DNA 부위만을 선택적으로 자를 수 있다. 전기영동은 DNA 등과 같이 전하를 띤 고분자 물질을, 전기장을 띤 매질에서 질량에 따른 이동 속도 차이를 이용하여 분리하거나 분석하는 방법이다. 전기영동 기술은 제한 효소에 의해 절단된 DNA 절편의 수와 크기를 측정하거나 원하는 DNA 절편을 분리하는 경우 등에 이용되고 있다.

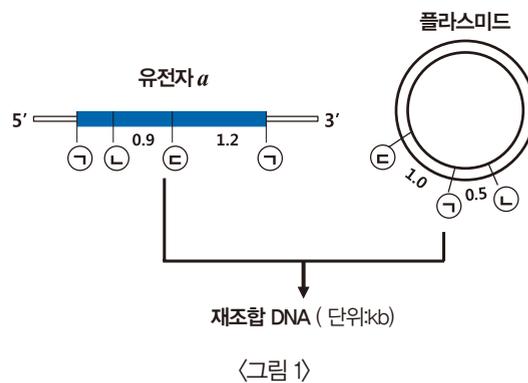
라)

생물의 형질은 핵 속의 DNA가 가진 유전 정보에 의해 단백질이 합성되어 나타난다. 세포 내에서 만들어진 단백질은 인간의 키, 피부와 같은 외형적 형질은 물론 지능과 같은 행동적 형질 등의 형성에 관여한다. 이처럼 DNA가 가진 유전 정보로부터 단백질이 합성되어 생물의 특정 형질이 표현되는 과정을 유전자 발현이라고 한다. 진핵생물은 다양한 종류의 전사 촉진 인자를 갖고 있으며, 이러한 전사 촉진 인자들은 특정 유전자의 조절 서열에 결합하여 조직 특이적 유전자 발현이 가능하도록 도와 준다.

[문제 4-1] 식물의 물질대사 과정에 중요하게 작용하는 유전자 a와 b가 돌연변이된 식물 mt1과 mt2의 특징을 조사하여 아래 표에 정리하였다. 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 각 유전자가 발현하는 식물의 소기관과 기능을 논리적으로 설명하시오. [10점]

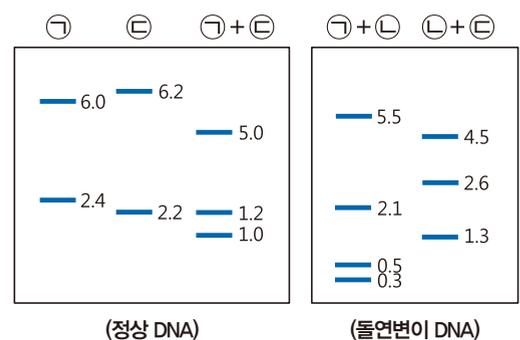
	동화 작용 효율	이화 작용 효율	세포 내 이산화탄소 농도	세포 내 ATP 농도
mt1	낮다	높다	높다	낮다
mt2	높다	낮다	높다	낮다

[문제 4-2] 근육 분화 과정에서 어떤 전사 촉진 인자의 기능을 알아보기 위하여 이 단백질을 코딩하고 있는 유전자 a를 제한 효소를 사용하여 플라스미드와 재조합 DNA로 제작하였다. <그림 1>은 각 DNA에 있는 제한 효소의 작용 부위이다.



<그림 1>

유전자 a가 재조합된 DNA를 대장균에서 배양하던중 염기서열에 돌연변이가 일어났다. <그림 2>는 돌연변이 재조합 DNA에 제한 효소 E, L, E를 처리한 후 전기영동한 결과이다. 이 결과로부터 재조합 DNA에서 돌연변이가 일어난 염기서열의 위치와 이 재조합 DNA로부터 발현하는 단백질의 전사조절기능을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, 유전자a의 길이는 2.4kb이고, 플라스미드의 길이는 6.0kb이다) [20점]



<그림 2> (단위: kb)



[문제 4] 다음 제시문 (가)~(라)를 읽고 문제에 답하십시오.

