01_수학

학생들이 보다 많은 수학 논술 문항을 체험할 수 있도록 [문제 1], [문제 2], [문제 3]에 해당하는 유형의 예시 문제를 각각 1문항씩 출제하고 이에 대한 예시 답안과 채점 기준을 수록하였다.

문제 1

20점

민수가 다음과 같은 게임을 한다. 주사위가 아주 많이 들어있는 상자에서 임의로 주사위를 하나 고른 후, 그 주사위를 임의로 던진다. 주사위 중 75%는 홀수가 더 잘 나오도록 개조되어 있고, 25%는 짝수가 더 잘 나오도록 개조되어 있다. 홀수가 더 잘 나오는 주사위를 임의로 던지면, 홀수가 나올 확률은 0.75이고, 짝수가 나올 확률은 0.25이다. 또한, 짝수가 더 잘 나오는 주사위는, 임의로 던졌을 때 짝수가 나올 확률이 0.75이다. 민수는 주사위를 던져 홀수가 나오면 만원을 잃고, 짝수가 나오면 2만원을 상금으로 받는다. 민수는 게임을 하기 전에 주사위를 임의로 고른 다음, 그것을 한번 던져본 후에 같은 주사위로 게임을 할 지 결정할 수 있다. 민수가 주사위를 골라서 던졌을 때, 홀수가 나왔다고 하자. 그 주사위로 게임을 하기로 했을 경우, 민수가 받을 상금의 기댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

주사위를 골라 던져서 짝수인지 홀수인지 맞추면 상금을 받는 게임을 할 때 상금의 기댓값을 구하는 문제이다. 그러나, 주사위가 개조되어 있어 확률이 일정하지 않고, 주사위를 한번 던져본 후 결과를 보고 그 주사위로 게임을 할지 결정할 수 있다는 조건이 있고, 주사위를 골라서 던졌을 때 홀수가 나왔다는 정보를 알고 있는 경우 상금의 기댓값을 구해야 하는 문제이다.

확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라고 하고, 기호로

$$P(B \mid A)$$

와 같이 나타낸다. 조건부확률의 정의에서

$$P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

이므로 우변의 분모, 분자를 표본공간의 근원사건의 수 $n(S)$로 나누면

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

이다.(교학사 적분과 통계, Ⅲ 확률, pp. 117–118)

상금을 확률변수로 생각할 때, 가능한 값은 –1만원, 2만원이다. 각각의 값에 해당하는 확률을 구하기 위해 문제에 주어진 사건들과 그 사건들이 발생할 확률들을 구해보자. 주사위를 던져서 홀수가 나오는 사건을 A라고 하고, 짝수가 나오는 사건을 B라고 하자. 또한, 주사위를 하나 골랐을 때 홀수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LA라고 하고, 주사위를 하나 골랐을 때 짝수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LB라고 하자. 그러면, 문제로부터 다음의 확률값을 구할 수 있다.

$$P(LA)=0.75,\ P(LB)=0.25,\ P(A\mid LA)=0.75,\ P(B\mid LA)=0.25,$$
$$P(A\mid LB)=0.25,\ P(B\mid LB)=0.75$$

이제, 주사위를 처음 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_1 이라고 하고, 두 번째 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_2 라고 하자. 그러면, 상금이 –1만원, 2만원일 확률은 각각 $P(A_2\mid A_1)$, $1-P(A_2\mid A_1)$이고, 따라서 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))$$

이 된다.

$P(A_2\mid A_1)$은 조건부확률의 정의에 의해

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}$$

이고, 사건 A_1은 $A_1\cap LA$와 $A_1\cap LB$의 합집합이고,
이 두 사건은 서로 배반이므로 확률의 덧셈정리에 의해 $P(A_1)=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)$이다.
또한, 조건부확률의 정의를 이용하면 위 조건부확률의 분모는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)=P(A_1\mid LA)P(LA)+P(A_1\mid LB)P(LB)\\&=0.75\times0.75+0.25\times0.25=0.625\end{aligned}$$

마찬가지로, 분자는

$$\begin{aligned}P(A_2\cap A_1)&=P(A_2\cap A_1\mid LA)P(LA)+P(A_2\cap A_1\mid LB)P(LB)\\&=0.75^2\times0.75+0.25^2\times0.25=0.4375\end{aligned}$$

와 같이 계산할 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 조건부 확률은

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{0.4375}{0.625}=0.7$$

이고, 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))=-1\times0.7+2\times0.3=-0.1$$

이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시답안

- 주사위를 던져서 홀수가 나오는 사건을 A라고 하고, 짝수가 나오는 사건을 B라고 하자. 또한, 주사위를 하나 골랐을 때 홀수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LA라고 하고, 주사위를 하나 골랐을 때 짝수가 더 잘 나오는 주사위일 사건을 LB라고 하자. 주어진 문제에서 다음의 확률값을 알 수 있다.

$$P(LA)=0.75,\ P(LB)=0.25,\ P(A\mid LA)=0.75,\ P(B\mid LA)=0.25,$$
$$P(A\mid LB)=0.25,\ P(B\mid LB)=0.75$$

- 이제, 주사위를 처음 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_1이라고 하고, 두 번째 던졌을 때 홀수가 나오는 사건을 A_2라고 하자. 상금의 기댓값을 구하기 위해서는 먼저 $P(A_2\mid A_1)$을 구해야 한다. 그러면, 민수가 받을 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))$$

이 된다.

- 조건부확률의 정의에 의해

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}$$

이고, 분모는

$$P(A_1)=P(A_1\cap LA)+P(A_1\cap LB)=P(A_1\mid LA)P(LA)+P(A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75\times0.75+0.25\times0.25=0.625$$

와 같이 계산할 수 있고, 분자는

$$P(A_2\cap A_1)=P(A_2\cap A_1\mid LA)P(LA)+P(A_2\cap A_1\mid LB)P(LB)$$
$$=0.75^2\times0.75+0.25^2\times0.25=0.4375$$

와 같이 계산할 수 있다. 따라서, 구하고자 하는 조건부 확률은

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{0.4375}{0.625}=0.7$$

이다.

- 따라서 상금의 기댓값은

$$-1\times P(A_2\mid A_1)+2\times(1-P(A_2\mid A_1))=-1\times0.7+2\times0.3=-0.1$$

즉, 1000원을 잃는 것이다.

채점기준

- 문제에서 주어진 확률값을 정확한 식으로 표현하면 +3점
- 상금의 기댓값을 구하는 식을 바르게 제시하면 +5점
- 필요한 조건부 확률을 정확히 구하면 +10점
- 상금의 기댓값을 정확히 계산하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문(가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$를 점 $P'(x', y')$으로 하나씩 대응시키는 함수 $f:(x, y)\to(x', y')$에 대해

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$$

를 만족시키는 상수 a,b,c,d가 있을 때, f를 일차변환이라고 한다.

(나) 일차변환 $f:(x, y)\to(ax+by, cx+dy)$를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(다) 양수 x, y에 대하여 $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$와 $\log_{10}\frac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$이 성립한다.

(라) 양수 x, y에 대하여 $x<y \Leftrightarrow \log_{10} x < \log_{10} y$

[문제 2-1] 두 점 $P(-2, -1), Q(3, 1)$를 각각 두 점 $P'(2, -3), Q'(-1, 2)$로 옮기는 일차변환이 직선 $y=x+2$를 직선 $y=px+q$로 옮긴다고 하자. $p+q$를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 2-2] x축에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 B, 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환을 나타내는 행렬을 C, 원점을 중심으로 $45°$만큼 회전하는 일차변환을 나타내는 행렬을 D, 2×2 단위행렬을 E라 하자. 행렬 $A=2B+C+\sqrt{2}D-E$에 대하여 A^n이 나타내는 일차변환에 의해 점 $P(2,1)$이 옮겨진 점을 $P_n(x_n, y_n)$이라고 할 때, $x_n - y_n \le 10^{-3}\cdot 5^n$이 되는 자연수 n의 최소값을 구하시오.

(단, $\frac{-1}{2(2\log_{10}2-1)}=1.26$, $\frac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}=0.38$로 계산할 수 있다.) [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1]은 일차변환을 행렬을 통하여 잘 이해하고 있는지 평가하고 있는 문제이다.

문제의 조건을 만족하는 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

점 $\mathrm{P}(-2,-1)$이 f에 의해 점 $\mathrm{P}'(2,-3)$으로 옮겨지므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$이다.

