2015학년도 수시 일반 논술(자연계열II)

문제 1

50 m 전방에 한 변의 길이가 8 m인 정사각형의 과녁이 있고, 정사각형의 중심을 기준으로 각각 반지름이 1 m, 2 m, 3 m인 원판 A, B, C가 있다. 한 개의 화살을 쏘아 원판 A에 맞힐 경우 10만 원의 상금을, 원판 A를 제외한 원판 B에 맞힐 경우 5만 원의 상금을, 원판 B를 제외한 원판 C에 맞힐 경우 3만 원의 상금을 받는다고 하자. 원판 C를 제외한 과녁에 맞힐 경우에는 상금이 없다. 이 게임의 참가비가 x만 원일 때, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값이 0 이상이기 위한 x의 최댓값을 구하시오. 단, 화살은 언제나 과녁 안에 맞으며, 과녁 안의 모든 부분에 같은 확률로 맞는다.

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

한 개의 화살을 쏘아 과녁의 특정 위치에 맞힐 경우 정해진 상금을 받는 게임에서 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값이 0 이상이 되기 위한 참가비의 최댓값을 구하는 문제이다.

먼저 상금의 기댓값을 구하기 위해, 이 게임에 참가했을 때 받을 수 있는 상금을 확률변수 W라고 하자. 이 확률변수가 취할 수 있는 값은 10만원, 5만원, 3만원, 0원이다. 확률변수 W가 이 값을 가지게 되는 경우는 각각 다음과 같다. 한 개의 화살을 쏘았을 때 원판 A에 맞히는 사건, 원판 A를 제외한 원판 B에 맞히는 사건, 원판 B를 제외한 원판 C에 맞히는 사건, 원판 C를 제외한 과녁에 맞히는 사건이다. 각각의 사건이 발생할 확률은 해당 과녁의 (전체 정사각형 과녁의 넓이에 대한) 상대적 넓이로 계산할 수 있다. 즉, 모든 확률의 분모는 전체 정사각형 과녁의 넓이가 되고, 한 변의 길이가 8 m인 정사각형의 과녁이므로 그 넓이는 64 m^2이다. 또한, 각각의 확률의 분자는 해당 과녁의 넓이가 되고, 원판 A, B, C는 정사각형의 중심을 기준으로 각각 반지름이 1 m, 2 m, 3 m인 원이므로 해당 과녁의 넓이는 각각 $\pi \cdot 1^2$, $\pi \cdot (2^2-1^2)$, $\pi \cdot (3^2-2^2)$, $64-\pi \cdot 3^2$ m^2이다. 따라서, 확률변수 W가 10만원, 5만원, 3만원, 0원일 확률은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\pi}{64}, \frac{3\pi}{64}, \frac{5\pi}{64}, \frac{64-9\pi}{64}$$

그러므로, 이 게임의 기대 상금은

$$10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{3\pi}{64}+3\times\frac{5\pi}{64}+0\times\frac{64-9\pi}{64}=\frac{5}{8}\pi$$

이다. 이 게임의 참가비가 x만 원이므로, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값은 $5\pi/8-x$ 이고, 이 값이 0이상이기 위한 x의 최댓값은 $5\pi/8$(만원)이다. 참고: $5\pi/8$(만원) = 약 19,634원.

1. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

예시 답안

- 기대할 수 있는 상금은 세가지 종류(10만원, 5만원, 3만원)가 있고, 이들에 대한 확률은 각각 해당 과녁의(전체 정사각형 과녁의 넓이에 대한) 상대적 넓이로 계산할 수 있다. 따라서, 기대 상금은

$$10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{\pi(4-1)}{64}+3\times\frac{\pi(9-4)}{64}=\frac{40}{64}\pi=\frac{5}{8}\pi$$

- 따라서, 상금에서 참가비를 뺀 이익의 기댓값은, $5\pi/8-x$ 이므로 기댓값이 0 이상이기 위한 x의 최댓값은 $5\pi/8$(만원)이다.
  참고: $5\pi/8$(만원) = 약 19,634원.
- 다음과 같이 기대이익을 한꺼번에 계산할 수도 있다.