가)

만일 기체를 구성하고 있는 분자가 무작위로 움직이고 서로 힘이 작용하지 않으며, 분자의 크기가 없어 점과 같다고 하자. 이런 기체는 실제 존재하지 않기 때문에 이상 기체라고 하는데, 분자 수가 N 인 이상 기체의 경우 절대 온도 T , 압력 P , 부피 V 사이에는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$PV = Nk_B T \quad (k_B: \text{볼츠만 상수})$$

나)

모든 기체 분자는 열운동을 하고 있으므로 운동 에너지를 갖는다. 또한 기체 분자 사이의 인력에 의한 퍼텐셜 에너지를 갖는다. 기체 분자의 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 총합을 기체의 내부 에너지라고 한다. 분자 사이의 인력을 무시할 수 있는 이상 기체의 경우 내부 에너지는 기체 분자의 운동 에너지의 총합이라고 할 수 있다. 단원자 분자로 이루어진 이상 기체의 경우 분자 수가 N , 절대 온도가 T 일 때, 내부 에너지 U 는 다음과 같다.

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T \quad (k_B: \text{볼츠만 상수})$$

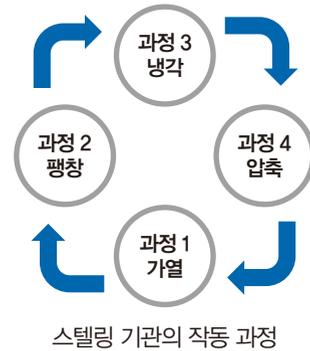
다)

부피 V , 압력 P 인 이상 기체로 채워진 실린더가 있고 실린더의 피스톤이 자유롭게 움직일 수 있는 경우, 실린더를 가열하여 압력을 일정하게 유지하면서 부피를 ΔV 만큼 변화시켰을 때 기체가 한 일 W 는 $W = P\Delta V$ 와 같다. 이것을 그래프로 나타내면 $P-V$ 그래프에서 일은 그래프가 그리는 면적에 해당한다. 일반적으로, 어떤 계가 외부로부터 열에 의해 유입된 에너지를 Q 라 하고 계가 한 일을 W 라고 할 때, 계의 내부 에너지 변화 ΔU 는 $\Delta U = Q - W$ 와 같다.

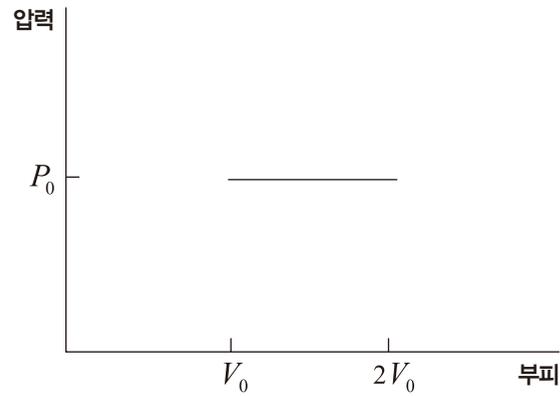
라)

두 개의 피스톤이 기계적으로 연결되어 있는 스텔링 기관의 기본적인 작동 사이클은 다음과 같으며, 이상적인 스텔링 기관은 두 번의 등적 과정(정적 과정)과 두 번의 등온 과정을 거친다.