한편, 점 $\mathrm{Q}(3,1)$이 점 $\mathrm{Q}'(-1,2)$로 옮겨지므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$이다. 이 두 식을 한꺼번에 쓰면, 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬을 양변에 곱하여 다음을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

직선 $y=x+2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 일차변환 f에 의해 옮겨진 점을 $\mathrm{P}'(x',y')$라 하면,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-4y \\ -x+5y \end{pmatrix}$$

점 $\mathrm{P}(x,y)$가 직선 $y=x+2$ 위의 점이므로 $x'=x-4y=x-4(x+2)=-3x-8$, $y'=-x+5y=-x+5(x+2)=4x+10$이다. 점 $\mathrm{P}'(x',y')$가 직선 $y=px+q$ 위에 있으므로 $y'=px'+q$이고 이 식에 $x'=-3x-8, y'=4x+10$을 각각 대입하여 $4x+10=p(-3x-8)+q$을 얻는다. 이것을 정리하여 $(4+3p)x+(10+8p-q)=0$을 얻는다. 이 식은 임의의 x에 대해서 성립하므로 다음의 연립방정식을 얻는다.

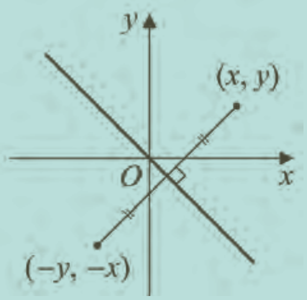
$$\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$$

이것을 풀면, $p=-\dfrac{4}{3}, q=-\dfrac{2}{3}$이다. 따라서, $p+q=-2$이다.

[문제 2-2]는 우선 여러 가지 일차변환을 알고 있는지 평가한다. 일차변환과 로그의 성질을 연계하여 문제를 해결해야 한다.

점 $\mathrm{P}(x,y)$를 x축에 대한 대칭변환으로 이동시킨 점은 $(x,-y)$이고 $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족한다. 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환으로 이동시킨 점은 다음 그림을 통하여 $(-y,-x)$임을 알 수 있고, $\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 만족한다.

$45°$만큼 회전하는 일차변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$이고 2×2단위행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.



따라서, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 이다.

$A=2B+C+\sqrt{2}D-E$ 를 계산하면, $A=\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\end{pmatrix}$ 를 얻는다.

$A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 이고 이것을 이용하여

$A^{2k}=2^{2k}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A^{2k+1}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ 을 얻는다. 따라서,

$\begin{pmatrix}x_{2k}\\y_{2k}\end{pmatrix}=A^{2k}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^{2k}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\2^{2k}\end{pmatrix}$ 이고

$\begin{pmatrix}x_{2k+1}\\y_{2k+1}\end{pmatrix}=A^{2k+1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\-2^{2k+1}\end{pmatrix}$ 이다.

n 이 짝수, 즉 $n=2k$ 일 때, $x_n-y_n=x_{2k}-y_{2k}=2^{2k+1}-2^{2k}=2^{2k}$ 이므로 $2^{2k}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k}$ 이다.

즉, $\left(\frac{4}{10}\right)^{2k}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2k}\le 10^{-3}$ 이다. 양변에 로그를 취하여 $2k(2\log_{10}2-1)\le -3$ 을 얻는다.

이를 정리하면 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}=3\times 1.26=3.78$ 이고 k 는 정수이므로 $n=2k\ge 8$ 이다.

n 이 홀수, 즉 $n=2k+1$ 일 때, $x_n-y_n=x_{2k+1}-y_{2k+1}=2^{2k+1}-(-2^{2k+1})=2^{2k+2}$ 이므로

$2^{2k+2}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k+1}$ 이다.

즉, $2\left(\frac{4}{10}\right)^{2k+1}=2\left(\frac{2}{5}\right)^{2k+1}\le 10^{-3}$ 이다. 양변에 로그를 취하여 $\log_{10}2+(2k+1)(2\log_{10}2-1)\le -3$ 을 얻는다.

이를 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}+\frac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}-\frac{1}{2}=3\times 1.26+0.38-0.5=3.66$ 이다. k 는 정수이므로 $n=2k+1\ge 9$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 최소의 자연수 n 은 8이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1] 예시답안

- 두 점 $P(-2,-1), Q(3,1)$을 각각 두 점 $P'(2,-3), Q'(-1,2)$로 옮기는 일차변환 f를 나타내는

  행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$는 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$을 만족한다.

- 따라서,

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- 직선 $y=x+2$ 위의 임의의 점 $P(x,y)$가 일차변환 f에 의해 옮겨진 점 $P'(x',y')$는

  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-4y \\ -x+5y \end{pmatrix}$을 만족하므로

- 두 식 $x'=x-4y=x-4(x+2)=-3x-8$과 $y'=-x+5y=-x+5(x+2)=4x+10$을 얻는다.

  점 $P'(x',y')$가 직선 $y=px+q$ 위에 있으므로 $y'=px'+q$이고 이 식에 $x'=-3x-8,\ y'=4x+10$을

  각각 대입하여 정리하면 $(4+3p)x+(10+8p-q)=0$을 얻는다. 이 식은 임의의 x에 대해서 성립하므로

  연립방정식 $\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$을 얻는다. 이 연립방정식을 풀면, $p=-\frac{4}{3}, q=-\frac{2}{3}$이다. 따라서, $p+q=-2$이다.

채점기준

- 두 점 P, Q을 각각 두 점 P', Q'로 옮기는 일차변환을 나타내는

  행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$을 만족함을 제시하면 +3점.

- 행렬렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 바르게 구하면 +2점.

- 연립방정식 $\begin{cases} 4+3p=0 \\ 10+8p-q=0 \end{cases}$ 을 찾으면 +3점.

- $p+q$를 바르게 구하면 +2점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 이므로

  $A=2B+C+\sqrt{2}D-E=\begin{pmatrix}2&-2\\0&-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$이다.

- 간단한 계산을 하여 $A^2=2^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$을 얻는다. 이것을 이용하여

  $A^{2k}=2^{2k}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A^{2k+1}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}$ 임을 알 수 있다. 따라서,

  $\begin{pmatrix}x_{2k}\\y_{2k}\end{pmatrix}=2^{2k}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\2^{2k}\end{pmatrix}$ 이고 $\begin{pmatrix}x_{2k+1}\\y_{2k+1}\end{pmatrix}=2^{2k+1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2k+1}\\-2^{2k+1}\end{pmatrix}$이다.

  $n=2k$이 짝수 일 때, $2^{2k}=2^{2k+1}-2^{2k}=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k}$이므로

  $\left(\frac{4}{10}\right)^{2k}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2k}\le 10^{-3}$이다. 양변에 로그를 취하고 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}=3\times 1.26=3.78$을 얻는다.

  k는 정수이므로 $n=2k\ge 8$이다.

- $n=2k+1$이 홀수 일 때, $2^{2k+2}=2^{2k+1}-(-2^{2k+1})=x_n-y_n\le 10^{-3}\cdot 5^n=10^{-3}\cdot 5^{2k+1}$이므로 $2\left(\frac{4}{10}\right)^{2k+1}=2\left(\frac{2}{5}\right)^{2k+1}\le 10^{-3}$ 이다.

  양변에 로그를 취하고 정리하여 $k\ge\frac{-3}{2(2\log_{10}2-1)}+\frac{-\log_{10}2}{2(2\log_{10}2-1)}-\frac{1}{2}=3\times 1.26+0.38-0.5=3.66$을 얻는다.

  k는 정수이므로 $n=2k+1\ge 9$이다.

- 따라서 문제의 조건을 만족하는 최소의 자연수 n은 8이다.

채점기준

- 행렬 A를 바르게 구하면 +2점.
- n이 홀수 또는 짝수임에 따라 A^n을 바르게 구하면 +3점.
- n이 홀수 또는 짝수임에 따라 x_n-y_n을 바르게 구하면 +3점.
- n의 최솟값을 바르게 구하면 +2점.

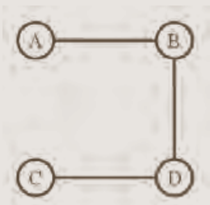
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬을 이용하여 나타낼 수 있다. 그래프에서 두 꼭짓점이 서로 연결되어 있지 않으면 0, 하나의 변으로 연결되어 있으면 1, 두 개의 변으로 연결되어 있으면 2와 같은 방법으로 나타낸다. 그래프를 행렬로 나타내면 그래프에 대한 여러 가지 문제를 행렬의 연산으로 풀 수 있다.

예를 들어 아래 왼쪽의 그래프를 아래의 행렬 M으로 나타낼 수 있다.

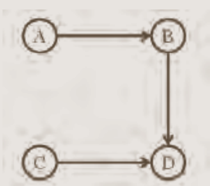


$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$$

그래프를 나타내는 행렬 M에 대하여 이를 두 번 곱한 M^2이 위 오른쪽의 행렬과 같을 때, 0, 1, 2가 의미하는 바는 다음과 같다.

- 2열의 0 : A에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 없다.
- 2열의 1 : C에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 한 가지, C → D → B가 있다.
- 2열의 2 : B에서 B로 두 개의 변을 지나서 가는 경로는 두 가지, B → A → B와 B → D → B가 있다.

