2015학년도 수시 일반 논술(자연계열I/의학부)

문제 1 (자연계열I)

공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임이 있다. 바구니 안에 1~6까지 번호가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 바구니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸 후, 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오면 꺼낸 공의 번호에 1000원을 곱한 금액을 상금으로 받으며, 주사위를 던져서 5 또는 6의 눈이 나오면 바구니에서 꺼낸 공의 번호에 관계없이 2000원을 상금으로 받는다. 특별히 주사위의 눈이 공의 번호와 일치할 경우, 상금은 두 배가 된다. 이 게임에서 상금의 기댓값을 구하시오.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

이번 문제는 이산확률변수의 기댓값을 구하는 문제이다. 공과 주사위를 이용하여 상금이 결정되는 게임에서 받게 되는 상금을 확률변수 W라고 놓으면 이 확률변수가 취할 수 있는 값은 두 가지 경우로 나누어서 생각해야 한다. 한 가지는 특별 상금이 아닌 일반 상금을 받는 경우이고, 다른 한 가지는 특별 상금을 받는 경우이다. 일반 상금을 받는 경우 받을 수 있는 상금은 1,000원, 2,000원, ⋯, 6,000원이고, 특별 상금을 받는 경우 상금이 일반 상금의 두 배가 되므로 일반 상금을 제외하고 추가적으로 받게 되는 상금은 1,000원, 2,000원, 3,000원, 4,000원이다.

각각의 상금을 받을 확률을 계산하기 위하여 각각의 상금을 받게 되는 경우를 생각해 보면 다음과 같다. 상금이 1,000원인 경우는, 바구니에서 1번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오는 경우이고, 그 확률은 공을 꺼내는 사건과 주사위를 던지는 사건이 서로 독립이므로 $\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{36}$이다. 마찬가지로 상금이 3,000원,⋯, 6,000원일 경우도 각각 확률은 4/36으로 같다. 하지만 상금이 2,000원인 경우는, 바구니에서 2번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오는 경우 또는 꺼낸 공의 번호와 상관없이 주사위를 던져서 5나 6의 눈이 나오는 경우이므로, 해당 확률은 $\frac{4}{36}+\frac{2}{6}=\frac{16}{36}$이다. 따라서, 특별 상금을 제외한 일반 상금의 기댓값(x)을 구하면 다음과 같다.

$$x=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\times 1{,}000i+\frac{2}{6}\times 2{,}000\right)=\frac{4{,}000}{36}\sum_{i=1}^{6}(i+1)=\frac{4{,}000}{36}\left(\frac{56}{2}-1\right)=\frac{108{,}000}{36}\text{ (원)}$$

특별 상금을 받는 경우에서, 추가 상금이 1,000원인 경우는, 바구니에서 1번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 1의 눈이 나오는 경우이다. 따라서 해당 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$이 된다. 마찬가지로, 추가 상금이 3,000원, 4,000원인 경우도 각각 확률은 1/36으로 같다. 반면에, 추가 상금이 2,000원인 경우는, 바구니에서 2번이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 2의 눈이 나오는 경우 또는 바구니에서 5 가 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 5의 눈이 나오는 경우 또는 바구니에서 6이 적혀 있는 공을 꺼내고 주사위를 던져서 6의 눈이 나오는 경우이므로, 해당 확률은 $\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{3}{36}$이다. 따라서, 특별 추가 상금의 기댓값($y$)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1000i}{36}\right)+\frac{4{,}000}{36}=\frac{14{,}000}{36}\text{(원)}$$

이 게임에서 받게 되는 상금의 기댓값(z)은 두 기댓값을 합해서 구하면 다음과 같다.

$$z=x+y=\frac{108,000}{36}+\frac{14,000}{36}=\frac{122,000}{36}=\frac{30,500}{9}\ (\text{원})$$

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

- 바구니에서 i번이 적힌 공을 꺼내고 주사위가 1~4의 눈이 나오면 상금은 $1000\times i$원이고, 주사위의 눈이 5 또는 6이면 2000원이므로, 특별 상금을 제외한 기대 상금(x)은 다음과 같다.

$$x=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\times 1,000i+\frac{2}{6}\times 2,000\right)=\frac{4,000}{36}\sum_{i=1}^{6}(i+1)=\frac{4,000}{36}\left(\frac{56}{2}-1\right)=\frac{108,000}{36}\ (\text{원})$$

- 특별 상금은 각각 1/36의 확률로 공의 번호가 $i\,(1\le i\le 4)$번의 경우 $1000\times i$원이 추가되고, 공의 번호가 5번 또는 6번일 경우 2,000원이 추가로 주어진다. 따라서 특별 상금의 기댓값(y)은 다음과 같다.

$$y=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1000i}{36}\right)+\frac{4,000}{36}=\frac{14,000}{36}\ (\text{원})$$

- 따라서, 총 상금의 기댓값(z)은,

$$z=x+y=\frac{108,000}{36}+\frac{14,000}{36}=\frac{122,000}{36}=\frac{30,500}{9}\ (\text{원})$$

