2015학년도 수시 일반 논술

문제 4

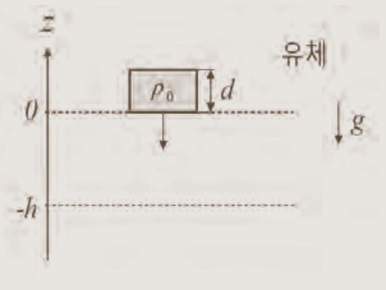
다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 유체에 잠긴 물체에 작용하는 부력은 잠긴 부분의 부피에 해당하는 유체의 무게와 같다. 밀도가 ρ인 유체에 부피 V만큼 물체가 잠겼을 때, 이 물체가 받는 부력은 $F=\rho Vg$가 된다. 여기서 g는 중력 가속도이며, 중력과 부력의 합이 물체에 작용하는 알짜힘이다.

(나) 용수철에 힘이 작용하여 용수철이 x만큼 늘어났을 때 x는 용수철에 작용한 힘에 비례한다. 따라서 길이가 x만큼 늘어난 용수철이 원래의 길이로 되돌아가려는 탄성력은 $F=-kx$이다. 이를 훅의 법칙이라고 한다. 여기서 (−)는 탄성력과 용수철의 변위가 반대 방향이라는 의미이며, k는 용수철의 특성에 따라 정해지는 용수철 상수이다. 용수철 상수가 k인 용수철에 질량 m인 물체를 매달아 진동시키면 주기는 $T=2\pi\sqrt{m/k}$이다.

(다) 가속도가 일정한 운동을 등가속도 운동이라 하는데, 이것은 속도가 시간에 따라 일정하게 변하는 운동이다. 가속도가 a로 일정한 경우, 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 나중 속도를 v라고 하면 $v=v_0+at$의 식이 성립한다. 시간 t동안 움직인 변위는 속도–시간 그래프의 아래 면적에 해당하며, 등가속도 운동에서 처음 시각을 0, 나중 시각을 t, 처음 속도를 v_0, 처음 위치를 0, 나중 위치를 s라고 하면 $s=v_0t+at^2/2$이 성립한다.

[문제 4–1] 넓은 공간에 밀도가 ρ_1인 유체가 가득 차 있다. 이 공간에서 다음 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있던 직육면체 형태의 물체가 낙하를 시작하였다. 물체의 두께가 d, 밀도가 ρ_0일 때 물체가 h만큼 낙하하여 $z=-h$에 도달할 때까지 소요되는 시간을 구하는 과정을 위 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1<\rho_0$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [10점]



[문제 4–2] [문제 4–1]에서 유체의 밀도가 $z\geq 0$에서 ρ_1, $z<0$에서 ρ_2이고, [문제 4–1]에서와 동일한 물체가 위 그림과 같이 $z=0$에 정지해 있다가 낙하를 시작한다고 하자. 위 제시문에 근거하여 이 물체의 운동이 주기 운동이 됨을 보이고, 그 주기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, $\rho_1<\rho_0<(\rho_1+\rho_2)/2$이고, 중력 가속도는 g이며, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없다고 가정한다. [20점]

1. 논제의 분석

2015학년도 수시 일반 논술(자연계열)에 출제된 물리 문항들은 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하라'의 형식과 'XX가 됨을 보이시오'의 형식이 함께 나타난다. 전자의 형식은 '설명 및 정답 요구형'으로 분류할 수 있는 문항들로서 앞서 설명된 바와 같이 다음의 사항에 유의하여 답안을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지한 후 문제 풀이를 시도해야 함.
- 답안을 얻기 위한 사고 전개 과정을 각 단계 별로 설명해야 함.
- 풀이 과정이 수리적 계산인 경우 설명에 반드시 수식이 제시되어야 함.
- 'XX를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오'의 XX에 해당하는 답안이 최종적으로 제시되어야 함.