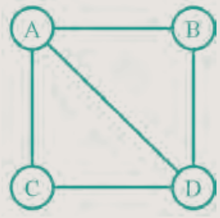
그래프에서 각 변이 방향성이 있어서, 아래 왼쪽의 그래프에서와 같이 한 방향으로만 갈 수 있을 때, 이를 아래의 행렬 N으로 나타낼 수 있다.



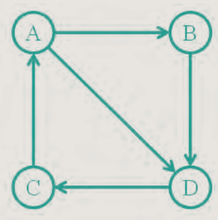
$$\mathrm{N}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \mathrm{N}^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

위 그래프를 나타내는 행렬 N에 대하여, 위 오른쪽의 N^2행렬을 구하였는데, 1행 4열의 항만이 1이고 나머지는 모두 0이다. 즉, A → D로 가는 경로만이 두 개의 변을 지나서 갈 수 있다는 것이다. A → B 또는 A → C는 두 개의 변을 지나서 가는 것이 불가능하다.

[문제 3-1] 다음과 같은 그래프가 있을 때 A에서 C로 5개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 P라고 할 때 $P^4 - 5P^2 - 4P = O$이 성립한다. [10점]

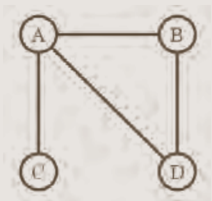


[문제 3-2] 다음과 같은 방향성 있는 변을 가지는 그래프가 있을 때 A에서 C로 9개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수를 행렬을 이용하여 논리적으로 구하시오. 단, 아래 그래프를 나타내는 행렬을 Q라고 할 때 $Q^4 - Q - E = O$이고, E는 단위행렬, O는 영행렬을 나타낸다. [20점]

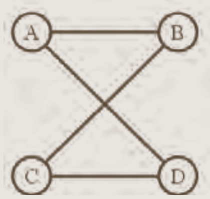


1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

주어진 그래프를 행렬을 이용하여 나타내는 방법을 이해하여야 한다. 행렬의 1, 2, 3, 4행과, 1, 2, 3, 4열이 각각 꼭짓점 A, B, C, D를 나타낸다. A에서 B로 가는 변이 하나 있으면 1행 2열이 1이 된다. 방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프에서 A와 B 사이에 변이 있으면 1행 2열과 2행 1열이 모두 1이 된다. 아래에 몇 가지 예가 있다.



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



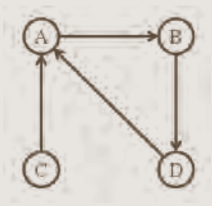
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬에서 모든 항의 합은 그래프 변의 수의 2배가 된다. 위 두 그래프 모두 4개의 방향성 없는 변으로 이루어져 있고, 이를 나타내는 행렬의 모든 항의 합은 8이 된다.

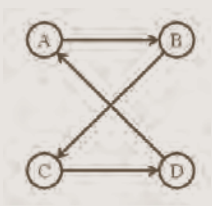
위의 행렬에서 1행 1열, 2행 2열과 같은 대각선 상의 항들이 0인 이유는 각 꼭짓점에서 다시 그 꼭짓점으로 변을 하나만 지나서 갈 수 있는 방법이 없기 때문이다. 이 행렬을 제곱하여 얻은 행렬은 꼭지점 사이에 변을 두 개 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 나타낸다. 아래에 $\mathbf{S}$와 $\mathbf{T}$를 제곱한 행렬을 나타내었다.

$$S^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad T^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬 $\mathbf{S}^2$ 의 1행 1열을 보면 꼭짓점 A에서 다시 A로 두 개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로가 3개 있음을 알 수 있다. 그래프를 확인해 보면 A → B → A, A → C → A, A → D → A의 경로를 찾을 수 있다. 그래프의 기본 행렬을 제곱한 행렬의 특징은 대각선 상의 항들이 모두 1 또는 1보다 크다는 것이다. 그래프의 기본 행렬을 n제곱한 행렬은 두 꼭짓점 사이에 n개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 알려준다. 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프를 행렬로 나타낼 때 변의 시작 꼭짓점을 나타내는 행과 도착 꼭짓점을 나타내는 열에 위치한 항만 1이 된다. 다음의 예를 보자.



$$U=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$



$$V=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

위 그래프에서 A와 B사이에 있는 변은 A에서 B로 향하는 방향성이 있다. B에서 A로 갈 수는 없다. 따라서 위 그래프들의 행렬 $\mathbf{U}$와 $\mathbf{V}$에서 A를 시작 꼭짓점으로 하는 1행과 B를 도착 꼭짓점으로 하는 2열에 위치한 항은 1이 되고, B를 시작 꼭짓점으로 하는 2행과 A를 도착 꼭짓점으로 하는 1열에 위치한 항은 0이 된다. 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬에서 변의 수와 행렬의 모든 항의 합은 같다. 즉 위에서 그래프에는 4개의 변이 있고, 각 행렬의 모든 항의 합은 4이다.

이 행렬을 제곱하여 얻은 행렬은 앞의 $\mathbf{S}$와 $\mathbf{T}$ 행렬에서와 같이 꼭짓점 사이에 변을 두 개 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 나타낸다. 이 방향성 있는 변으로 이루어진 그래프의 기본 행렬을 n제곱한 행렬은 두 꼭짓점 사이에 n개의 변을 지나서 갈 수 있는 경로의 수를 알려준다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- 방향성이 없는 변으로 이루어진 그래프가 주어졌다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 이 문제에서 구하고자 하는 것은 A에서 C로 5개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수이다. 따라서 행렬 P^5의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다. 행렬 P에 대하여 아래와 같은 행렬 방정식이 문제에 주어져 있다.

$$P^4 - 5P^2 - 4P = 0$$

- 이를 이용하여 행렬 P^5를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P^5 &= PP^4 = P(5P^2 + 4P) = 5P^3 + 4P^2 \\ &= 5\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 32 & 29 & 29 & 33 \\ 29 & 18 & 18 & 29 \\ 29 & 18 & 18 & 29 \\ 33 & 29 & 29 & 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 구하고자 하는 답안은 행렬 P^5의 1행 3열에 있는 29이다.

채점기준

- 행렬 P를 바르게 제시하면 +3
- 행렬 P^5의 1행 3열의 항의 값을 구하여야 한다는 것을 제시하면 +2
- 행렬 P^5를 바르게 제시하면 +3
- 답안을 바르게 제시하면 +2

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2] 예시 답안

- 방향성이 있는 변으로 이루어진 그래프가 주어졌다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

- 이 문제에서 구하고자 하는 것은 A에서 C로 9개의 변을 지나서 갈 수 있는 경우의 수이다. 따라서 행렬 Q^9의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다. 행렬 Q에 대하여 아래와 같은 행렬 방정식이 문제에 주어져 있다.

$$Q^4-Q-E=O$$

- 이를 이용하여 행렬 Q^9를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}Q^9&=QQ^4Q^4=Q(Q+E)(Q+E)=Q^3+2Q^2+Q\\&=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\&+\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&3\\1&0&2&1\\1&2&1&3\\2&1&1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- 구하고자 하는 답안은 행렬 Q^9의 1행 3열에 있는 3이다.

채점기준

- 행렬 Q를 바르게 제시하면 +6
- 행렬 Q^9의 1행 3렬의 항의 값을 구하여야 한다는 것을 제시하면 +4
- 행렬 Q^9를 바르게 제시하면 +6
- 답안을 바르게 제시하면 +4

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

02_물리

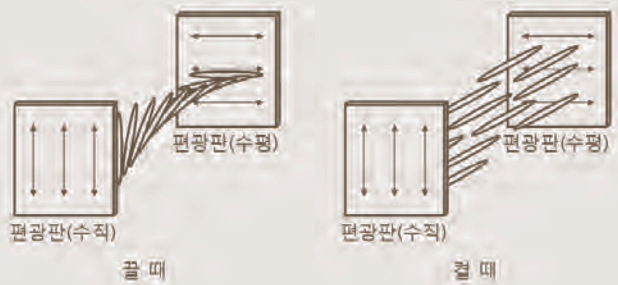
문제 4

다음 제시문(가)~(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 물체가 아래 그림과 같이 회전축을 중심으로 회전 운동 할 때, 회전 운동을 발생하게 만드는 원인을 돌림힘이라고 한다. 돌림힘 τ는 작용하는 힘의 크기 F와 회전축에서 힘이 작용하는 지점까지의 거리 L에 비례하며, 힘과 막대 사이의 각 θ와 관련된다. 돌림힘을 식으로 표시하면 $\tau = FL\sin\theta$이다.