채점 기준

- 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해가 있다고 판단된다 : +5점
  - 36가지의 사건과 적절한 확률값(1/36)을 연관시킨다 : +3점
  - 관련 상금을 곱하는 시도를 한다 : +2점
- 특별상금을 제외한 기본 상금에 대한 기댓값을 정확히 계산 : +10점
  - 주사위의 눈 1~4에 대하여 각각 1000원씩 곱하여 상금 계산 : +3점
  - 5 또는 6일 때는 2000원으로 상금 계산 : +3점
  - 위의 상금들을 관련확률(1/36)과 곱하여 기댓값을 계산 : +4점
- 특별상금에 대한 기댓값을 정확히 계산 : +5점
  - 특별상금을 기본 상금의 2배로 계산 : +2점
  - 적절한 확률(1/36)을 곱하여 계산 : +3점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 1 (의학부)

당신이 아주 깜깜한 방에 갇혔다고 가정해 보자. 당신의 바로 앞에는 두 개의 단추 A와 B가 있다. 단추 A를 누를 경우 1/3의 확률로 2분 후에 방에서 탈출할 수 있으나, 2/3의 확률로는 탈출할 수 없으며 5분의 시간이 지난 후 다시 두 단추 중 하나를 누를 수 있게 된다. 단추 B를 누를 경우, 방에서 탈출할 수 없으며 3분의 시간이 지난 후 다시 두 단추 중 하나를 누를 수 있다. 이전에 누른 단추를 구별할 수 없고 매번 단추를 임의로 선택하여 누른다고 가정할 때, 방에서 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값을 구하시오.

1. 문제의 배경 지식

이번 문제는 확률변수가 취하는 값이 유한개는 아니지만 자연수와 같이 일일이 셀 수 있는 이산확률변수의 기댓값(교학사 적분과 통계, pp. 103–135)을 구하는 문제이다. 앞에서 이미 설명한 배경 지식 외에 이 문제를 풀기 위해 알아야 할 개념들에 관한 배경 설명은 다음과 같다.

주사위나 동전을 여러 번 던지는 경우와 같이 어떤 시행을 반복할 때, 매번 일어나는 사건이 서로 독립인 경우 그러한 시행을 독립시행이라고 한다. 매회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p라 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$$ {}_nC_r p^r q^{n-r} \text{ (단, } q=1-p,\ r=0,1,2,\ldots,n\text{) 이다.} $$

자연수 n에 대하여 다항식 $(a+b)^n$을 전개한 식에서 항 $a^{n-r}b^r$ (단, $r=0,1,2,\ldots,n$)은 n개의 일차식 $a+b$ 중에서 r개의 일차식에서는 b항을 선택하고, 나머지 $n-r$개의 일차식에서는 a항을 선택하면 얻을 수 있으므로 그 계수는 ${}_nC_r$과 같다. 따라서 다음의 전개식을 얻을 수 있고, 이 식을 이항정리라고 한다. (교학사 적분과 통계, Ⅱ 순열과 조합, pp. 92)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n \\
&= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}b^r
\end{aligned}
$$

첫째항이 $a\ (a \neq 0)$이고, 공비가 r인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 무한급수

$$ \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots $$

를 첫째항이 a이고 공비가 r인 무한등비급수라고 한다. 무한등비급수의 수렴 또는 발산을 알아보자.

(지학사 수학 I, Ⅳ 수열의 극한, pp. 176–177)

❶ $|r|<1$일 때

위의 무한등비급수의 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}$$

따라서 무한등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

❷ $|r|\geq 1$일 때

$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$이므로 위의 무한등비급수는 발산한다.

2. 문제의 분석 및 풀이 과정

이번 문제는 방에서 탈출하기 위해서 두 개의 단추 중 하나를 누르고, 주어진 확률로 탈출할 수도 있고 다시 처음 상황으로 돌아갈 수도 있는 상황에서, 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값을 구하는 문제이다. 탈출하기까지 걸리는 시간은 A단추를 눌러서 한번에 탈출하는 경우 2분이다. 그러나, A단추를 누르고 한번에 탈출하지 못하게 되면 먼저 5분이 지나고 다시 처음 상황으로 돌아가게 되고, B단추를 누르면 탈출하지 못하게 되고 3분이 지나고 다시 처음 상황으로 돌아가게 된다. 두 번째 시도에서 다시 앞의 경우가 반복되게 되므로, 각각의 시도에서 가능한 경우 탈출 시간을 다음과 같이 고려할 수 있다.

❶ 1번째 시도에서 탈출 : 2분

❷ 2번째 시도에서 탈출 :

- 1번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 5 + 2 = 7분
- 1번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 3 + 2 = 5분

❸ 3번째 시도에서 탈출 :

- 1번째 시도에서 A단추를 누르고, 2번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 5 x 2 + 2 = 12분
- 1번째 시도에서 A단추를 누르고, 2번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 5 + 3 + 2 = 10분
- 1번째 시도에서 B단추를 누르고, 2번째 시도에서 A단추를 누른 경우 : 3 + 5 + 2 = 10분
- 1번째 시도에서 B단추를 누르고, 2번째 시도에서 B단추를 누른 경우 : 3 x 2 + 2 = 8분

위의 경우에서 볼 수 있는 것처럼 $(n+1)$번째 시도에서 탈출하는 경우에 가능한 탈출 시간을 계산하기 위해서는 1번째 시도부터 n번째 시도까지의 A단추와 B단추를 누른 경우를 다 고려해야 한다. 설명의 편의상, A단추를 눌러서 탈출하는 경우를 c, 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 a라고 두고; B단추를 눌러서 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 b라고 두자. $(n+1)$번째 시도에서 탈출하는 경우에 가능한 각각의 경우 a, b, c가 몇 번씩 걸릴 지와 그 경우의 탈출시간을 다음과 같이 고려할 수 있다.