[문제 4-2]에 나타나는 'XX가 됨을 보이시오'의 형식은 '증명 및 설명 요구형'으로 분류할 수 있다. 물리 문항에서 요구하는 증명은 수학에서의 증명과 달리 발생하는 현상의 원인 또는 결과를 물리 법칙에 근거하여 설명하는 것이 핵심이며, 다음의 사항에 유의하여 답변을 작성해야 한다.

- 제시문에 주어진 사항들을 우선적으로 숙지해야 함.
- 증명이 요구되는 사항에 적용될 물리 법칙이나 정리를 바르게 선택해야 함.
- 증명의 각 단계는 적절한 수식을 통해 타당성의 근거를 제시해야 함.
- 'XX가 됨을 보이시오'의 XX에 해당하는 현상이 수식을 통해 최종적으로 설명되어야 함.

2. 제시문의 분석 및 배경 지식

제시문 (가)는 물리I, 단원 IV 에너지, 소단원 2 힘과 에너지의 이용의 유체에서의 압력(교학사 물리I, p.327), 제시문 (나)는 물리II, 단원 I 운동과 에너지, 소단원 4 힘과 운동 법칙의 용수철 진자에 작용하는 힘(교학사 물리II, p.52), 제시문 (다)는 물리I, 단원 I 시공간과 우주, 소단원 1 시간, 공간, 운동의 가속도(교학사 물리I, pp.35–36)에서 각각 발췌되었다. 부력, 탄성력, 중력 등 외부의 힘에 의한 물체의 운동을 설명하는 뉴턴 역학이 중심 내용이며, 과목 별 문항의 형태로 변경되어 시행되는 첫 해라는 점과 물리II의 내용을 공부하지 않은 수험생들을 고려하여 물리II의 내용 보다는 물리I의 내용을 위주로 발췌되었다는 점이 특징이다. 물리II에서 발췌된 제시문 (다)의 경우에도, 주기를 구하는 식이 주어진 부분을 제외한 나머지 설명은 물리I, 단원 I 시공간과 우주, 소단원 1 시간, 공간, 운동의 탄성 퍼텐셜 에너지(교학사 물리I, p.54) 부분에 동일하게 나타나 있다. 각 제시문의 내용에 대한 배경 설명은 다음과 같다.

제시문 (가)는 유체에 잠긴 물체에 작용하는 부력을 계산하는 방법을 설명한다. 유체란 일정한 형태가 없이 흐를 수 있는 물질을 가리키며, 액체와 기체가 포함된다. 일정한 모양을 가지지 않는 유체의 특성을 서술할 때에는 고체를 서술할 때 사용하는 질량과 힘이라는 개념보다 밀도와 압력이라는 개념을 사용하는 것이 더 유용하다. 밀도란 단위 부피당 질량을 의미한다. 물질의 밀도를 ρ, 질량을 M, 부피를 V라고 할 때 $\rho = M/V$로 정의되며 단위로는 kg/m^3이나 g/cm^3을 사용한다. 고체나 액체의 밀도는 기체에 비해 약 1000배정도 크며, 이는 기체에서 분자 사이의 거리가 고체나 액체를 이루는 분자 사이의 거리보다 10배 정도 크다는 것을 의미한다. 밀도는 온도의 함수인데, 예를

들면 물의 경우 4℃에서 약 1000kg/m^3의 가장 큰 밀도를 갖는다. 그 이하에서는 0℃까지 점차 감소하다가 얼음이 된 후 급격히 줄어들어 917kg/m^3까지 감소하고 그 이하의 온도에서는 얼음이 수축하여 점차 증가하는 형태로 변한다. 일상 생활에서는 밀도 대신 '비중'이라는 용어를 많이 사용하는데, 비중은 어떤 물질의 밀도와 4℃ 물의 밀도의 비율로 정의되며, 단위는 없다.