(나) 전기장의 진동 방향, 즉 편광 방향에 따라 빛을 선택적으로 통과시킬 수 있는 판을 편광판이라고 한다. 편광이 되지 않은 빛을 편광판을 지나게 하면 한 방향으로 편광된 빛을 얻을 수 있다. 그 방향을 편광축이라고 한다. 임의의 방향으로 편광된 빛을 편광판을 지나게 하면 편광판을 통과한 빛의 편광은 편광판의 편광축 방향으로 변하고 빛의 세기가 줄어든다. 빛의 편광 방향과 편광축 사이의 각도가 θ라면 편광판을 통과한 빛의 세기 I는 $I = I_0\cos^2\theta$ 이며, 이것을 말루스 법칙이라고 한다. 여기서 I_0는 편광판을 통과하기 전 빛의 세기이다.

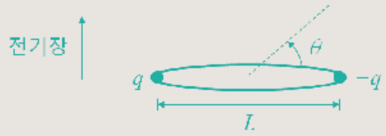
(다) 두 장의 직교하는 편광판 사이에 갇힌 액정 분자는 어떤 원리로 액정 셀을 통과하는 빛의 흐름을 조절할 수 있는 것일까? 액정 분자를 가두는 두 편광판의 안쪽에 특수한 처리를 하면 액정 분자는 다음 좌측 그림과 같이 나선형으로 꼬이면서 누워있는 상태가 된다. 이렇게 꼬여 있는 액정 분자는 첫 번째 편광판을 통과한 빛의 편광 상태를 꼬여 있는 액정 분자를 따라 돌게 하면서 두 번째 편광판을 빠져 나오게 한다. 그렇지만 만약 액정 셀에 전압을 가해서 액정 분자를 다음 우측 그림과 같이 편광판에 대해 모두 서 있게 하면 빛의 편광 상태가 돌지 않으므로 빛이 거의 통과하지 못하게 된다. 많은 액정 분자는 긴 방향의 한쪽에 (+)전하를, 다른 한쪽에는 (−)전하를 띠고 있는데, 이런 분자에 전기장을 가하면 분자를 쉽게 돌릴 수 있다.



[문제 4-1] 그림과 같이 양 끝에 $\pm q$의 전하를 띠고 길이가 L인 액정 분자가 수평 방향으로 놓여 있다.

만일 이 액정 분자를 θ만큼 회전시켜 놓으면, 액정을 초기 위치로 되돌리려는 돌림힘이 회전의 반대 방향으로 $\tau = \tau_0 \sin 2\theta$의 크기로 발생한다고 하자. $\theta = \frac{\pi}{2}$ 방향으로 균일한 전기장을 가하여 액정 분자를 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시켜 놓으려 할 때 필요한 전기장의 세기를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

단, 액정은 중심을 회전축으로 회전한다. [10점]



[문제 4-2] 편광축의 각도 θ가 각각 $0, \frac{\pi}{2N}, \frac{2\pi}{2N}, \frac{3\pi}{2N}, \ldots, \frac{(N-1)\pi}{2N}, \frac{\pi}{2}$인 편광판 $N+1$개가 차례로 놓여 있다.

편광 방향이 $\theta = 0$고 세기가 I_0인 빛이 편광축의 각도가 0인 편광판에 입사하여 $\frac{\pi}{2}$인 편광판까지 모두 통과한 후 빛의 세기를 I_N이라고 할 때, $\lim_{N\to\infty} I_N$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [20점]

[제시문 출전]

제시문 (가) : 물리I, 교학사, 김영민 외, pp.310–311
제시문 (나) : 물리II, 교학사, 김영민 외, p.255
제시문 (다) : 물리I, 교학사, 김영민 외, pp.157–158

1. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1 풀이]

[문제 4-1]은 전기장을 이용한 액정의 회전을 돌림힘을 이용하여 설명하는 문제로서 다음과 같은 논리 전개 과정을 통해 답안을 작성할 수 있다.

- 액정 분자가 회전하면 회전의 반대 방향으로 돌림힘이 발생하므로 전기장을 통해 가해지는 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 이상이어야 한다.
- 전기장이 가해지면 액정의 양 끝에 있는 두 전하가 서로 반대 방향으로 힘을 받기 때문에 액정의 중심을 회전축으로 하여 돌림힘이 발생한다.
- 액정 분자가 θ만큼 회전하였을 때, $+q$전하와 전기장 E에 의한 돌림힘 τ는 제시문 (가)에 의해 다음과 같다.

$$\tau = \frac{qEL}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{qEL}{2}\cos\theta$$

- $-q$ 전하에 의한 돌림힘도 같은 방향, 같은 크기이므로 전기장에 의한 전체 돌림힘은 다음과 같다

$$\tau = qEL\cos\theta$$

- 전기장에 의한 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 $\tau = \tau_0 \sin 2\theta$ 이상이라는 조건에서 다음과 같이 필요한 전기장의 세기를 구할 수 있다.

$$qEL\cos\theta \geq \tau_0 \sin 2\theta$$
$$E \geq \frac{2\tau_0 \sin\theta}{qL}$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면, 필요한 전기장의 세기는 $E = \frac{2\tau_0}{qL}$ 이다.

채점기준

- 전기장에 의한 돌림힘이 되돌아가려는 돌림힘 이상이어야 함을 지적하면 +2점.
- 분자가 θ 만큼 회전하였을 때 전기장에 의한 돌림힘을 바르게 구하면 +5점.
- 전기장의 세기를 바르게 구하면 +3점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2 풀이]

[문제 4-2]는 편광축이 점진적으로 회전하는 다중 편광판을 빛이 통과했을 때 나타나는 세기 변화를 말루스의 법칙과 극한값을 통해 설명하는 문제로서 다음과 같은 논리 전개 과정을 통해 답안을 작성할 수 있다.

- 첫 편광판 이후 N개의 편광판에서 편광축은 $\frac{\pi}{2N}$씩 회전한다.
- 각 편광판을 통과할 때마다 말루스의 법칙에 의해 빛의 세기에 $\cos^2\frac{\pi}{2N}$ 씩 곱해지므로 $I = I_0\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 이다.
- $N \to \infty$ 에서의 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 극한값을 구해야 하는데, 직접 구하기는 난해하므로 로그를 취한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{N\to\infty}\log\left[\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}\right] = \lim_{N\to\infty}2N\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right]}{\frac{1}{2N}}$$

- 위 식의 마지막 항은 N → ∞ 에서 0/0 꼴이므로 분모와 분자를 모두 N으로 미분하면 다음과 같다.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log\left[\cos\frac{\pi}{2N}\right]}{\frac{1}{2N}} = \lim_{N\to\infty}\frac{\frac{-\sin\frac{\pi}{2N}}{\cos\frac{\pi}{2N}}\cdot\frac{-\pi}{2N^2}}{\frac{-1}{2N^2}} = \lim_{N\to\infty}\pi\tan\frac{\pi}{2N} = 0$$

- $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$의 로그를 취한 극한값이 0이므로 $N \to \infty$에서 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$의 극한값은 1이다.

- 따라서 무한히 많은 편광판을 통과할 경우 $I = I_0$가 되어 빛의 세기가 줄지 않음을 알 수 있다.

채점기준

- N개의 편광판에서 편광축이 $\frac{\pi}{2N}$씩 회전함을 지적하면 +2점.
- 빛이 각 편광판을 통과할 때마다 일정한 비율로 세기가 줄어듦을 지적하면 +3점
- 말루스의 법칙을 적용하여 $I = I_0\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$ 를 바르게 구하면 +5점.
- 로그를 취한 후 정리하는 방식을 통해 극한값을 구할 수 있음을 지적하면 +5점.
- 극한값 $I = I_0$를 바르게 구하면 +5점.
- 4번 항목에서 로그를 취하지 않고 다른 독창적인 방식으로 극한값을 바르게 구하면 4–5번 항목에서 +10점 부여함.

※ 타당한 근거 없이 직관적으로 $\cos^{2N}\frac{\pi}{2N}$의 극한값을 1로 설정하여 답을 쓴 경우 4번 항목의 점수는 0점임.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

03_생명과학

문제 4

다음 제시문(가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) mRNA의 유전 정보는 단백질 합성시 리보솜에서 3개의 염기들이 하나의 유전 암호로 인식되어 각각의 아미노산으로 해독된다. 여기서 각 아미노산을 지정하는 mRNA의 3개의 염기 단위를 코돈이라고 한다. 4종류의 염기들의 조합에 의해 만들어질 수 있는 64개의 유전 암호 가운데 61개는 20종류의 아미노산을 암호화하는 코돈이며, 나머지 3개는 어떤 아미노산도 암호화하지 않는데 이를 종결 코돈이라고 한다.

(나) 진핵생물은 원핵생물과 달리 전사에 의해 합성되는 mRNA를 바로 단백질 합성에 이용할 수 없다. 합성된 mRNA는 단백질의 아미노산 서열에 해당되는 엑손 외에 인트론이라고 하는 염기 서열을 더 갖고 있다. 그러므로 전사 후 mRNA에서 인트론을 제거하고, 엑손들을 연결하여 성숙된 mRNA를 만드는 가공 과정이 필요하다.