$$(10-x)\times\frac{\pi}{64}+(5-x)\times\frac{\pi(4-1)}{64}+(3-x)\times\frac{\pi(9-4)}{64}+(0-x)\times\frac{64-9\pi}{64}$$

$$=10\times\frac{\pi}{64}+5\times\frac{\pi(4-1)}{64}+3\times\frac{\pi(9-4)}{64}-x=\frac{5}{8}\pi-x \qquad \therefore \frac{5}{8}\pi\geq x$$

채점 기준

- 확률 및 기댓값에 대한 개념적 이해 : +5점
  - 3가지 과녁의 확률값 계산을 시도함 : +3점
  - 관련 확률과 상금을 곱하는 시도를 함 : +2점
- 상대적 넓이와 확률과의 관련성 : 10점
  - 각 과녁의 넓이를 정사각형 넓이로 나눔 : +5점
  - 한 원판에 포함되어 있는 다른 원판의 넓이를 제외함 : +5점
- 상금에서 참가비를 뺀 이익이 0이상이어야 함을 고려 : +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 2

다음 제시문 (가)–(다)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) $x \to \infty$일 때, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$은 일정한 값에 수렴함이 알려져 있으며, 그 극한값을 e로 나타낸다.

즉, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$이다.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$과 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{단, } b_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

(다) 좌표평면 위의 한 점 (x_0, y_0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[문제 2-1] 다음 수열의 n번째 항을 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n$을 구하시오. [10점]

0.1, 0.101, 0.10101, 0.1010101, ……

[문제 2-2] [문제 2-1]에서 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 하자.

점 $(S_n, S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리가 최소가 되는 자연수 n을 구하시오. [10점]

1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

[문제 2-1]은 등비수열의 일반항을 구할 수 있고 극한을 이해하고 있는지 묻는 문제이다. 문제해결을 위하여 효율적인 연산능력이 요구된다.

$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$이라 하면 α는 순환소수 0.101010101…… 이다. 즉, $\alpha = \frac{10}{99}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

[문제 2-2]는 등비수열의 합, 점과 직선과의 거리, 이차함수의 최대-최소를 통합적으로 사고하여 주어진 문제를 해결해야 한다.

a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다. 첫째 항이 a이고 공비가 r인 등비수열의 n번째 항까지의 합을 구하는 공식은 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 이므로

$a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$이다.

등비수열의 합의 공식을 한번 더 사용하여 다음의 식을 얻는다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{10(1-0.01^k)}{99} = \frac{10}{99}\left(n - \sum_{k=1}^{n} 0.01^k\right)$$

$$= \frac{10}{99}\left(n - \frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}\right) = \frac{10}{99}\left(n - \frac{1-0.01^n}{99}\right)$$

즉, $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$이다. 제시문에 주어진 점과 직선 사이의 거리공식을 이용하여 점 $(S_n, S_n^2 - 6S_n + 11)$과

직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리 d를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$d = \frac{|S_n - S_n^2 + 6S_n - 11 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{|S_n^2 - 7S_n + 21|}{\sqrt{2}} = \frac{(S_n - 7/2)^2 + 35/4}{\sqrt{2}}$$

$S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$ 에서 $\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 $0 < \frac{10(1-0.01^n)}{99^2} < \frac{10}{99^2}$이므로 n에 관계없이 매우 작은 수이고

$\frac{10n}{99}$은 $n=35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\frac{7}{2}=3.5$에 가장 가깝다. 따라서 점 $(S_n, S_n^2 - 6S_n + 11)$과

직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리는 $n=35$일 때 최소이다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 2-1] 예시 답안

- $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$이라 하면 α는 순환소수 $0.101010101\cdots$이다. 즉, $\alpha = \frac{10}{99}$이다.

- 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}\cdot 100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

별해

- a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다.

- $a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$ 이다.

- $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{10}{99}$

- 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{100a_n}{n}}{1+\frac{a_n}{n}}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/100a_n}\right)^{\frac{n}{100a_n}\cdot 100a_n}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}\cdot a_n}} = \frac{e^{100\alpha}}{e^{\alpha}} = e^{99\alpha} = e^{10}$$

채점 기준

- α를 계산하면 +4점.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{100a_n}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n}$를 계산하면 +4점
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+100a_n}{n+a_n}\right)^n=e^{10}$를 계산하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 2-2] 예시 답안