유체는 외부로부터 힘을 받을 때 연속적으로 변형되는 특징을 지니고 있기 때문에 고체처럼 한 점에 힘을 줄 때 나타나는 현상을 볼 수 없다. 대신 유체에서는 압축에 의해 힘이 전달되기 때문에 유체의 운동을 설명할 때에는 압력을 사용한다. 압력은 단면에 수직으로 작용하는 힘과 그 힘을 받는 면적의 비로 나타낸다. 즉 압력을 P, 수직으로 작용하는 힘을 F, 힘이 작용하는 면적을 A라고 하면 다음의 식이 성립한다. 이 때, 힘이 벡터이므로 압력도 벡터임을 알 수 있다. 압력의 단위로는 Pa(파스칼)을 사용하는데, 1 Pa = 1 N/m^2이다.

$$\vec{P} = \frac{\vec{F}}{A}$$

프랑스의 과학자였던 파스칼은 유체 표면에서 압력이 가해지면 유체 내의 모든 지점에 이와 같은 크기의 압력이 전달된다는 것을 발견하였다. 이를 파스칼 법칙이라고 한다. 파스칼 법칙은 일상 생활에서 작은 힘으로 큰 힘을 낼 때에 매우 유용하다. 유체의 작은 면적 부분에 일정한 압력을 가하면 압력과 면적의 곱에 해당하는 힘은 작아진다. 가해진 압력은 파스칼 법칙에 의해 유체의 모든 부분에 작용하므로, 유체가 넓게 접하고 있는 부분에 작용하는 힘은 다음 그림과 같이 면적에 비례하여 증가한다.

위 그림에서 힘의 크기에는 차이가 있지만, 작은 힘이 유체에 행한 일과 유체가 큰 힘을 통해 외부에 행한 일의 양은 같다. 유체의 총량은 보존되므로 작은 힘이 밀어낸 유체의 부피가 큰 힘을 통해 확장된 유체의 부피와 같아야 하며, 따라서 작은 힘이 작용한 변위가 큰 힘이 작용한 변위보다 크다. 즉, 변위가 힘의 크기에 반비례하므로 변위와 힘을 곱한 일이 같아지는 것이다. 유압 장치를 이용하면 작은 힘으로도 큰 힘을 낼 수 있기 때문에 대형 굴삭기의 작동, 자동차의 브레이크와 조향 장치 등에 파스칼 법칙을 이용한 유압 장치가 적용되고 있다.

파스칼 법칙에 의해 외부에서 유체에 압력을 가하면 유체 모든 곳에 같은 크기의 압력이 작용하지만, 유체 자체의 무게 때문에 유체 내에서는 깊이에 따라 달라지는 압력도 작용한다. 밀도가 ρ인 유체가 h만큼의 깊이로 담겨있고 유체의 단면적이 A라고 하면 유체의 무게로 인한 압력 P는 다음과 같다.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho hAg}{A} = \rho gh$$

위의 식에서 g는 중력 가속도이다. 즉 밀도가 ρ인 유체 속 깊이 h인 지점에서 중력에 의해 발생하는 압력의 크기는 ρgh이다.

유체 내부에 물체가 존재하는 경우, 물체의 위와 아래 지점이 받는 압력은 깊이 차이로 인해 달라진다. 물체 위와 아래의 압력 차이로 인해 힘의 차이가 발생하며, 그 방향은 압력이 높은 쪽에서 낮은 쪽으로, 즉 아래에서 위를 향하는 방향으로서 중력의 반대 방향이다. 이로 인해 물체에 뜨는 힘이 발생하는데 이를 부력이라고 한다. 유체 속에 있는 물체의 모든 부분에 작용하는 압력의 벡터 합을 구하면, 그 크기는 물체의 부피에 해당하는 유체의 무게와 같다. 본래의 유체가 물체 대신 들어 있을 경우 아무런 힘을 받지 않아야 하는데, 이는 유체에 작용하는 중력과 부력이 정확히 평형을 이루기 때문이다. 따라서 물체의 부피에 해당하는 유체의 무게가 부력과 같아진다는 것을 직관적으로 이해할 수 있다.

