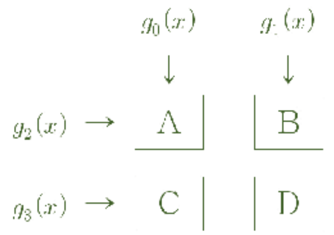
[문제 5] 네 개의 버튼으로 이루어진 함수 생성기가 있고, 네 버튼이 그림과 같이 배열되어 있다. 각 버튼을 누를 때마다 두 함수의 합으로 새로운 함수가 만들어진다. 예를 들어 B 버튼을 누르면 함수 $f(x)=g_1(x)-g_2(x)$가 생성된다.



이 함수 생성기의 버튼을 눌러 생성된 함수를 외부로 전송한다. 제시문 (라)에서 설명한 직교 함수의 원리를 이용하여 전송된 함수로부터 눌려진 버튼을 판별하기 위해, $\{g_0(x),\ g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)\}$를 구간 $[-1\,,\,1]$에서 직교 함수의 집합으로 만들고자 한다. $g_0(x)=1$이고, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$가 각각 x의 1차, 2차, 3차 다항식으로서 최고차항의 계수가 모두 1이라고 할 때, $g_3(x)$를 구하는 과정을 제시문 (라)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [20점]

– 끝 –

평가 목표와 출제 의도

❶ 평가 목표

본 논술시험은 고등학교 교과과정을 공부한 학생은 무난히 이해할 수 있는 내용을 다루었으며, 자연 현상과 수리에서 나타나는 '흐름'과 '변화'라는 주제를 바탕으로 출제되었다. 혈액의 흐름, 전하의 흐름, 전자기 유도, 함수의 적분 등 고교 과학 및 수학 과정을 통해 친숙한 내용들에 기초한 제시문을 준비하였고, 학생들이 제시문의 설명을 충분히 이해한 후 이를 바탕으로 논리적 사고력, 표와 그래프의 해석력, 수리적 능력 등을 종합하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖추었는가를 평가하는 것이 출제의 목표이다. 자연계열로 대학에 진학한 후 전공을 깊이 있게 공부하는 데에 필요한 기본적인 능력을 평가하고자 하였으며, 문제의 이해와 추론 과정은 깊이 있는 논리적 사고를 필요로 하지만, 답을 얻기 위한 계산 과정은 복잡하지 않은 문항들로 출제하였다.

❷ 출제의도

[문제 1] 제시문 (가)에서 설명된 동맥, 정맥, 모세혈관의 주요 구조 및 생물학적 기능에 관한 특징들을 제시문 (다)에 설명된 유체의 속도, 유체가 흐르는 면적, 유체가 외부에 가하는 압력 등 유체의 운동을 설명하는 방정식들과 연관 지어 설명할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2] 제시문 (마)에 설명된 키르히호프의 제1법칙을 이해하고, 이를 제시문 (가)의 혈관을 흐르는 혈액에 적용할 수

있다는 것을 이해한다. 각 교차점에서의 방정식을 논리적으로 유도 하고, 이로부터 주어진 조건에 따라 특정 혈관에서의 최소 혈류량을 수리적으로 추론할 수 있는 사고력을 평가한다.

[문제 3] 제시문 (가)에 설명된 혈액의 흐름을 방해하는 동맥경화가 발생한 상황에 제시문 (다)에서 설명된 연속 방정식을 적용하여 위치에 따라 달라지는 혈류의 흐름 속도를 표현하는 방식을 찾아야 한다. 속도가 지속적으로 변하는 상황에서, 시간에 따른 속도의 적분이 이동거리라는 점에 착안하여 간단한 적분을 통해 특정 지점에 도달하기 위해 소요되는 시간을 지수 형태로 얻을 수 있으며, 마지막 단계에서 로그 함수의 그래프를 통해 그 값을 찾아 최종 소요 시간을 구해야 한다. 이해력과 논리적 사고력 및 수리적 능력을 종합한 문제 해결 능력을 평가한다.

[문제 4] 제시문 (나)에서 설명된 전자기 유도에 의한 기전력 발생은 고교 물리I 수업을 통해 학생들이 접했던 매우 친숙한 소재이다. 학생들에게 익숙한 단순 고리형 회로가 아닌, 8자 형태의 회로에서 유도 기전력에 따른 전류 계산을 위해 제시문 (마)에서 설명된 키르히호프의 법칙을 바르게 적용할 수 있는가를 묻는 문제이다. 제시문의 예에서 설명된 바와 같이 각 저항에서 전류의 방향을 설정한 후, 도선의 이동에 따라 발생하는 유도 기전력을 수식으로 표현하면 매우 단순한 수식 전개를 통해 답을 찾을 수 있다. 물리 현상에 관한 이해력과 논리적 사고력에 기초한 문제 해결 능력을 평가한다.