1. a : n번, b : 0번, c : 1번 → $(5n+3\cdot0+2)$분
2. a : $n-1$번, b : 1번, c : 1번 → $(5(n-1)+3\cdot1+2)$분
3. a : $n-2$번, b : 2번, c : 1번 → $(5(n-2)+3\cdot2+2)$분

…

k. a : $n-k$번, b : k번, c : 1번 → $(5(n-k)+3\cdot k+2)$분

…

n. a : 0번, b : n번, c : 1번 → $(5\cdot0+3n+2)$분

각각의 탈출 시도에서 일어날 수 있는 사건인 a, b, c가 일어날 확률은 주어진 문제로부터 각각 $p=P\{a\}=1/3$, $q=P\{b\}=1/2$, $r=P\{c\}=1/6$임을 알 수 있다. $(n+1)$번에 탈출한다고 가정하면, a: k번, b: $n-k$번, c: 1번의 과정을 거쳤다고 볼 수 있다; 단, $k=0,\ldots,n;\ n=0,1,\ldots$. 이에 대한 확률은 $(n+1)$번째 시도에서 사건 c가 일어나고, 1번째 시도부터 n번째 시도까지는 탈출하지 못하므로, 그 중에서 k번의 시도를 선택해서 사건 a가 일어나고, 나머지 시도에서는 사건 b가 일어난 것으로 생각할 수 있다. 각각의 탈출 시도는 서로 독립이므로 독립시행의 확률 구하는 공식을 적용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(\mathrm{a}=k,\mathrm{b}=n-k,\mathrm{c}=1|n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r,\ k=0,\ldots,n;\ n=0,1,\ldots.$$

이 경우에 대한 탈출시간은 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$(분)이다. 따라서, 탈출시간의 기댓값 x는 다음과 같은 식으로 계산될 수 있다;

$$\begin{aligned}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(2k+3n+2)\binom{n}{k}p^k q^{n-k}r\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2r\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+3rn\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}+2r\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\right\}\end{aligned}$$

큰 괄호 안의 두번째, 세번째 합은 다음과 같은 이항정리를 적용하여 정리할 수 있다.

$$\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,p^k q^{n-k}=(p+q)^n$$

여기서, ${}_nC_k=\binom{n}{k}$이다. 반면에, 첫번째 합은 위의 이항정리를 변형해서 구해야 한다. 위 식의 양변을 p에 대하여 미분하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\sum_{k=1}^{n}k\,{}_nC_k\,p^{k-1}q^{n-k}=n(p+q)^{n-1}$$

따라서, 기댓값 x는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2rn(p+q)^{n-1}+3rn(p+q)^n+2r(p+q)^n\right\}\\&=\{2r+3r(p+q)\}\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}+2r\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n\end{aligned}$$

위 식에서 두 번째 합은 첫째 항이 1이고 공비가 $p+q$인 무한등비급수이다. $p+q=5/6<1$이므로, 이 무한등비급수는 수렴하며 그 값은

$$\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n=\frac{1}{1-(p+q)}$$

이다. 반면에, 첫 번째 합은 무한등비급수를 변형해서 구해야 한다. 앞에서와 마찬가지로 위 식의 양변을 p에 관하여 미분하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(p+q)^{n-1} = \frac{1}{\{1-(p+q)\}^2}$$

따라서, 기댓값 x는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x = \frac{2r+3r(p+q)}{\{1-(p+q)\}^2} + \frac{2r}{1-(p+q)}$$
$$= \frac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{\left\{1-\frac{5}{6}\right\}^2} + \frac{2\times\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 36\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{12}\right)+2 = 21$$

즉, 문제에서 구하는 방에서 탈출하기까지 걸리는 시간(분)의 기댓값은 21분이다.

3. 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

설명의 편의상, A단추를 눌러서 탈출하는 경우를 c, 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 a라고 두고; B단추를 눌러서 다시 처음 상황으로 돌아오는 경우를 b라고 두자. 이들에 대한 확률은 각각 $p=P\{a\}=1/3$, $q=P\{b\}=1/2$, $r=P\{c\}=1/6$이다.

- $(n+1)$번에 탈출한다고 가정하면, a: k번, b: $n-k$번, c: 1번의 과정을 거쳤다고 볼 수 있다; 단, $k=0,\cdots,n;\ n=0,1,\cdots$.
  따라서, 이에 대한 확률은,

$$P(\mathrm{a}=k,\mathrm{b}=n-k,\mathrm{c}=1|n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} r. \qquad (*1)$$

- 이 경우에 대한 탈출시간은 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$이다.
- 따라서, 탈출시간의 기댓값 x는 다음과 같은 식으로 계산될 수 있다;

$$x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(2k+3n+2)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} r \qquad (*2)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{2r\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + 3rn\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + 2r\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\right\}$$
$$= 2rp\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1} + 3r(p+q)\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1} + 2r\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^n \qquad (*3)$$
$$= \frac{2rp+3r(p+q)}{\{1-(p+q)\}^2} + \frac{2r}{1-(p+q)} \qquad (*4)$$
$$= \frac{2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}{\left\{1-\frac{5}{6}\right\}^2} + \frac{2\times\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 36\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{12}\right)+2 = 21$$