제시문 (나)는 훅의 법칙으로 알려져 있는 용수철의 복원력에 의한 단진동 운동에 관한 내용이다. 용수철에 매달린 물체를 당겼다가 놓으면 물체는 용수철이 늘어나고 압축되면서 주기적인 왕복 운동을 한다. 물체의 이러한 운동을 단진동(simple harmonic oscillation)이라고 한다. 단진동에서 물체는 용수철이 최대로 늘어났을 때와 최소로 압축되었을 때 순간적으로 정지하고, 평형 상태일 때 가장 빠른 운동을 한다. 이러한 단진동 운동은 원운동을 하고 있는 물체를 옆에서 본 모습과 같다. 즉 원운동하는 물체에 평행 광선을 비출 때 벽에 생긴 그림자의 운동이다. 물체의 그림자 위치는 시간에 따라 주기적으로 변하게 되며, 수식적으로는 $x = A\sin\omega t$로 표현된다.

단진동하는 물체가 1초 동안 진동하는 횟수 f를 진동수라 하고, 1회 진동하는 데 걸리는 시간 T를 주기라고 한다. $x = A\sin\omega t$에서 주기 T 동안 변화된 위상은 2π이므로 진동수와 주기의 관계는 다음과 같다.

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

단진동하는 물체의 속도 v(t)와 가속도 a(t)는 변위 x(t)를 시간으로 각각 한 번, 두 번 미분하면 얻을 수 있다. 따라서 단진동 운동에서는 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin\omega t \\ v(t) &= A\omega\cos\omega t = A\omega\sqrt{1-\sin^2\omega t} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \\ a(t) &= -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x \end{aligned}$$

용수철에 추를 연결하여 마찰이 없는 바닥에서 추를 당기거나 압축시켰다 놓으면 용수철은 주기적인 왕복 운동을 한다. 이러한 진자를 용수철 진자라고 한다. 용수철 진자는 용수철이 작용할 수 있는 한계인 탄성 한계 내에서 용수철의 늘어난 길이 x에 비례하는 복원력 F 가 작용하며, 그 크기는 F = −kx 로서 이를 훅의 법칙이라고 한다. 이 때 k는 비례 상수로 용수철 상수 또는 탄성 계수라고 한다. 복원력은 매달린 추의 질량 m과 가속도 a(t)의 곱이므로, 추의 질량과 용수철 상수로부터 용수철 진자의 진동수 f와 주기 T 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

제시문 (다)는 등가속도 직선 운동에서 나타나는 속도와 변위에 관한 내용이며, 이에 관한 배경 지식은 앞서 설명된 2015학년도 모의 논술 제시문 (가)–(나)의 배경 지식과 동일하다.

3. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4–1]

[문제 4–1]은 낙하하는 물체에 일정한 크기의 부력이 가해질 때, 물체가 낙하하는 데 소요되는 시간을 구하는 과정을 묻는 문제이다. 문제에서 주어진 조건을 살펴보면 밀도가 ρ_1인 유체로 가득 찬 공간을 가정하고 있으며, 제시문 (가)의 내용을 고려하면 유체 내부에 존재하는 물체는 $\rho_1 Vg$에 해당하는 부력을 받게 됨을 알 수 있다.

이 공간에 두께가 d인 직육면체 형태의 물체가 정지해 있다가 낙하하기 시작하였다. 물체의 부피 V 대신 두께 d가 주어졌기 때문에 물체의 수직 단면적을 A로 가정할 때 물체가 받게 되는 부력의 크기는 $\rho_1 Adg$가 되며 방향은 중력의 반대 방향이므로 z축의 (+) 방향이다. 물체의 질량은 밀도와 부피의 곱이므로 $\rho_0 Ad$ 이고, 중력의 크기는 $\rho_0 Adg$, 방향은 z축의 (–) 방향이다. 문제의 조건에서 $\rho_1 < \rho_0$이므로 중력의 크기가 부력의 크기보다 큼을 알 수 있는데, 이는 물체가 낙하한다는 조건과도 잘 부합한다.

제시문 (가)에 의하면 물체가 낙하하는 동안 물체에 가해지는 알짜힘은 중력과 부력의 합이고 두 힘 모두 위치나 시간과 관계없이 일정하기 때문에 물체는 가속도가 일정한 등가속도 직선 운동을 함을 알 수 있다. 알짜힘을 물체의 질량 $\rho_0 Ad$ 로 나누면 물체의 가속도를 구할 수 있는데, 이 단계에서 Ad가 제거되어 물체의 가속도가 물체의 부피와는 무관하고 물체의 밀도에 따라서만 달라짐을 알 수 있다.