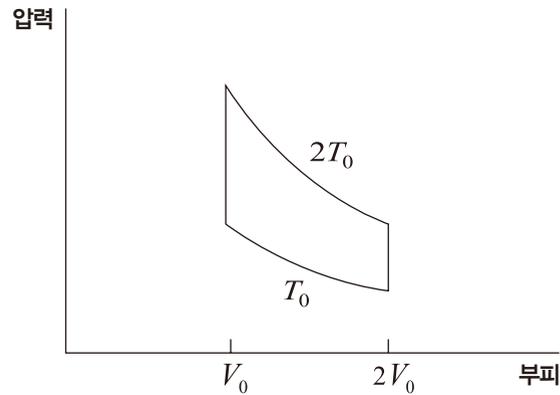
- ◎ 가열 _ 고열원에 접촉한 실린더가 가열된다.
- ◎ 팽창 _ 실린더 내의 작동 기체가 팽창하여 피스톤을 민다.
- ◎ 냉각 _ 저열원에 접촉한 실린더가 냉각된다.
- ◎ 압축 _ 실린더 내의 작동 기체가 수축하여 피스톤이 처음 위치로 돌아온다.



[문제 4-1] 어떤 이상 기체가 단원자 분자로 이루어져 있고 전체 분자 수가 N_0 이다. 아래 그림과 같이 이 기체의 압력 P_0 가 유지되면서 부피가 V_0 에서 $2V_0$ 로 변하는 등압 과정에서 내부 에너지 변화 ΔU 를 구하는 과정을 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]



[문제 4-2] 어떤 이상적인 스텔링 기관의 작동 기체가 단원자 분자로 이루어진 이상 기체이고 전체 분자 수가 T_0 이다. 아래 그림과 같이 이 기관의 가열 과정은 작동 기체의 부피 T_0 가 유지되면서 작동 기체의 절대 온도가 저열원의 절대 온도 $2T_0$ 에서 고열원의 절대 온도 $2T_0$ 로 변하는 등적 과정이며, 압축 과정은 작동 기체의 절대 온도 T_0 가 유지되면서 작동 기체의 부피가 $2T_0$ 에서 V_0 로 변하는 등온 과정이다. 이 기관의 팽창 과정 동안, 이 기관으로 유입된 에너지 Q 를 구하는 과정을 제시문 (가)~(라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]





[문제 4] 다음 제시문 (가), (나)를 읽고 문제에 답하시오.

가)

보이는 수소 원자의 선 스펙트럼을 설명하기 위하여 다음과 같은 원자 모형을 제안하였다. 원자핵 주위의 전자는 특정한 에너지를 가진 원형 궤도를 따라 빠르게 원운동을 한다. 이렇게 층을 이루는 원형 궤도를 전자 껍질이라고 하는데, 원자핵에서 가장 가까운 껍질부터 $K(n = 1)$, $L(n = 2)$, $M(n = 3)$, $N(n = 4)$,등의 기호를 사용하여 나타낸다. 여기서 n 을 주양자수라고 하고, 각 궤도의 전자가 가질 수 있는 에너지 준위 E_n 은 다음과 같다.

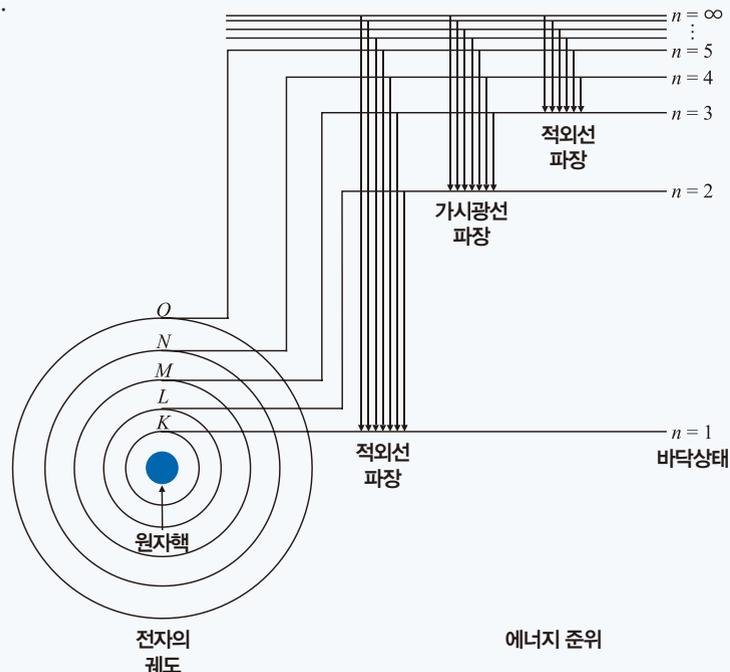
$$E_n = -\frac{1312}{n^2} \text{ (kJ/mol)} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