- $9.9a_1=0.99,\ 9.9a_2=0.9999,\ 9.9a_3=0.999999,\ \cdots,\ 9.9a_n=1-0.01^n$

  $$9.9S_n=9.9\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(1-0.01^k)=n-\sum_{k=1}^{n}0.01^k=n-\frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}=n-\frac{1-0.01^n}{99}$$

  $$S_n=\frac{10n}{99}-\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$$

- 점 $(S_n,\ S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

  $$d=\frac{|S_n-S_n^2+6S_n-11-10|}{\sqrt{2}}=\frac{|S_n^2-7S_n+21|}{\sqrt{2}}=\frac{(S_n-7/2)^2+35/4}{\sqrt{2}}$$

- $S_n=\dfrac{10n}{99}-\dfrac{10(1-0.01^n)}{99^2}$ 에서 $\dfrac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 n에 관계없이 매우 작은 수이고 $\dfrac{10n}{99}$은 $n=35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\dfrac{7}{2}$에 가장 가깝다.
- 따라서 점 $(S_n,\ S_n^2-6S_n+11)$과 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리는 $n=35$일 때 최소이다.

[문제 2-2] 별해

- a_n은, 첫째 항이 0.1 이고 공비가 0.01인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합이다.
- $a_n = \frac{0.1(1-0.01^n)}{1-0.01} = \frac{0.1(1-0.01^n)}{0.99} = \frac{10(1-0.01^n)}{99}$ 이다.
- 따라서

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{10(1-0.01^k)}{99} = \frac{10}{99}\left(n - \sum_{k=1}^{n} 0.01^k\right)$$
$$= \frac{10}{99}\left(n - \frac{0.01(1-0.01^n)}{1-0.01}\right) = \frac{10}{99}\left(n - \frac{1-0.01^n}{99}\right)$$ 이다.

즉, $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$이다.

- $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$
- 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

$$d = \frac{|S_n - S_n^2 + 6S_n - 11 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{|S_n^2 - 7S_n + 21|}{\sqrt{2}} = \frac{(T_n - 7/2)^2 + 35/4}{\sqrt{2}}$$

- $S_n = \frac{10n}{99} - \frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$ 에서 $\frac{10(1-0.01^n)}{99^2}$은 n에 관계없이 매우 작은 수이고 $\frac{10n}{99}$은 $n=35$일 때, $3.53535\cdots$로서 $\frac{7}{2}$에 가장 가깝다.
- 따라서 점 $(S_n,\ S_n^2 - 6S_n + 11)$과 직선 $x - y - 10 = 0$ 사이의 거리는 $n=35$일 때 최소이다.

채점 기준

- a_n 을 계산하면 +3점.
- S_n 을 계산하면 +3점.
- n을 계산하면 +4점.

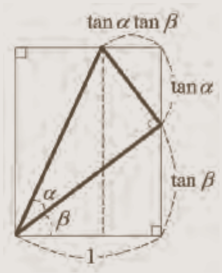
※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

문제 3

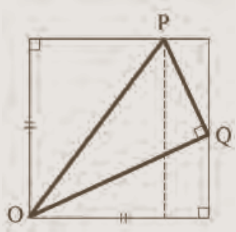
다음 제시문 (가), (나)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 직각삼각형과 한 꼭짓점을 공유하는 직사각형을 이용하여 탄젠트함수의 덧셈정리를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

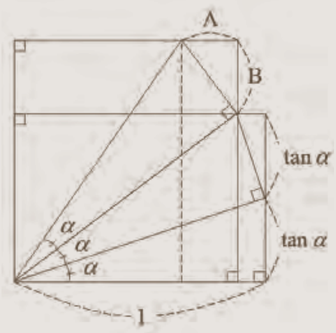


(나) 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형은 다음 그림과 같다. 즉, 직각삼각형의 최소각에 있는 꼭짓점 O와 정사각형의 한 꼭짓점을 일치시켰을 때, 직각삼각형의 다른 두 꼭짓점 P와 Q는 정사각형의 두 변 위에 있어야 한다.