가속도를 구한 후 제시문 (다)에 주어진 등가속도 운동에서의 시간과 변위의 관계식에 변위 –h와 함께 대입하면, 시간 t에 관한 2차식을 얻을 수 있으며 그 해를 찾으면 낙하에 소요되는 시간을 구할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- 유체 속의 물체는 일정한 크기의 부력을 받는다.
- 유체 속의 물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합이다.
- 알짜힘을 물체의 질량으로 나누어 가속도 a를 구한 후 물체의 운동이 등가속도 운동임을 확인한다.
- 제시문에 주어진 $S = at^2/2$의 식에 변위와 가속도를 대입하여 낙하에 소요되는 시간을 구한다.

[문제 4–2]

[문제 4–2]는 [문제 4–1]과 유사한 상황이지만 유체의 밀도가 z = 0 면을 경계로 달라져 물체의 밀도보다 작은 영역(z 〉 0)과 큰 영역(z 〈 0)으로 나뉘는 경우 발생하는 물체 운동의 주기성을 예측하고 이에 관한 수식 전개를 통해 운동의 주기를 구하는 문제이다. 제시된 환경에서의 물체의 운동을 이해하기 위해서는 시간에 따른 물체의 변위와 물체에 가해지는 힘을 단계적으로 살펴보아야 한다. 문제에서 주어진 조건을 우선적으로 살펴 보면, $\rho_1 < \rho_0 < (\rho_1 + \rho_2)/2$이고, 각 항에 2를 곱한 후 ρ_1을 빼면 $\rho_1 < 2\rho_0 - \rho_1 < \rho_2$이다. $\rho_1 < \rho_0 < \rho_0 + \rho_0 - \rho_1 < \rho_2$이므로 이 조건으로부터 $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$임을 알 수 있고, 부력과 중력을 제외한 다른 힘은 없으므로, 마찰 등으로 인한 에너지 손실이 발생하지 않는 상황이다.

밀도가 ρ_0이고 수직 방향 단면적이 A인 물체가 [문제 4–1] 그림의 초기 위치에 놓여 있을 경우, 물체의 모든 부분이 물체보다 밀도가 낮은 영역에 있다. 제시문 (가)의 식을 사용하여 이때 받는 부력의 크기를 구하면 $\rho_1 Adg$이고 방향은 중력의 반대 방향이다. 중력의 크기는 물체의 부피, 밀도, 중력 가속도의 곱이므로 $\rho_0 Adg$이다. 문제의 조건에서 $\rho_1 〈 \rho_0$라고 하였으므로 중력이 부력보다 큰 상태임을 알 수 있다. 따라서 중력과 부력을 합한 알짜힘은 중력과 같은 방향, 즉 z축의 (–) 방향으로 작용하여 물체는 낙하하기 시작한다.

물체가 낙하하기 시작하면 물체의 일부분이 물체의 밀도보다 큰 영역에 존재하게 된다. 예를 들어 물체가 z축의 (−) 방향으로 x 만큼 낙하한 경우 물체에서 (d−x) 만큼의 두께는 여전히 밀도가 ρ_1인 영역에 있으나, x 만큼의 두께는 밀도가 ρ_2인 영역에 들어간다. $\rho_0 < \rho_2$이기 때문에 밀도가 ρ_2인 영역에 있는 물체의 일부분이 받는 부력은 동일한 부분이 받는 중력보다 크다. 이 상황에서 알짜힘 F는 '밀도가 ρ_1인 영역의 부력 + 밀도가 ρ_1인 영역의 부력 + 중력'이며, 그 식을 구해 보면 다음과 같다.

$$F = (d-x)A\rho_1 g + xA\rho_2 g - dA\rho_0 g = (\rho_2 - \rho_1)Agx - (\rho_0 - \rho_1)Agd$$

$$= -(\rho_2 - \rho_1)Agz - (\rho_0 - \rho_1)Agd$$

$$= -(\rho_2 - \rho_1)Ag\left[z + \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}d\right]$$