- 등식 (*3)을 위한 보조식
  - 이항정리: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}=(p+q)^{n}$
  - p에 관하여 이항정리의 양변을 미분: $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^{k-1}q^{n-k}=n(p+q)^{n-1}$
- 등식 (*4)를 위한 보조식
  - 무한등비급수: $\sum_{n=0}^{\infty}(p+q)^{n}=\frac{1}{1-(p+q)}$
  - p에 관하여 위 식의 양변을 미분: $\sum_{n=0}^{\infty}n(p+q)^{n-1}=\frac{1}{\{1-(p+q)\}^{2}}$

채점 기준

다음과 같이 배점한다(개념이해 : 5점, 계산 : 15점)

A. 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해 : +5점

- 3가지의 사건에 대한 이해를 함 : +2점
- 3가지 각 경우에 대한 관련 확률을 계산(1/6, 1/3, 1/2)함 : +3점

B. 무한등비급수를 이용하여 기댓값 계산 : 15점

- (*1)과 같이 탈출하는 경우에 대한 상황의 확률을 계산 : +5점
- 탈출하는 경우의 탈출 시간을 $5k+3(n-k)+2=2k+3n+2$와 같이 표현 : +5점
- (*2)와 같이 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}$의 형태로 무한히 반복될 수 있는 상황으로 연결하여 기대값을 계산 : +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 다항식 A를 다항식 $B(B \neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면
$A = BQ + R$(단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)의 꼴로 나타낼 수 있다

(나) x에 대한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ (단, $g(x) \neq 0$)에 대해 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라 한다.
특히, $g(x)=1$이면 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 다항식이다. 예를 들어, 아래의 식은 모두 유리식이다.

$$\frac{5x-2}{2x^2-3x+4},\quad \frac{2x^3+3}{-2x^2+5x+3},\quad 2x^3+5x^2-8$$

(다) $C \neq D$일 때, $\frac{1}{CD} = \frac{1}{D-C}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{D}\right)$이 성립한다.

[문제 2-1 (자연계열 I)]

다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때,
계수 a, b, c를 각각 구하시오. [10점]

[문제 2-1 (의학부)]

다항식 $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지를 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 할 때,
계수 a, b, c를각각 n에 관한 식으로 표현하시오. [10점]

[문제 2-2]

$\int \frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식이 되도록 상수 p를 정하시오. [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1 (자연계열)]은 다항식의 사칙연산을 잘 이해하고 있는가 묻고 있는 문제이다. 특히, 다항식의 나눗셈을 몫과 나머지로 표현할 수 있고 이를 미분과 연계하여 통합적으로 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있다.

다항식 $x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면,

$x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$로 쓸 수 있다.

양변을 미분하면, $10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$이다.

여기서, $Q_1(x)=3Q(x)+(x+1)Q'(x)$로 놓으면

$10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=(x+1)^2Q_1(x)+2a(x+1)+b$를 얻는다.

다시 미분하면, $10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2=2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2Q_1'(x)+2a$ 이다.

위에서 얻은 아래의 세 식에 $x=-1$을 대입하자.

$$x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$$

$$10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$$

$$10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2=2(x+1)Q_1(x)+(x+1)^2Q_1'(x)+2a$$

그러면,

$$\begin{aligned}
c&=(-1)^{10}+(-1)^9+(-1)^8+\cdots+(-1)^2+(-1)+1=1\\
b&=10\cdot(-1)^9+9\cdot(-1)^8+8\cdot(-1)^7+\cdots+2\cdot(-1)\ \ +1\\
&=(-10+9)+(-8+7)+\cdots+(-2+1)=-5\\
2a&=10\cdot9\cdot(-1)^8+9\cdot8\cdot(-1)^7+8\cdot7\cdot(-1)^6+\cdots+4\cdot3\cdot(-1)^2+3\cdot2\cdot(-1)+2\\
&=(10\cdot9-9\cdot8)+(8\cdot7-7\cdot6)+(6\cdot5-5\cdot4)+(4\cdot3-3\cdot2)+2\\
&=9\cdot(10-8)+7\cdot(8-6)+5\cdot(6-4)+3\cdot(4-2)+2\\
&=2\cdot(9+7+5+3+1)=2\cdot25=50
\end{aligned}$$

을 얻는다. 이로부터 $a=25,\ b=-5,\ c=1$을 구할 수 있다.

[문제 2-1 (의학부)]는 [문제 2-1 (자연계열)]과 마찬가지로 다항식의 사칙연산을 잘 이해하고 있는가 묻고 있는 문제이다. 특히, 다항식의 나눗셈을 몫과 나머지로 표현할 수 있고 이를 미분과 연계하여 통합적으로 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있다. 난이도 조절을 위하여 다항식의 차수를 일반화하였다.

다항식 $x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+x+1$을 $(x+1)^3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면,

$\sum_{k=0}^{2n}x^k=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$로 쓸 수 있다.

양변을 미분하면, $\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=3(x+1)^2Q(x)+(x+1)^3Q'(x)+2a(x+1)+b$ 이다.

여기서, $Q_1(x)=3Q(x)+(x+1)Q'(x)$로 놓으면 $\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=(x+1)^2Q_1(x)+2a(x+1)+b$를 얻는다.