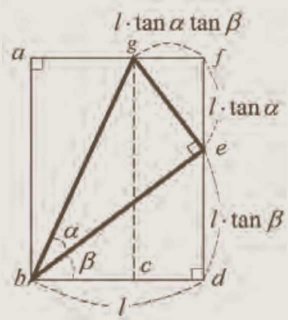
[문제 3-1] 제시문 (나)의 그림에서 직각삼각형 OPQ의 세 변의 길이가 3, 4, 5라고 하자. 이 직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형의 한 변의 길이를 위 제시문에 근거하여 구하시오. [10점]

[문제 3-2] 제시문 (가)에 근거하여 다음 그림에서 A와 B의 길이를 구하시오. [20점]



1. 제시문의 분석, 배경 지식, 문제 풀이 과정

제시문에서 직각삼각형과 이를 포함하며 한 꼭짓점을 공유하는 최소 직사각형을 이용하여 탄젠트함수의 덧셈정리를 그림으로 나타내었다. 이를 밑변의 길이가 l 인 직사각형을 이용하여 일반화하면 다음 그림과 같다.



선분 $\overline{be}$ 의 길이는 $\sqrt{l^2+(l\cdot\tan\beta)^2}=l\cdot\sec\beta$, 선분 $\overline{eg}$ 의 길이는 $l\cdot\tan\alpha\cdot\sec\beta$, Δbde와 Δefg가 닮음이므로
선분 $\overline{ef}$ 의 길이는 $\cos\beta\cdot l\cdot\tan\alpha\cdot\sec\beta=l\cdot\tan\alpha$, 선분 $\overline{fg}$의 길이는 $l\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta$이다.

직각삼각형을 포함하는 최소 정사각형은 제시문 (나)에 주어진 것과 같이 직각삼각형과 한 꼭짓점을 공유하며 정사각형의 두 변 위에 직각삼각형의 꼭짓점이 있어야 한다. 제시문 (나)에 주어진 경우는 위에 보인 직각삼각형과 이를 포함하는 최소 직사각형의 특수한 형태이기 때문에, 위에서 구한 선분들 사이의 관계를 이용할 수 있다.

탄젠트함수의 3배각 공식은 제시문 (가)에 있는 탄젠트함수의 덧셈정리를 두 번 이용하여 구할 수 있다.

$$\tan(\alpha+2\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan2\alpha}{1-\tan\alpha\tan2\alpha},\quad \tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

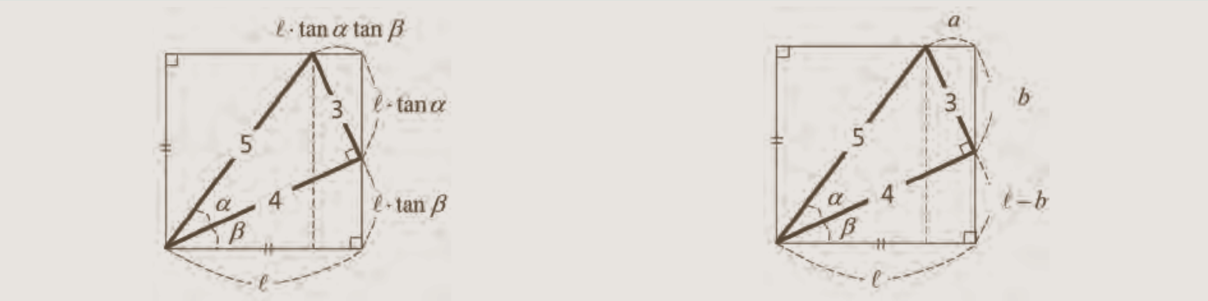
제시문 (가)에 주어진 그림을 바탕으로 탄젠트함수의 3배각 공식을 보여주기 위해서는 $\tan(\alpha+2\alpha)$과 $\tan(\alpha+\alpha)$을 아래 그림처럼 나타낼 수 있다.

오른쪽 그림에서, 밑변의 길이가 C_1일 때 $D_1 = C_1\tan\alpha$과 $D_2 = C_1\tan\alpha$, 그리고 $A_1 = C_1\tan^2\alpha$을 구할 수 있다. 이것을 이용하여 왼쪽 그림에서 C를 구할 수 있고, 이어서 A와 B를 구할 수 있다.

2. 문항별 예시 답안 및 채점 기준

[문제 3-1] 예시 답안

- 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 아래와 같은 그림을 그릴 수 있다.



- 위 왼쪽 그림에서 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

  $\cos\alpha = 4/5,\ \sin\alpha = 3/5,\ \cos\beta = \ell/4,\ \sin(\alpha+\beta) = \ell/5$ (1)

- $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{\ell}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16-\ell^2}}{4}$ (2)

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\frac{\ell}{4} + \frac{4}{5}\frac{\sqrt{16-\ell^2}}{4} = \frac{\ell}{5}$ (3)

- 식 (3)의 ℓ에 대한 방정식으로부터 다음을 구할 수 있다.