(다) 분열하는 세포는 크기가 작은 딸세포를 만들고 딸세포는 성장 과정을 거쳐 다시 분열하는 과정을 반복하는데, 이를 세포 주기라고 한다. 세포 주기는 간기와 분열기로 구분되며, 세포 주기의 약 90%는 간기로 이루어진다. 간기에는 미토콘드리아나 리보솜 같은 세포 소기관의 수가 증가하고 DNA의 복제가 일어난다. 분열기에는 핵분열과 세포질 분열이 일어나며, 응축된 염색체를 관찰할 수 있다. 핵분열 과정은 염색체의 모양과 행동에 따라 전기, 중기, 후기, 말기로 구분된다. 간기에는 핵막과 인이 뚜렷하고 핵 속의 염색체가 실 모양으로 풀어져서 존재한다. 전기에는 핵막과 인이 사라지고 염색체가 응축되어 나타난다. 이때 염색체는 두 가닥의 염색 분체로 이루어져 있다. 세포의 양극에서는 염색체의 이동에 필요한 방추사가 나타나기 시작하고 방추사는 염색체의 동원체에 부착된다. 중기에는 염색체가 세포의 중앙으로 이동하여 배열된다. 후기에는 염색 분체가 분리되어 양극으로 이동한다 말기에는 염색체가 풀어지고 핵막과 인이 다시 나타나며 세포질 분열이 일어난다.

(라) 정상 세포를 배양하면 일정한 수만큼 분열한 후 더 이상 분열하지 않는다. 그러나 암세포는 세포 주기를 지속적으로 반복하기 때문에 영양분이 계속 공급되는 상황에서는 무한정 분열할 수 있다. 이러한 암세포의 특성은 세포 주기를 조절하는 신호를 무시하기 때문인 것으로 알려져 있는데, 많은 암세포에서 세포 주기를 조절하는 유전자의 이상이 발견된다.

[문제 4-1] **다음은 어떤 단백질을 암호화하는 진핵생물 유전자의 DNA 염기서열 일부와 이로부터 만들어진 아미노산의 서열을 나타낸 것이다. 돌연변이가 발생하여 DNA 염기서열 중 밑줄 친 A(<u>A</u>)가 C로 바뀔 경우 이 DNA 서열로부터 만들어지는 아미노산의 서열을 예측하고, 그 이유를 제시문(가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 아래의 유전암호표를 참고하시오. [10점]**

DNA 염기서열 : 5' ATGGGCTACGTAACCTAGG<u>A</u>CAAGTTCGGGTAG 3'

아미노산 서열 : 메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신

<table>
<tr><th rowspan="2">첫 번째 위치</th><th colspan="4">두 번째 위치</th><th rowspan="2">세 번째 위치</th></tr>
<tr><th>U</th><th>C</th><th>A</th><th>G</th></tr>
<tr><td rowspan="4">U</td><td rowspan="2">페닐알라닌</td><td rowspan="4">세린</td><td rowspan="2">타이로신</td><td rowspan="2">시스테인</td><td>U</td></tr>
<tr><td>C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">류신</td><td>종결</td><td>종결</td><td>A</td></tr>
<tr><td>종결</td><td>트립토판</td><td>G</td></tr>
<tr><td rowspan="4">C</td><td rowspan="4">류신</td><td rowspan="4">프롤린</td><td rowspan="2">히스티딘</td><td rowspan="4">아르기닌</td><td>U</td></tr>
<tr><td>C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">글루타민</td><td>A</td></tr>
<tr><td>G</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A</td><td rowspan="3">이소류신</td><td rowspan="4">트레오닌</td><td rowspan="2">아스파라진</td><td rowspan="2">세린</td><td>U</td></tr>
<tr><td>C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">라이신</td><td rowspan="2">아르기닌</td><td>A</td></tr>
<tr><td>* 메싸이오닌</td><td>G</td></tr>
<tr><td rowspan="4">G</td><td rowspan="4">발린</td><td rowspan="4">알라닌</td><td rowspan="2">아스파트산</td><td rowspan="4">글라이신</td><td>U</td></tr>
<tr><td>C</td></tr>
<tr><td rowspan="2">글루탐산</td><td>A</td></tr>
<tr><td>G</td></tr>
</table>

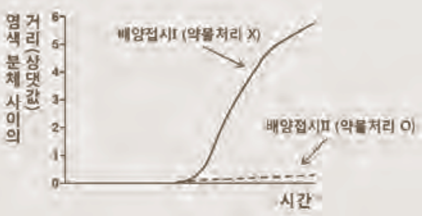
* : 개시 코돈이기도 함. 종결 : 종결 코돈

[문제 4-2] 약물 X는 새롭게 개발된 항암제이다. 이 약물의 작용 원리를 알아보기 위하여 아래와 같은 두 가지 실험을 수행하였다.

(실험 1) 배양접시 I에서 배양한 암세포를 고정한 후, 현미경 시야에 보이는 세포들을 관찰하여 세포 주기의 간기와 분열기에 해당하는 세포 수를 조사하였다. 다른 배양접시 II에는 약물 X를 처리하고 12시간 후에 암세포를 고정하여 같은 방식으로 세포 수를 조사하여 그 결과를 아래 표 정리하였다. 단, 약물 처리 전에 배양접시I과 II의 암세포의 밀도 등 실험 조건은 동일하다.

구분	배양접시 I	배양접시 II
간기	150	60
분열기	30	50

(실험 2) 약물 X를 처리했을 때(실험 1의 배양접시 II)와 처리하지 않았을 때(실험 1의 배양접시 I), 암세포의 분열 과정에서 세포 주기에 따른 특정 염색 분체 사이의 거리 변화를 관찰하였더니 아래 그래프와 같았다.



약물 X의 항암 작용 원리를(실험 1), (실험 2)의 결과와 제시문(다), (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오.[20점]

1. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문 (가)]

- **출전** : 생명과학II, 상상아카데미, 이길재, p.123
- **배경 지식**

유전 암호 : DNA의 유전 정보는 아데닌(A), 타이민(T), 구아닌(G), 사이토신(C)의 4종류 염기들이 만들어 내는 염기 서열로 존재한다. DNA에 저장되어 있는 유전정보는 RNA 중합 효소에 의해 mRNA 서열로 전사된다. 이때 mRNA의 염기 서열 정보가 단백질의 아미노산 서열 정보로 번역되기 위해서는 유전 암호가 필요하다. mRNA의 유전 정보는 단백질 합성 시 리보솜에서 3개의 염기들이 하나의 유전 암호로 인식되어 각각의 아미노산으로 해독된다. 여기서 각 아미노산을 지정하는 mRNA의 3개의 염기 단위를 코돈이라고 한다. 4종류의 염기들의 조합에 의해 만들어질 수 있는 64개의 유전 암호 가운데 61개는 20종류의 아미노산을 암호화하는 코돈이고 UGA, UAG, UAA의 3개는 어떤 아미노산도 암호화하지 않는 종결 코돈이다. 단백질 번역 과정에서 리보솜이 종결 코돈을 만나면 단백질 합성을 멈춘다.

[제시문 (나)]

- **출전** : 생명과학II, 상상아카데미, 이길재, p.131
- **배경 지식**

mRNA 가공 과정 : 일반적으로 진핵 생물은 원핵 생물보다 매우 복잡한 세포 구조와 유전체 구성을 갖고 있어 유전자 발현 과정도 원핵 생물 보다 훨씬 다양하고 복잡한 방법으로 조절된다. 주로 mRNA가 합성되는 전사 단계에서 유전자 발현이 조절되는 원핵 세포와 달리 진핵 세포는 전사 단계뿐만 아니라 RNA 가공 및 수송 과정, 번역, 단백질 변형 과정 등 여러 단계에서 조절이 이루어진다. 제시문에서 설명하고 있는 바와 같이 진핵 생물은 RNA 중합효소에 의해 합성되는 mRNA가 가공 과정을 거쳐 성숙된 mRNA로 만들어져야 번역에 이용될 수 있다. 처음 합성된 mRNA 염기 서열은 엑손 부분과 인트론 부분으로 나누어진다. 엑손은 진핵 생물의 유전자 가운데 최종 단백질 산물을 만들어 내는 부분이며, 인트론은 유전 정보를 가지고 있지 않아서 단백질을 만들지 못하는 엑손과 엑손 사이에 존재하는 영역이다. 따라서 전사가 일어난 후에 유전 정보를 가지고 있지 않은 인트론 부위를 잘라 내고 인트론 주변에 위치한 엑손들을 다시 연결하는 가공 과정을 거쳐 성숙된 mRNA가 만들어진다.