다시 미분하면, $\sum_{k=2}^{2n} k(k-1)x^{k-2} = 2(x+1)Q_1(x) + (x+1)^2 Q_1'(x) + 2a$ 이다.

위에서 얻은 아래의 세 식에 $x=-1$을 대입하자.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k$$
$$g(x) = \sum_{k=1}^{2n} kx^{k-1} = 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + \cdots + 2x + 1$$
$$h(x) = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)x^{k-2} = 10\cdot 9x^8 + 9\cdot 8x^7 + 8\cdot 7x^6 + \cdots + 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x + 2$$

그러면,

$$c = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k = (1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1 = 1$$
$$b = \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k-1} = \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{홀수}}} k(-1)^{k-1} + \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{짝수}}} k(-1)^{k-1} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)(-1)^{2j-2} + \sum_{j=1}^{n} 2j(-1)^{2j-1}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(2j-1) - \sum_{j=1}^{n} 2j = \sum_{j=1}^{n}(-1) = -n$$
$$2a = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)(-1)^{k-2} = \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{짝수}}} k(k-1)(-1)^{k-2} + \sum_{\substack{1\le k\le 2n \\ k:\text{홀수}}} k(k-1)(-1)^{k-2}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} 2j(2j-1)(-1)^{2j-2} + \sum_{j=1}^{n}(2j-1)(2j-2)(-1)^{2j-3} = \sum_{j=1}^{n} 2j(2j-1) - \sum_{j=1}^{n}(2j-1)(2j-2)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}[2j(2j-1)-(2j-1)(2j-2)] = \sum_{j=1}^{n}[2j-(2j-2)](2j-1) = \sum_{j=1}^{n} 2(2j-1)$$
$$= 4\sum_{j=}^{n} j - \sum_{j=}^{n} 2 = 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2$$

따라서 $a=n^2, b=-n, c=1$ 이다.

[문제 2-2]는 분수의 곱셈을 분해하는 부분분수법과 적분을 연계하여 문제를 출제하였다. 연산능력과 통합적 사고 능력이 있는지 평가하고 있는 문제이다.

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 을 이용하여 $\frac{1}{x^2(x+1)^2}$ 을 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x(x+1)}$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} - 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

따라서,

$$\begin{aligned}\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2} &= (10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10x+p)\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)\\ &=(10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10(x+1)+(p-10))\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)\\ &=\frac{10x+p}{x^2}-\frac{20x+2p}{x}+\frac{10(x+1)+(p-10)}{(x+1)^2}+\frac{20(x+1)+2(p-10)}{x+1}\\ &=\frac{10}{x}+\frac{p}{x^2}-20-\frac{2p}{x}+\frac{10}{x+1}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+20+\frac{2p-20}{x+1}\\ &=\frac{p}{x^2}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{2p-10}{x+1}\end{aligned}$$

즉, $\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=\frac{p}{x^2}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{2p-10}{x+1}$이다. 양변을 적분하면,

$$\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx=-\frac{p}{x}-\frac{p-10}{x+1}+(10-2p)\ln x+(2p-10)\ln(x+1)+C$$

이므로 $\int\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식으로 주어지려면, $10-2p=2p-10=0$이어야 한다. 즉, $p=5$이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1 (자연계열I)] 예시 답안

- $f(x)=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 하고 $g(x)=f'(x), h(x)=g'(x)$라 하자.
- $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=c,\ g(-1)=b,\ h(-1)=2a$를 얻는다.
- 한편,

  $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x^1+1$

  $g(x)=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$

  $h(x)=10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2$

- $$\begin{aligned}c&=f(-1)=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+1=1\\ b&=g(-1)=(-10+9)+(-8+7)+(-6+5)+(-4+3)+(-2+1)=-5\\ 2a&=h(-1)=(10\cdot9-9\cdot8)+(8\cdot7-7\cdot6)+(6\cdot5-5\cdot4)+(4\cdot3-3\cdot2)+2\\ &=18+14+10+6+2=50\end{aligned}$$
- 따라서 $a=25,\ b=-5,\ c=1$이다.

[별해]

다음의 조립 제법을 이용하여 $a=25,\ b=-5,\ c=1$을 얻는다.

-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
-1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	
-1	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	
		-1	2	-4	6	-9	12	-16	20		
	1	-2	4	-6	9	-12	16	-20	25		

채점 기준

- c를 계산하면 +2점.
- b를 계산하면 +3점
- a를 계산하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-1 (의학부)] 예시 답안

- $f(x)=(x+1)^3Q(x)+a(x+1)^2+b(x+1)+c$라 하고 $g(x)=f'(x), h(x)=g'(x)$라 하자.
- $x=-1$을 대입하여 $f(-1)=c,\ g(-1)=b,\ h(-1)=2a$를 얻는다.
- 한편,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{2n}x^k$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^{2n}kx^{k-1}=10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1$$

$$h(x)=\sum_{k=2}^{2n}k(k-1)x^{k-2}=10\cdot9x^8+9\cdot8x^7+8\cdot7x^6+\cdots+4\cdot3x^2+3\cdot2x+2$$