  $\ell = \frac{16}{\sqrt{17}}$ (4)

[문제 3-1] 별해 1

- 위 오른쪽 그림에서 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\cos\beta = \frac{b}{3} = \frac{\ell}{4} \quad (5)$$

- 식 (5)에서 다음 관계를 유도할 수 있다.

$$b = \frac{3}{4}\ell \quad (6)$$

- $\sin\beta = \frac{\ell - b}{4} = \frac{\ell}{16}$ (7)
- $\cos^2\beta + \sin^2\beta = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{16}\right)^2 = 1$ (8)
- 식 (7)의 ℓ에 대한 방정식으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\ell = \frac{16}{\sqrt{17}} \quad (9)$$

[문제 3-1] 별해 2

- 위 오른쪽 그림에서 삼각형의 닮은꼴을 이용하여 다음 비례식을 유도할 수 있다.

$$\ell : \ell - b = b : a \quad (10)$$

- 식 (1)로부터 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$a = \frac{b(\ell - b)}{\ell} \quad (11)$$

- 피타고라스 정리를 이용하여 다음의 관계식을 유도할 수 있다.

$$a^2 + b^2 = 3^2 \quad (12)$$

$$\ell^2 + (\ell - b)^2 = 4^2 \quad (13)$$

- 식 (10)을 식 (11)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{b^2(\ell - b)^2}{\ell^2} + b^2 = 9 \quad (14)$$

$$\frac{b^2}{\ell^2}\left((\ell - b)^2 + \ell^2\right) = 9 \quad (15)$$

- 식 (13)을 식 (12)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{b^2}{\ell^2}16 = 9$$

$$b = \frac{3}{4}\ell \quad (16)$$

- 식 (14)를 식 (12)에 대입하면 다음을 구할 수 있다.

$$\ell^2 + (\ell - \frac{3}{4}\ell)^2 = 4^2$$

$$\ell = \frac{16}{\sqrt{17}} \quad (17)$$

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +2.5점
- 식 (2)를 제시하면 +2.5점
- 식 (3)을 제시하면 +2.5점
- 식 (4)를 제시하면 +2.5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 1 채점 기준

- 식 (5)을 제시하면 +2점
- 식 (6)를 제시하면 +2점
- 식 (7)을 제시하면 +2점
- 식 (8)를 제시하면 +2점
- 식 (9)를 제시하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

별해 2 채점 기준

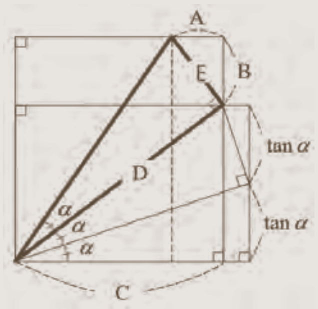
- 식 (11)을 제시하면 +2점
- 식 (14)를 제시하면 +2점
- 식 (15)를 제시하면 +2점
- 식 (16)을 제시하면 +2점
- 식 (17)을 제시하면 +2점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 10점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[문제 3-2] 예시 답안

아래 그림에서와 같이 가장 상단 삼각형에 포함하는 직사각형의 아랫 변 C의 길이는 제시문 (가)에 근거하여 다음과 같다.

변 C의 길이 = $1-\tan^2\alpha$ (1)



가장 상단 삼각형의 아랫 변 D의 길이는 다음과 같다.

변 D의 길이 = $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (2)

가장 상단 삼각형의 짧은 변 E의 길이는 다음과 같다.

변 E의 길이 = $\tan\alpha\dfrac{1-\tan^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (3)

B의 길이는 $(1-\tan^2\alpha)\tan\alpha$ (4)

A의 길이는 $(1-\tan^2\alpha)\tan\alpha\tan 2\alpha = 2\tan^2\alpha$ (5)

채점 기준

- 식 (1)을 제시하면 +4점
- 식 (2)를 제시하면 +3점
- 식 (3)를 제시하면 +3점
- 식 (4)를 제시하면 +5점
- 식 (5)를 제시하면 +5점

※ 각 단계에서 오류가 있어도 논리성을 고려하여 부분 점수 1~3점 부여 가능.
※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ±0.5점 추가 점수 부여 가능함.