물체가 z축의 (−)방향으로 x만큼 낙하한 상황이므로 위 식에서 두 번째 줄은 z = −x 를 대입하였다. 위 식의 세 번째 줄에서 $k = (\rho_2 - \rho_1)Ag$, $S = (\rho_0 - \rho_1)d/(\rho_2 - \rho_1)$라고 놓으면 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$F = -k(z + S)$$

이 식은 제시문 (나)에 설명된 훅의 법칙이 적용되는 상황에서 탄성력의 식과 동일한 형태이며, 진동의 중심 지점이 z = 0에서 z = −S로 이동한 진동 운동을 나타낸다. 또한 z = −S에서 F = 0 이므로 이 진동 운동의 진폭은 S이다.

만일 물체의 낙하 거리가 물체의 두께 d를 초과하면, 물체는 밀도가 ρ_2인 영역에 완전히 들어가며, 물체가 받는 부력은 물체가 받는 중력보다 크다. 이 경우 물체에 가해지는 알짜힘은 물체의 위치와 무관하게 일정하며, 힘의 방향은 z축의 (+) 방향으로서 물체를 초기 위치로 되돌리는 방향의 힘이다.

설명된 사항을 고려하여 물체의 변위에 따라 물체에 가해지는 알짜힘의 그래프를 그려 보면 그 형태는 다음과 같다.

훅의 법칙이 적용되는 중간 영역에서만 진동 운동이 진행되는 경우 낙하하는 최대 변위는 진폭의 두 배인 −2S가 될 것이다. 문제에서 주어진 조건 $\rho_0 < (\rho_1 + \rho_2)/2$의 양변에서 ρ_1을 뺀 후$(\rho_2 - \rho_1)$로 나누면 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} < \frac{1}{2}$$

위 부등식에 의해 S 〈 d / 2이므로, 물체의 최대 변위는 -2S 〉 -d 가 되어, 물체는 훅의 법칙이 적용되는 중간 영역에서 진동 운동을 하게 됨을 알 수 있다. 진동 운동의 주기는 물체의 질량 m과 용수철 상수 k에 해당하는 수식을 제시문(나)의 식에 대입하면 구할 수 있다. 따라서 문제 풀이에는 다음과 같은 논리의 전개 과정 및 계산 과정이 포함되어야 한다.

- 유체 속의 물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합이다.
- 유체 속의 물체는 크기가 일정한 중력과 위치에 따라 달라지는 부력을 받는다.
- 물체의 변위에 따른 알짜힘을 구하면 훅의 법칙과 동일한 형태의 식을 얻는다.
- 문제의 조건으로부터 물체의 최대 운동 범위가 훅의 법칙이 적용되는 구간에 있음을 확인할 수 있다. 이상의 식에서 물체가 단진동 운동을 함을 증명한다.
- 물체의 질량과 용수철 상수에 해당하는 수식을 대입하여 진동 운동의 주기를 구한다.

4. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1 예시 답안]

물체의 부피를 V 라고 할 때, 부력은 $+z$ 방향이며, 크기는 $\rho_1 Vg$이다.

물체에 가해지는 알짜힘은 부력과 중력의 합으로 $\rho_1 Vg - \rho_0 Vg = -(\rho_0 - \rho_1)Vg$이다.

물체의 가속도는 알짜힘을 물체의 질량으로 나눈 값이므로 다음과 같다.

$$a = -\left(\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0}\right)g = -\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)g$$

물체의 초기 속도가 0이고, 변위가 $-h$ 이므로 낙하에 소요되는 시간은 다음과 같다.

$$-h = \frac{1}{2}at^2, \quad t = \sqrt{\frac{-2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h\rho_0}{(\rho_0 - \rho_1)g}}$$

[문제 4-1] 채점 기준

- 부력을 바르게 구하면 +2점.
- 물체에 가해지는 전체 힘(알짜힘)을 바르게 구하면 +3점.
- 알짜힘을 물체의 질량으로 나누어 가속도를 바르게 구하면 +2점.
- 낙하에 소요되는 시간을 바르게 구하면 +3점. (문제에 주어지지 않은 물체의 질량이나 부피 등으로 표현했으면 +1점만 부여).
- 힘의 방향에 따라 알짜힘, 가속도 등의 +/- 부호가 혼동되어 잘못 표기되었더라도, 크기가 맞으면 그 부분에 해당하는 점수를 모두 부여함.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2 예시 답안]

물체에 가해지는 힘의 합(알짜힘)은 부력과 중력의 합이다.