낮은 에너지 준위에 있는 전자가 높은 에너지 준위로 이동할 때는 두 에너지 준위의 차이만큼의 에너지를 흡수하고, 높은 에너지 준위의 전자가 낮은 에너지 준위로 이동할 때는 두 에너지 준위의 차이만큼의 에너지를 방출한다.

빛에너지($E_{\text{빛}}$)와 진동수(ν), 파장(λ)의 관계는 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$E_{\text{빛}} = \Delta E = |E_{\text{나중}} - E_{\text{처음}}| = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \quad (h:\text{플랑크상수}, c:\text{광속})$$

수소 원자 내에 있는 전자의 에너지 준위는 양자화되어 있으므로 수소 원자에서 방출되는 빛의 파장은 불연속적으로 나타난다. 이때 들뜬 상태의 전자가 K 전자 껍질로 떨어지면서 자외선을 방출하는 라이먼 계열, L 전자 껍질로 떨어지면서 가시광선을 방출하는 발머 계열, M 전자 껍질로 떨어지면서 적외선을 방출하는 파셴 계열에 해당되는 파장이 각각 얻어진다.



나)

일정한 용액 속에 녹아 있는 용질의 상대적인 양을 용액의 농도로 나타낸다. 용액 100g 속에 녹아 있는 용질의 질량을 퍼센트 농도, 용액 1L 속에 녹아 있는 용질의 몰 수를 몰 농도, 용매 1kg 속에 녹아 있는 용질의 몰 수를 몰랄 농도라고 한다. 용액의 어는점 내림(ΔT_f)은 순수한 용매의 어는점과 용액의 어는점의 차이이다. 비휘발성, 비전해질 용질이 녹아 있는 묽은 용액의 어는점 내림(ΔT_f)은 용질의 종류에 관계없이 용액의 몰랄 농도에 비례한다.

$$\Delta T_f = K_f \times m$$

이때 m 은 몰랄 농도, K_f 는 용매의 종류에 따라 다른 값을 가지는 몰랄 내림 상수이다. 용매는 같지만 농도가 서로 다른 두 용액이 반투막을 사이에 두고 있을 때 농도가 낮은 용액에서 농도가 높은 용액 쪽으로 용매 분자가 이동하는 현상을 삼투라고 하고, 이때 반투막에 작용하는 압력을 삼투압(Π)이라고 한다. 반트 호프는 실험을 통해 비휘발성, 비전해질 용질이 녹아 있는 묽은 용액의 삼투압은 용매나 용질의 종류에 관계없이 용액의 몰 농도(C)와 절대 온도(T)에 비례한다는 사실을 알아내어 다음과 같은 반트호프식을 제시하였다.

$$\Pi = CRT \text{ (} R\text{:기체 상수)}$$

상온에서 용액에 녹아 있는 용질의 분자량은 수용액의 어는점 내림을 이용하거나 삼투압을 측정하여 결정할 수 있다.

[문제 4-1] 발머 계열의 가장 짧은 파장을 λ_1 , 라이먼 계열의 가장 긴 파장을 λ_2 라고 할 때, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 을 구하는 과정을 제시문 (가)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 4-2] 27°C에서 퍼센트 농도가 18%인 포도당 수용액의 삼투압과 이 용액의 ΔT_f 를 구하는 과정을 제시문 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 이 포도당 용액의 밀도는 1.54g/mL, 포도당의 분자량은 180, 물의 몰랄 내림 상수(K_f)는 1.86°C/m, 기체 상수(R)는 0.082atm·L/mol·K이다. [20점]