[제시문 (다)]

- **출전** : 생명과학I, 천재교육, 이준규, pp.48 ~53
- **배경 지식**

세포 주기 : 세포 주기 중 간기는 G_1기, S기, G_2기로 구분된다. G_1기는 DNA를 복제하기 전 생장기로, 복제를 준비하는 시기이다. S기에는 DNA의 복제가 일어나는데, 복제된 DNA는 서로 부착되어 있다가 분열기가 되면 응축된다. G_2기는 세포가 분열하기 전 분열을 준비하는 시기로, 세포 분열에 필요한 방추사의 재료가 되는 단백질과 세포막을 구성하는 물질이 합성된다. 세포 분열의 준비를 마친 세포는 분열기로 들어간다. 분열기(M기)는 핵분열과 세포질 분열로 이루어지며, 응축된 염색체를 관찰할 수 있다. S기에 DNA가 복제된 결과 염색체는 두 가닥의 염색 분체로 이루어지며, 분열기에 염색 분체는 각각 딸세포로 나누어져 들어간다. 분열기를 지나면 2개의 딸세포가 형성되며, 딸세포는 간기를 거친 후 다시 분열기에 접어들어 세포 주기를 반복한다. 우리 몸을 구성하는 세포들 중 분열하지 않는 세포들에서는 세포 주기가 진행되지 않지만, 분열하는 체세포는 세포 주기를 따라 간기와 분열기를 반복한다.

[제시문 (라)]

- **출전** : 생명과학I, 천재교육, 이준규, p.51
- **배경 지식**

세포 주기와 암세포 : 우리 몸을 구성하는 세포의 세포 주기 조절에 이상이 생기면 세포가 비정상적으로 분열을 반복하는 암세포로 변화할 수 있다. 암세포는 정상 세포와 비교하여 다음과 같은 특징을 가진다.

– 세포 분열을 촉진하는 물질이 없어도 계속해서 분열하여 여러 층으로 쌓인다.

– 세포들끼리 접촉해도 분열이 억제되지 않는다.

– 구조화되지 않고 여러 층을 형성한다.

– 제 기능을 잃고 주위의 다른 조직으로 침범하는 '전이'가 일어난다.

2. 문항별 분석 및 풀이 과정

[문제 4–1]

[문제 4–1]에서는 제시문 (가)에 설명된 코돈의 개념과 제시문 (나)에 설명된 mRNA 가공 과정을 충분히 이해했는지를 평가하고자 하였다. 제시된 유전암호표를 활용하여 문제에 주어진 가상의 DNA 서열을 번역해 내는 과정에서 DNA 상의 일부 서열은 아미노산에 대한 정보를 암호화하지 않는 인트론임을 알아낼 수 있는 응용 능력을 요구하는 문제이다. 문제에 주어진 DNA서열을 앞에서부터 3개씩 나누어 보면 다음과 같다.

5'–ATG–GGC–TAC–GTA–ACC–TAG–GAC–AAG–TTC–GGG–TAG–3'

위와 같이 염기들을 정확히 3개씩 나눌 수 있는데, 이를 주어진 암호표를 이용해 번역해 보면 다음과 같은 아미노산 서열을 얻게 된다.

[메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–종결–아스파트산–라이신–페닐알라닌–글라이신–종결]

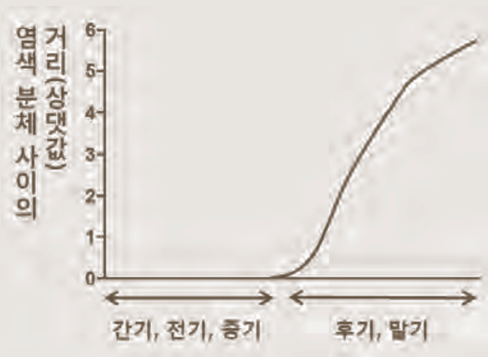
위와 같이 번역이 되었다면 종결 코돈에서 번역이 멈추어 [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌]와 같은 아미노산이 만들어져야 하는데 문제에서 제시된 아미노산 서열은 위 서열 중 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분이 생략된 채 마지막에 글라이신이 번역되었다. 이는 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분에 해당하는 DNA가 실제로는 번역되는 정보가 아님을 제시하는 것이다. 즉, 이 부분에 해당하는 염기서열 [TAG–GAC–AAG–TTC]은 인트론이라고 유추해 볼 수 있다.

문제에서 밑줄 친 A는 인트론에 해당하는 부위이므로 이 염기가 다른 염기로 치환된다고 하더라도 최종적으로 만들어지는 아미노산 서열에는 영향을 미치지 않는다. 암호표를 이용하여 염기 서열을 번역할 수 있고, 또 인트론에 해당하는 부위가 어디인지 정확하게 알아내는 것이 이 문제의 핵심이다.

[문제 4–2]

[문제 4–2]에서는 제시문 (다)에 설명된 세포 주기에 대한 설명을 바르게 이해하고 있는지 평가하고자 하였다. 제시문 이외에 추가로 주어진 두 가지 실험 결과를 분석하여 문제의 약물이 세포 주기의 어떤 단계에 어떤 방식으로 작용하는지를 논리적으로 유추해 낼 수 있는 능력을 요구하는 문항이다.

- (실험1)에서 약물을 처리한 배양접시 I과 배양접시 II를 비교해 보면 배양접시II에서 배양접시I에 비해 i) 전체적인 세포의 수가 감소하였고, ii) 간기에 있는 세포의 수가 감소하였으며, iii) 분열기에 있는 세포의 수가 증가하였다. 전체적인 세포의 수가 감소한 것은 항암제가 암세포를 죽이기 때문인 것으로 유추해 볼 수 있으며, 간기와 분열기에 해당하는 세포의 수가 변화한 것은 처리한 약물 X가 암세포의 세포 주기에 영향을 주었을 가능성을 제시하고 있다. 또한, 분열기에 속한 세포 수가 증가하고 간기의 세포 수가 감소했다는 것은 세포 주기가 한 번 분열기 접어든 후에 다시 간기로 진행되지 못했기 때문이라고 유추할 수 있다.
- (실험2)의 결과를 통해서 약물 X의 기능에 대해 보다 구체적인 정보를 파악할 수 있다. (실험2)는 세포의 분열 과정에서 세포 주기에 따른 특정 염색 분체 사이의 거리 변화를 관찰한 그래프인데, 해당하는 세포 주기를 표시해 보면 다음 그림과 같다.



간기에는 염색 분체들이 아직 만들어지지 않았거나, 간기의 S기에 DNA가 복제되어 염색 분체가 만들어진 후에도 분열기(M기)의 중기까지는 염색 분체들끼리 서로 붙어 있는 시기이므로 염색 분체 사이의 거리는 0 이다. 중기에는 염색 분체들이 세포의 중앙에 배열되어 있다가 후기에서부터 양쪽 극으로 이동하게 되므로 염색 분체 사이의 상대적인 거리는 증가하게 되는 것이다. 약물 X를 처리한 경우에는 후기, 말기로 세포 주기가 진행을 함에도 불구하고 염색 분체들 사이의 거리가 멀어지지 않는 것으로 보아, 약물 X는 세포 주기 중 중기 이후에 염색 분체의 분리와 이동을 방해하는 역할을 하는 것을 알 수 있다. 결과적으로 약물 X에 의해 암세포의 세포 주기가 M기에서 멈추게 되고, 이런 세포들은 저절로 사멸하게 된다. 따라서 약물 X를 처리하면 전체적인 세포의 수가 감소하게 되는 것이다. 실제로 방추사의 형성이나 작동을 억제하는 약물들을 항암제로 개발하려는 시도가 진행되고 있으며 한 예로 탁솔(Taxol)을 들 수 있다.

3. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4–1] 예시 답안

- 문제에서 주어진 염기 서열을 유전암호표를 이용하여 번역하면 [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–종결–아스파트산–라이신–페닐알라닌–글라이신–종결]이 된다.

- 문제에서 주어진 아미노산 서열과 비교해 보면 중간에 있는 [종결코돈–아스파트산–라이신–페닐알라닌] 부분이 존재하지 않는다. 이를 통해 [TAGGACAAGTTC]는 인트론임을 유추할 수 있다.
- 따라서 밑줄 친 A가 C로 바뀌더라도 이 부분은 번역이 되지 않으므로 여전히 만들어지는 아미노산의 서열은 처음과 같이 [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신] 이 될 것이다.