- $$c=f(-1)=(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+1=1$$

$$b=g(-1)=\sum_{k=1}^{2n}k(-1)^k=\sum_{j=1}^{n}(2j-1)-\sum_{j=1}^{n}2j=\sum_{j=1}^{n}(-1)=-n$$

$$2a=h(-1)=\sum_{k=2}^{2n}k(k-1)(-1)^{k-2}=\sum_{j=1}^{n}2j(2j-1)-\sum_{j=1}^{n}(2j-1)(2j-2)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[2j(2j-1)-(2j-1)(2j-2)]=2\sum_{j=1}^{n}(2j-1)=2\left(2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=2n^2$$

- 따라서 $a=n^2,\ b=-n,\ c=1$이다

채점 기준

- c를 계산하면 +2점.
- b를 계산하면 +3점
- a를 계산하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$
- $\dfrac{1}{x^2(x+1)^2}=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$
- $$\begin{aligned}\frac{10x+p}{x^2(x+1)^2}&=(10x+p)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)+(10(x+1)+(p-10))\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right)\\&=\frac{p}{x^2}+\frac{10-2p}{x}+\frac{p-10}{(x+1)^2}+\frac{2p-10}{x+1}\end{aligned}$$
- 따라서 $\int\dfrac{10x+p}{x^2(x+1)^2}dx$가 x에 대한 유리식으로 주어지려면 $10-2p=2p-10=0$이어야 한다. 즉, $p=5$이다.

채점 기준

- $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$를 계산하면 +2점.
- $\dfrac{1}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$를 계산하면 +3점.
- $\dfrac{10x+p}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{10-2p}{x}+\dfrac{p-10}{(x+1)^2}+\dfrac{2p-10}{x+1}$를 계산하면 +3점.
- $p=5$를 계산하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

아래 왼쪽 그림에서 원을 포함하는 평면 m과 이 평면의 x축을 공유하는 평면 n이 있고, 두 평면이 이루는 각이 α이다. 평면 m위의 원을 평면 n위에 정사영하면 타원이 되고, 이 타원의 넓이는 원의 넓이에 $\cos\alpha$를 곱한 것과 같다.

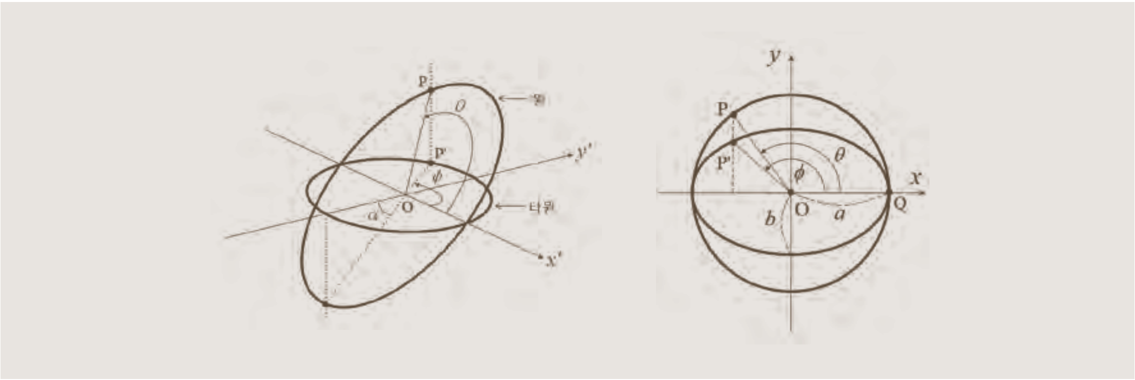
평면 m위에 반지름이 a이며, 중심이 원점인 원이 있을 때, 이 원 위의 점 P의 좌표 (x, y)는 다음과 같다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

여기서 θ는 원점과 점 P를 연결한 선이 x축과 이루는 양의 각도이다. 이 원을 평면 n위에 정사영하면 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2b$인 타원이 된다. 이때 $\cos\alpha = b/a$이다. 원 위의 점 P는 타원 위의 점 P'로 정사영되고, 타원을 포함하는 평면 n의 좌표계에서 P'의 좌표 (x', y')는 다음과 같다.

$$x' = a\cos\theta,\ y' = b\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

평면 m위의 좌표계와 평면 n위의 좌표계를 일치시켜 타원과 원의 관계를 나타내면 아래 오른쪽 그림과 같다.



〈추가 지문 – 의학부 문제에만 해당〉

함수 $f : X \to Y$, $y = f(x)$가 일대일 대응일 때, Y의 각 원소 y에 대하여 $y = f(x)$가 되는 X의 원소 x가 하나씩 존재한다. 그러므로 Y의 각 원소 y에 대하여 이러한 x를 대응시키면 Y에서 X로의 새로운 함수가 얻어진다. 이때 이 새로운 함수를 f의 역함수라 하고 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$f^{-1} : Y \to X,\quad x = f^{-1}(y)$$

[문제 3-1]

제시문에서 ϕ 는 선분 OP'이 x축과 이루는 양의 각도이다.