물체의 변위 z 가 $-d<z<0$인 경우, 물체가 잠겨 있는 부분이 z 에 따라 나누어 지며, 부력 $F_{부력}$은 물체의 부피를 V 라고 하면 다음과 같다.

$$F_{부력}=\rho_1\frac{V}{d}(d+z)g-\rho_2\frac{V}{d}zg=\rho_1 Vg+(\rho_1-\rho_2)\frac{V}{d}zg$$

물체에 가해지는 합력(알짜힘)은 부력과 중력을 합하여 다음과 같다.

$$F=F_{부력}+F_{중력}=\rho_1 Vg+(\rho_1-\rho_2)\frac{V}{d}zg-\rho_0 Vg=-(\rho_2-\rho_1)\frac{V}{d}g\left(z+\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d\right)$$

이 힘은 $\frac{(\rho_2-\rho_1)Vg}{d}=k$라고 할 때, 제시문 (나)에 주어진 스프링에 작용하는 $F=-kx$형태의 힘이며, 변위에 반대 방향으로 복원력이 작용하는 운동으로 주기 운동임을 알 수 있다. 진동의 중심은 $z=-\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이며, 진폭은 $\frac{\rho_0-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이다.

물체가 많이 낙하하여 변위 z 가 $-d>z$인 경우, 물체의 모든 부분이 밀도가 ρ_2인 영역에 있으므로, 부력 $F_{부력}$은 물체의 부피를 V 라고 하면 다음과 같다.

$$F_{부력}=\rho_2 Vg$$

이 경우 물체에 가해지는 합력(알짜힘)은 부력과 중력을 합하여 다음과 같이 (+)로 일정함을 알 수 있다.

$$F=F_{부력}+F_{중력}=(\rho_2-\rho_0)Vg$$

그런데, $-d<z<0$ 구간에서 진폭의 두 배를 계산하면, $\frac{2\rho_0-2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d$이며, 문제의 조건에서 $2\rho_0<\rho_2+\rho_1$이기 때문에,

$\frac{2\rho_0-2\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d<\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}d=d$이다. 진폭의 두 배는 진동 운동에서 물체의 최대 변위 이므로, 이 물체의 운동은 $-d<z<0$

영역에만 한정되며, 용수철의 운동과 동일한 진동 운동임을 알 수 있다.

제시문에서 진동 운동의 주기 $T=2\pi\sqrt{m/k}$ 이므로, 대입하면 주기를 구할 수 있다.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 Vd}{(\rho_2-\rho_1)Vg}}=2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 d}{(\rho_2-\rho_1)g}}$$

[문제 4-2] 채점 기준

- 물체에 가해지는 합력(알짜힘)이 부력과 중력의 합이라고 표현하면 +3점.
- $-d<z<0$ 영역에서 변위에 따른 부력의 식을 바르게 구하면 +3점.
- $-d>z$ 영역에서 변위에 따른 부력의 식을 바르게 구하면 +2점.
- 각 영역에서 부력과 중력을 합하여 물체에 가해지는 알짜힘을 바르게 구하면 각각 +1점.
- $-d<z<0$ 영역에서 계산된 힘이 스프링에 작용하는 복원력과 동일한 형태임을 언급하면 +3점.
- 운동이 $-d<z<0$ 영역에만 국한됨을 지적하면 +2점.
- k와 질량을 대입하여 주기를 바르게 구하면 +5점.
- 변위의 +/- 부호가 혼동되었더라도, 크기가 맞으면 그 부분의 점수를 모두 부여함.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.