채점기준

- [메싸이오닌–글라이신–타이로신–발린–트레오닌–글라이신] 이라고 적었을 경우 +5점
- 주어진 염기 서열과 아미노산 서열을 비교 분석하여 인트론 부위를 올바로 찾아 내고, 밑줄 친 염기가 인트론에 해당하는 부위에 속해 있으므로 최종적으로 만들어지는 아미노산 서열은 처음과 같다는 이유를 올바로 설명한 경우 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4–2] 예시 답안

- (실험1)의 결과를 보면 약물 X를 처리했을 때 간기에 해당하는 세포의 수는 감소했으며 분열기에 해당하는 세포의 수는 증가하였다. 또한, 전체적인 세포의 수가 감소하여 이 약물이 항암 효과를 가진다는 것을 알 수 있다.
- 이를 통해 약물 X는 세포 주기가 분열기로 들어간 후에 다시 간기로 진행되지 못하게 하는 역할을 하는 것으로 생각할 수 있다.
- (실험2)의 결과에 의하면 약물 X를 처리하면 세포 주기가 진행될 때 일어나는 염색 분체들 사이의 거리 증가가 나타나지 않는다.
- 염색 분체들은 분열기의 중기까지 서로 붙어 있다가 후기부터 양쪽 극으로 이동하며, 이때 방추사가 중요한 역할을 한다. 따라서 약물 X는 방추사의 형성이나 기능에 영향을 주어 염색 분체들의 이동을 막는 역할을 한다는 것을 알 수 있다.
- 즉, 약물 X는 세포 주기 단계 중 분열기에서 염색 분체들의 이동을 억제하여, 세포 주기가 계속해서 진행하지 못하고 분열기 중 중기에 멈추게 하는 작용을 한다.

채점기준

- (실험1)의 결과를 논리적으로 해석하여 약물 X가 세포 주기를 분열기에서 멈추는 작용을 한다는 내용을 설명하였으면 +10점
- (실험1)에 대해 세포 주기의 진행 억제에 대한 설명 없이 약물 X가 단순히 분열기 세포 수를 증가시킨다는 내용만 있으면 +5점
- (실험2)의 결과를 논리적으로 해석하여 약물 X가 방추사의 기능을 억제할 것이라는 내용이 있으면 +5점
- (실험2)의 결과를 올바로 해석하여 약물 X가 세포 주기를 중기에 멈추게 한다는 설명이 있으면 +5점
- 방추사나 세포 주기의 단계에 대한 정확한 설명이 없이 약물 X가 세포 주기에 영향을 준다는 내용만 있으면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

04_화학

문제 4

다음 제시문(가)~(라)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 보어의 원자 모형에서 K, L, M, N, ……의 각 전자 껍질에 번호를 붙이고, 기호 n(n은 자연수)으로 표시하면 다음과 같다.

K전자 껍질(n=1), L전자 껍질(n=2), M전자 껍질(n=3), N전자 껍질(n=4), ……

이때 n에 따라 각 전자 껍질이 가지는 에너지 준위는 다음과 같다.

$$E_n = -R/n^2 \text{ kJ/mol}(n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots), \text{ R은 상수}$$

전자 껍질들 중에서 에너지 준위가 가장 낮은 전자 껍질에 전자가 존재하는 상태를 바닥상태라 하고 바닥상태의 전자가 에너지를 흡수하여 바닥상태보다 에너지 준위가 높은 전자 껍질에 존재하는 상태를 들뜬상태라고 한다.

(나) 원자에 에너지를 가하면 가장 바깥 전자 껍질에 배치되어 있는 원자가 전자가 원자핵으로부터 떨어져 나오게 된다. 기체 상태의 중성 원자 1개로부터 전자 1개를 무한히 먼 거리로 떼어 내는 데 필요한 에너지를 이온화 에너지라고 한다.

(다) 화학 반응은 여러 가지 다른 속도로 일어난다. 화학 반응의 속도는 단위 시간 동안에 감소한 반응 물질의 농도나 증가한 생성 물질의 농도로 나타낼 수 있다.

$$\text{반응속도} = \frac{\text{반응 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}} = \frac{\text{생성 물질의 농도 변화량}}{\text{반응 시간}}$$

다음과 같은 일반적인 반응의 경우를 생각하여 보자.

$$aA + bB \rightleftarrows cC + dD$$

이 반응의 반응 속도 v는 $v = k[A]^m[B]^n$으로 표시된다. 여기서 비례 상수 k는 반응 속도 상수라고 하는데, k는 반응에 따라 고유한 값을 가지며, 농도와는 관계가 없고 온도에 따라 변하는 값이다. 또한, 지수 m과 n의 합을 반응 차수라고 하며, 이들은 실험을 통하여 결정된다. 1차 반응은 어떤 시점에서 남아 있는 반응 물질의 양이 절반으로 줄어드는 데 걸리는 시간이 일정하며, 이 시간을 반감기라고 한다.

(라) 화학 반응식에서 각 물질의 계수비는 반응에 관여한 물질의 분자수비와 몰수비, 부피비를 의미한다. 이때, 몰과 입자수, 몰과 질량, 몰과 기체의 부피 관계를 이용하면 반응물과 생성물의 몰수, 입자수, 질량, 부피를 구할 수 있다. 따라서 화학 반응식의 양적 관계를 알기 위해서는 물질의 양을 먼저 몰수로 환산하면 편리하다.

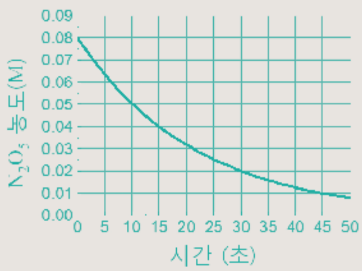
[문제 4-1] 바닥상태에 있는 수소 원자[H(g)] 1몰에 자외선을 조사하여 수소 원자 [H(g)]의 일정량을 전자가 L껍질로 전이된 들뜬상태로 만들었다. 들뜬상태로 전이된 수소 원자의 양을 측정하기 위하여 아래의 표와 같이 자외선 조사 전과 후의 수소 기체의 이온화 에너지를 측정하였다. 실험의 결과를 이용하여 들뜬상태로 전이된 수소 원자[H(g)]의 몰수를 구하는 과정을 제시문(가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

구분	자외선 조사 전	자외선 조사 후
이온화 에너지	1312.0kJ/mol	1213.6 kJ/mol

[문제 4-2] 오산화 이질소[$N_2O_5(g)$]는 다음과 같은 화학 반응식으로 분해 반응이 일어난다.

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

시간에 따른 반응물 N_2O_5 농도를 시간에 따라 다음과 같은 조건에서 측정하였다. 50℃에서 초기 농도가 0.08M인 N_2O_5의 분해 반응이 부피가 일정한 용기 안에서 일어날 때, 반응물 N_2O_5의 농도 변화는 아래 그래프와 같다. 이 반응의 반응 차수와 반응 속도식을 그래프로부터 추론하고, 시간 60초에서 산소 기체의 농도를 구하는 과정을 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]



1. 제시문의 분석 및 배경 지식

[제시문(가)]

- **출전** : 화학I, 단원 II, 개성 있는 원소(EBS, 탐스런 화학I, pp. 89–92)
- **배경 지식**

원자 내의 전자는 핵을 중심으로 등속 원운동을 한다.

이러한 전자가 갖는 에너지는 전자의 운동 에너지와 핵과 전자 사이의 퍼텐셜 에너지의 합인 $E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$이 된다.

여기서 ε_0는 비례 상수, m_e는 전자의 질량, Z는 핵의 양성자수를 말한다.

전자가 원운동을 하므로 구심력은 정전기적 인력과 같아 $\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = m_e\frac{v^2}{r}$이 된다.

보어는 이를 각 운동량의 관점에서 정리하여 각 운동량이 $\frac{h}{2\pi}$ 의 정수배라고 가정하였다.

이를 바탕으로 에너지 준위를 정리하면 $E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = -(2.18\times10^{-18} J)\frac{Z^2}{n^2}$이 된다.

이때 2.18×10^{-18}을 뤼드베리 상수라 하고, 수소 원자는 $Z=1$이고, 전자 1몰에 대한 에너지로 구하면 $E_n = -\frac{1312}{n^2}$ kJ/mol이 된다.

[제시문(나)]

- **출전** : 화학I, 단원 II, 개성 있는 원소(EBS, 탐스런 화학I, pp. 116-118)
- **배경 지식**

기체 상태의 원자 1몰로부터 전자 1몰을 떼어 내어 이온으로 만드는 데 필요한 최소 에너지를 이온화 에너지라고 한다. 기체 상태의 중성 원자에서 전자를 순차적으로 떼어 낼 때 필요한 에너지를 순차적 이온화 에너지라고 하며, 제1 이온화 에너지(E1), 제2 이온화 에너지(E_2), 제3 이온화 에너지(E_3), …… 로 나타낸다. 원자로부터 원자가 전자 수만큼의 전자를 떼어 내기는 비교적 쉽지만, 그 이상의 전자를 떼어 낼 때는 이온화 에너지가 매우 커지므로, 순차적 이온화 에너지 값을 해석하면 그 원자의 원자가 전자 수를 예측할 수 있다.