제시문에 근거하여 P'의 좌표 $(x', y') = (a\cos\theta, b\sin\theta)$를 $\tan\phi$로 나타내시오. 단, $0 \le \phi < \pi/2$이다. [10점]

[문제 3-2 (자연계열I)]

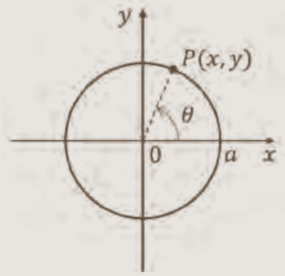
제시문에 주어진 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, $\phi = \pi/4$일 때, 제시문에 근거하여 부채꼴 OQP'의 면적을 구하시오. [20점]

[문제 3-2 (의학부)]

제시문에 주어진 타원에서 임의의 ϕ 에 대해 부채꼴 OQP'의 면적을 위 제시문에 근거하여 구하시오. 단, $0 \le \phi < \pi/2$ 이다. [20점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

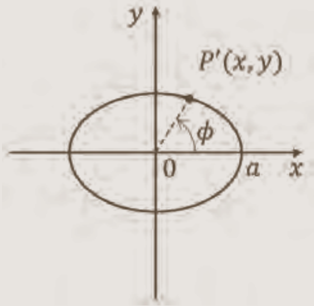
좌표평면 위에서 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 α인 원의 방정식은 $x^2 + y^2 = a^2$이다.



원점과 점 P를 연결한 선이 x축과 이루는 각을 θ라고 할 때, 이를 매개변수로 하여 원 위의 점 P의 좌표 (x, y)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$이고, 장축의 중간 지점과 단축의 중간 지점이 원점인 타원의 방정식은 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$이다.

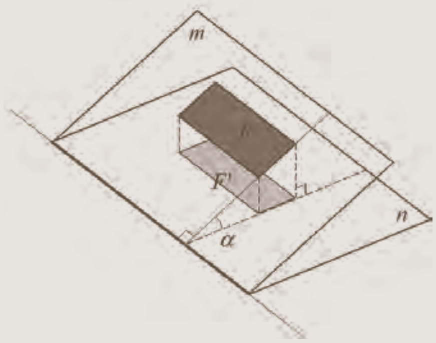


타원 위의 점 P'의 좌표 (x', y')는 어떤 각 θ를 매개변수로 하여 다음과 나타낼 수 있다.

$$x' = a\cos\theta,\ y' = b\sin\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

여기서 θ는 원점과 P'를 연결한 선이 x축과 이루는 각 ϕ와 같지 않다. θ와 ϕ 사이의 관계 그리고 원과 타원 사이의 관계는 다음에 설명하는 정사영의 원리를 이용하여 구할 수 있다.

일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 n위로의 정사영 전체로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 n으로의 정사영이라 한다.



그림에서 직사각형 F를 포함하는 평면 m과 직사각형 F'를 포함하는 평면 n이 이루는 예각의 크기를 α라고 하자. F'는 F의 정사영이고, 두 도형의 면적 크기는 다음과 같은 관계가 있다.

F'의 면적 = $\cos\alpha \times$ F의 면적

평면 m위에 있고, 평면 m과 n의 교선과 수직한 선분, 예를 들면 직사각형 F의 짧은 변 ℓ을 평면 n으로 정사영하면 선분 ℓ'가 된다고 할 때, 두 선불의 길이는 다음과 같은 관계가 있다.

ℓ'의 길이 = $\cos\alpha \times$ ℓ의 길이

평면 m위에 있는 선분 중 두 평면의 교선과 평행한 것을 평면 n으로 정사영하면 길이가 변하지 않는다.

문제에서 평면 m위에 두 평면 사이의 교선을 x축, 이에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표계가 있고, 원점을 중심으로 하고, 반지름이 α인 원이 있다. 이 원을 평면 n위로 정사영하면 앞서 설명한 선분의 정사영 정리에 따라 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2a\cos\alpha = 2b$인 타원이 된다. 이 타원의 면적은 도형의 정사영 정리에 따라 원의 면적에 $\cos\alpha$를 곱한 것과 같다. 원의 일부를 정사영하여도 이 면적의 비는 같다.

문제에서 원 위의 점 $P(x,y)$와 타원 위의 점 $P'(x'y')$사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$x' = x \text{ 그리고 } y' = y\cos\alpha$$

또한 $\tan\theta = y/x$이고, $\tan\phi = y'/x'$일 때 위의 관계를 이용하면, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\tan\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{y\cos\alpha}{x} = \cos\alpha\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\theta$$

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- $\tan\phi = \frac{y'}{x'} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta$ (1)
- $\tan\theta = \frac{a}{b}\tan\phi$
- $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
- $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}$ (2)
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}} = \pm\frac{\frac{a}{b}\tan\phi}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}$ (3)
- $0 \le \theta < \pi/2$일 때, $P' = (a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(\frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}, \frac{a\tan\phi}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\tan^2\phi}}\right)$ (4)

[문제 3-1] 별해

- $0 \le x < \pi/2$에 대해 $y = \tan x$의 역함수 $x = g(y)$ 또는 $x = \tan^{-1} y$를 정의하자.

- 식 (1)로부터,

$$\theta = g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \text{ 또는 } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \quad (5)$$

- $$\mathrm{P}' = (a\cos\theta, b\sin\theta) = \left(a\cos\left(g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right),\ b\sin\left(g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right)\right)$$

$$= \left(a\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right),\ b\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right)\right)\right) \quad (6)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2점.
- 식 (2)를 제시하면 +3점.
- 식 (3)을 제시하면 +3점.
- 식 (4)를 제시하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2점.
- 식 (5)를 제시하면 +4점.
- 식 (6)을 제시하면 +4점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2 (자연계열I)] 예시 답안

- $\phi = \pi/4$일 때, 원에서의 각도 θ를 구하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta,\ \tan(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan\theta,\ \theta = \pi/3 \quad (1)$$

- 반지름이 α인 원에서, 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$S = a^2\pi\frac{\theta}{2\pi} \quad (2)$$

- 이 부채꼴을 타원의 평면 위로 정사영하면, 정사영된 부채꼴의 넓이는 제시문에 근거하여 다음과 같이 구할 수 있다.

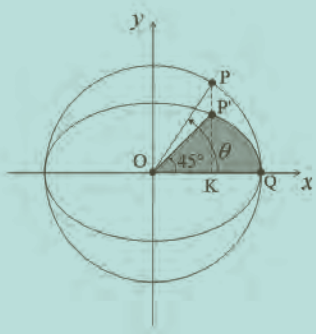
$$S' = S\cos\alpha = S\frac{b}{a} = a^2\pi\frac{\theta}{2\pi}\frac{b}{a} = \frac{ab}{2}\theta \quad (3)$$

- $a = \sqrt{3},\ b = 1,\ \theta = \pi/3$을 입력하면 다음과 같다.
- $$S' = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \quad (4)$$

[문제 3-2 (자연계열I)] 별해

- 아래 그림에서 P'는 직선의 식 $(y = x)$과 타원의 식 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$의 교점이다.

$$\mathrm{P}' = (x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$



- 삼각형 KOP'의 넓이는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$$

- 부채꼴 QKP'의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\,dx \quad (6)$$

- 식 (6)에서 $x/\sqrt{3} = \cos t$로 치환하면 다음과 같이 적분식을 정리할 수 있다.

$$\int_{\pi/3}^{0} -\sqrt{3}\sin^2 t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{\pi/3} 1-\cos 2t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{8} \quad (7)$$

- 부채꼴 QOP'의 넓이는 KOP'의 넓이와 QKP'의 넓이를 더한 것과 같다.

$$\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi \quad (8)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +5점.
- 식 (2)를 제시하면 +5점.
- 식 (3)을 제시하면 +5점
- 식 (2)를 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (5)를 제시하면 +5점.
- 식 (6)을 제시하면 +5점.
- 식 (7)을 제시하면 +5점
- 식 (8)을 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2 (의학부)] 예시 답안

- 제시문 (가)에 근거하여 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\tan\phi = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta,\ \ \tan\theta = \frac{a}{b}\tan\phi \quad (1)$$

- 제시문 (나)에 근거하여, $0 \le x < \pi/2$에서 $y = \tan x$의 역함수 $x = g(y)$ 또는 $x = \tan^{-1} y$를 정의하면, 위의 (1)로부터 임의의 ϕ, $0 \le \phi < \pi/2$에 대해 원에서의 각도 θ를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\theta = g\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \text{ 또는 } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\phi\right) \quad (2)$$

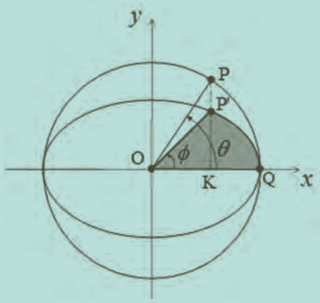
- 반지름이 α인 원에서, 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이는 다음과 같다.

$$S = \frac{1}{2}a^2\theta \quad (3)$$

- 이 부채꼴을 타원의 평면 위로 정사영하면, 정사영된 부채꼴의 넓이는 제시문 (가)에 근거하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S' = S\cos\alpha = S\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\frac{1}{2}a^2\theta = \frac{ab}{2}\theta = \frac{ab}{2}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\varphi\right) \quad (4)$$

[문제 3-2 (의학부)] 별해



- 아래 그림에서 P'는 직선의 식($y=x\tan\phi$)과 타원의 식 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$의 교점이다. P의 x좌표는 다음과 같다.

$$K=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{\tan\phi}{b^2}}} \quad (5)$$

- 삼각형 KOP'의 넓이는 $\frac{K^2\tan\phi}{2}$ 이다.
- 부채꼴 QKP'의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_K^Q b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx \quad (6)$$

- 여기서 $x/a=\cos t$로 치환하고, $0\le t<\pi/2$에 대해 $y=\cos x$의 역함수 $x=g(y)$ 또는 $x=\cos^{-1}y$를 정의하면, $t=g(x/a)$이다.

- $\cos^{-1}(K/a)=M$이라 하면, 식 (6)은 다음과 같다.

- $\int_K^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\int_M^0 -ab\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^M 1-\cos 2t\,dt=\frac{ab}{2}\left(M-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^M\right)$

$$=\frac{ab}{2}M-\frac{ab}{4}\sin 2M \quad (7)$$

- 부채꼴 QOP'의 넓이는 QKP'의 넓이와 KOP'의 넓이를 더한 것과 같다.

$$\frac{ab}{2}M-\frac{ab}{4}\sin 2M+\frac{K^2}{2} \quad (8)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +5.
- 식 (2)를 제시하면 +5.
- 식 (3)을 제시하면 +5.
- 식 (4)를 제시하면 +5.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 채점 기준

- 식 (5)를 제시하면 +5점.
- 식 (6)을 제시하면 +5점.
- 식 (7)을 제시하면 +5점
- 식 (8)을 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.