[제시문(다)]

- **출전** : 화학II, 단원 IV, 화학 반응 속도(EBS, 탐스런 화학II, pp. 248-249, 269-271)
- **배경 지식**

반응 속도는 화학 반응이 얼마나 빨리 일어나는지를 나타내는 것으로 화학 반응이 일어나는 동안 단위 시간 동안 감소한 반응물의 농도나 증가한 생성물의 농도로 나타낼 수 있다. 반응 속도는 반응물의 농도에 따라 결정되면 aA + bB ⇄ cC + dD와 같은 화학 반응의 경우, 반응 속도식은 반응물의 몰 농도의 곱으로 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$와 같이 표현된다. 여기서 k는 반응 속도 상수라고 하는데, k는 반응에 따라 고유한 값을 가지며, 농도와는 관계가 없고 온도에 따라 변하는 값이다. 반응 속도식에서 m과 n은 각각 A와 B의 반응 차수이며, 전체 반응에 대한 반응차수는(m+n)이다. 반응 속도식에서 반응 차수 m과 n은 실험을 통해서만 구할 수 있고 화학 반응식에서의 계수와는 관계가 없다.

간단한 반응 속도식을 가지는 화학 반응으로 0차 반응과 1차 반응이 있다. 0차 반응의 경우는 반응 차수가 0이므로 $\upsilon = k[A]^m[B]^n$에서 $\upsilon = k$가 됨을 알 수 있다. 이 경우 반응 속도가 반응물의 농도에 관계없이 일정한 반응이라는 것을 알 수 있다. 즉 이러한 0차 반응의 경우는 반응물의 농도가 일정한 비율로 계속 감소한다.

1차 반응의 반응 속도식은 $\upsilon = k[A]$와 같이 주어진다. 즉 반응 속도가 반응물의 농도에 비례하여, 반응물의 농도가 높으면 반응이 빨리 진행되고 반응물의 농도가 감소하면 반응의 속도가 감소한다. 이러한 1차 반응은 일정한 반감기를 가지게 된다. 반감기는 반응물의 초기 농도가 절반으로 되는 데까지 걸리는 시간을 말한다. 즉 임의의 1차 반응에서 반응물의 초기 농도를 C라고 하면 초기 농도 C가 C/2로 되는데 소요되는 시간은 다시 이 농도 C/2가 절반인 C/4로 되는데 걸리는 시간과 동일하다. 즉 1차 반응에서 반감기는 초기 농도에 상관없이 일정하다.

[제시문(라)]

- **출전** : 화학I, 단원 I, 화학의 언어(EBS, 탐스런 화학I, p. 51)
- **배경 지식**

  화학식을 이용하여 화학 변화를 나타낸 것을 화학 반응식이라고 한다. 화학 반응식은 화살표(→)를 기준으로 반응물은 왼쪽에 생성물은 오른쪽에 나타낸다. 주의할 점은 반응 전후 원자의 종류와 수가 같도록 계수를 맞추어야 하는 것이다. 이러한 화학 반응식으로부터 반응물과 생성물의 종류뿐만 아니라 반응에 관한 다음과 같은 여러 가지 정보를 얻을 수 있다 : 계수의 비, 분자수의 비, 몰수의 비, 기체의 부피비, 질량비. 이 중에서 질량비를 제외한 모든 비는 계수의 비와 동일하다. 즉 정확한 화학 반응식을 알고 있으면 계수를 이용하여 화학 반응에서의 양적 관계에 대한 파악이 가능하다. 이 중에서 질량비는 몰수비와 각 분자의 질량을 이용하여 구할 수 있다. 일반적으로는 각 분자의 질량을 분자량으로 나누어 몰수를 구한 다음에 화학 반응식을 이용하여 반응의 양적 관계를 파악하는 것이 편리하다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 4-1] 예시 답안

- 수소 원자 1몰이 자외선을 쪼인 후에 일부가 들뜬 상태로 전이하였으므로 들뜬 상태에 있는 수소 원자의 양을 x몰 이라고 하면 바닥상태에 남아있는 수소 원자의 양은 (1– x)몰로 표현할 수 있다.

- 제시문 (가)와 (나)를 이용하면 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 아래와 같이 표시할 수 있다.

  바닥상태의 이온화 에너지: $E_\infty - E_1$

  들뜬상태의 이온화 에너지: $E_\infty - E_2$, L전자 껍질(n=2)로 전이하였다고 하였으므로 n=2 만 고려한다.

- 제시문(가)에 주어진 에너지 준위를 이용하여 이온화 에너지를 구할 때 필요한 에너지 준위에 대한 식을 정리하면 아래와 같다.

$$E_\infty = -\frac{R}{\infty} = 0,\ E_1 = -R,\ E_2 = -\frac{R}{4}$$

- 이 결과를 바탕으로 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 나타내면 다음과 같다.

  바닥상태의 이온화 에너지 = $E_\infty - E_1 = 0 + R = R$

  들뜬상태의 이온화 에너지 = $E_\infty - E_2 = 0 + \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$

- 실험 결과에서 자외선 조사 전에는 모든 수소 원자가 바닥상태에 있으므로 다음의 관계식을 이용하여 상수 R값을 구할 수 있다.

  바닥상태의 이온화 에너지 = R = 1312.0 kJ/mol.

- 자외선 조사 후에 측정된 이온화 에너지는 아래와 같이 바닥상태의 이온화 에너지와 들뜬상태의 이온화 에너지의 조합으로 이루어진다.

  자외선 조사 후의 이온화 에너지 =

  (바닥상태의 이온화 에너지) x (1–x) + (들뜬상태의 이온화 에너지) x = R(1– x) + R/4 X x = 1213.6 kJ/mol

- 위의 식에서 상수 R은 이미 주어져 있으므로(1–x) + x /4 = 1213.6/1312 = 0.925.

  주어진 식을 풀면 x=0.1 즉, 1몰의 수소 원자 중에서 0.1 몰의 원자가 들뜬 상태로 전이된다.

채점기준

- 제시문 (가)에서 주어진 에너지 준위를 이용하여 바닥상태와 들뜬상태의 이온화 에너지를 표현하였으면 +3점
- 자외선 조사 전의 이온화 에너지를 이용하여 상수 R값을 1312.0 kJ/mol로 결정하였으면 +3점.
- 자외선 조사 후의 이온화 에너지 값을 이용하여 들뜬상태의 수소 원자의 몰수를 정확히 구하였으면 +4점.

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~2점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 4-2] 예시 답안

- 제시문 (다)에서, 어떤 시점에 남아 있는 반응 물질의 양이 절반으로 줄어드는 데 걸리는 시간, 즉 반감기가 일정한 반응을 1차 반응이라고 명시하였다. 문제에 주어진 그래프를 보면 초기 농도 0.08M이 0.04M로 감소하는 데 걸린 시간이 15초라는 것을 알 수 있다. 또한, 0.04M이 절반의 농도인 0.02M로 되는 데 걸린 시간이 15초 라는 것을 알 수 있다. 이와 같이 반감기가 15초로 일정하므로 주어진 반응은 1차 반응이라는 것을 알 수 있다.
- 제시문 (다)에 따라 반응 속도식은 비례 상수 k와 반응물의 농도 그리고 반응 차수를 이용하여 표현할 수 있다. 주어진 반응에서 반응물은 $[N_2O_5(g)]$이고 반응 차수는 1차인 반응이므로 반응 속도식은 다음과 같다.

$$\upsilon = k[N_2O_5]$$

- 주어진 화학 반응식에서 60초 후의 산소 기체의 농도를 알기 위해서는 우선 60초 후에 남아 있는 반응물 $[N_2O_5(g)]$의 양을 알아야 한다. 주어진 반응이 1차 반응이라는 것을 이해하면 60초 후의 반응물의 농도도 쉽게 추론할 수 있다. 즉 한 번의 반감기(15초) 후의 농도는 0.04M, 두 번의 반감기(30초) 후의 농도는 0.02M, 세 번의 반감기(45초) 후의 농도는 0.01M, 네 번의 반감기(60초) 후의 농도는 0.005M이다.
- 반응이 진행된 용기의 일정한 부피가 1L라고 가정하면 60초의 반응 시간 후에 소모된 $[N_2O_5(g)]$의 몰수는 0.06 − 0.005 = 0.055이다. 아래의 화학 반응식의 계수비를 이용하면 생성된 산소 기체의 몰수는 0.0275임을 알 수 있다. 즉 생성된 산소 기체의 농도는 27.5mM이다.

$$2N_2O_5(g) \rightarrow 4NO_2(g) + O_2(g)$$

채점기준

- 제시문 (다)와 그래프에 주어진 정보를 이용하여 반응의 차수를 논리적으로 설명하면 +5점
- 제시문 (다)에 주어진 정보를 이용하여 반응 속도식을 정확히 표현하면 +5점.
- 제시문 (다)와 그래프에 주어진 정보를 이용하여 60초 후의 반응물의 농도를 논리적으로 추론하면 +5점.
- 제시문 (라)에 의거하여 주어진 화학 반응식의 계수비로부터 몰수비를 계산하고 산소 기체의 농도를 정확히 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.