[문제 5] 제시문 (라)에서 설명된 함수의 내적에 대한 정의와 성질을 이해하고, 이를 x의 다항식에 적용하는 것을 이해한다. 이로부터 서로 직교하는 네 개의 다항식으로 이루어진 직교함수의 집합을 수학적으로 구하는 과정을 설명하는 문제로서, 이해력을 바탕으로 한 수리 능력을 평가한다.

예시답안/채점기준

[문제1] 예시답안

▶ (1) 연속 방정식은 흐름의 단면적과 속도의 관계를 나타내기 때문에 연속 방정식 만으로 혈압의 상대적 크기를 설명할 수 없다.

▶ (2), (4) 베르누이의 방정식은 흐름의 속도와 흐름이 외부에 미치는 압력의 관계를 설명하며, 이에 따르면 혈류 속도가 빠른 곳에서 혈압이 낮아야 한다. 정맥과 모세혈관을 비교하면, 혈압이 높은 모세혈관의 혈류 속도가 혈압이 낮은 정맥의 혈류 속도보다 느리며 이 점은 베르누이 방정식의 예상과 일치한다. 그러나 혈압이 가장 높은 동맥의 혈류 속도가 혈압이 중간인 모세혈관이나 혈압이 낮은 정맥보다 빠르다는 점은 베르누이 방정식과 상충된다. 따라서 정맥과 모세혈관의 비교에서 혈압이나 혈류 속도의 상대적 크기는 베르누이 방정식으로 설명할 수 있으나, 동맥의 경우 베르누이 방정식으로 설명할 수 없다.

▶ (3) 총 단면적이 가장 큰 모세혈관은 혈류 속도가 가장 느리고, 단면적이 중간인 정맥은 혈류 속도가 중간, 단면적이 가장 작은 동맥은 혈류 속도가 가장 빠르기 때문에 연속 방정식에 의한 예측과 일치한다. 따라서 혈류 속도의 상대적 크기는 연속 방정식으로 설명할 수 있다.

[문제1]
채점기준

다음과 같은 의미의 문장이 있으면 옆에 있는 점수를 부여한다.

1. – 설명할 수 없다.(2점)
  – 연속 방정식은 흐름의 단면적과 속도의 관계를 나타낸다.(3점)
  (또는, 연속 방정식은 혈압과 관련된 내용이 없다.)
2. – 설명할 수 없다 또는 부분적으로만 설명된다.(2점)
  – 정맥과 모세혈관은 베르누이 방정식으로 설명 가능(1점)
  동맥의 경우는 설명할 수 없다.(2점)
3. – 설명할 수 있다.(2점)
  – 혈류속도의 상대적 크기와 혈관의 총 단면적을 비교하였으면(3점)
4. – 설명할 수 없다 또는 부분적으로만 설명된다.(2점)
  – 정맥과 모세혈관은 베르누이 방정식으로 설명 가능(1점)
  동맥의 경우는 설명할 수 없다.(2점)

[문제2]
예시답안

▶ 이 문제에서 혈관을 흐르는 혈액의 밀도가 변하지 않기 때문에, 제시문 (마)의 키르히호프의 제1법칙을 적용할 수 있다. 각 교차점에서 키르히호프의 제1법칙을 이용하여 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 625 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 475 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1050 \\ x_3 + x_4 &= 900 \end{aligned} \qquad (1)$$

▶ 위 식들을 정리하여 x_1, x_2, x_4를 x_3로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 - 425 \\ x_2 &= -x_3 + 1050 \\ x_4 &= -x_3 + 900 \end{aligned} \qquad (2)$$

▶ 모든 혈관의 분당 혈류량이 음수 값을 가지게 되면 혈류 방향이 바뀌는 것이기 때문에 x_1, x_2, x_4이 모두 0보다 크거나 같아야 한다. 따라서 x_3의 크기는 다음과 같다.

$$425 \le x_3 \le 900 \qquad (3)$$

▶ 따라서 x_3의 분당 최소 혈류량은 425 이다.

[문제2]
채점기준

1. 식 (1)의 방정식을 모두 제시하면 +10점.
2. 식 (2)의 방정식을 모두 제시하면 +5점.
3. x_3의 분당 최소 혈류량 425를 제시하면 +5점.

[문제3]
예시답안

▶ 제시문 (다)의 연속 방정식에 의해 $\text{면적} \times \text{속도}$가 일정하므로 $x=0$에서 혈류 속도를 v_0라고 놓으면 초기 값이 유지되어 다음의 식을 얻는다.

$$\pi r_0^2 v_0 = \pi r^2(x)\frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{r^2(x)}{r_0^2 v_0}dx$$

▶ 혈액이 동맥 $1\,m$를 통과하는 데 소요 시간을 T라고 하면, 양 변을 적분하여 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$T=\int_0^T dt=\frac{1}{r_0^2 v_0}\int_0^1 r^2(x)\,dx=\frac{1}{r_0^2 v_0}\int_0^1 r_0^2 e^{-0.5x}\,dx=\frac{1}{v_0}\int_0^1 e^{-0.5x}\,dx$$
$$=\frac{-2}{v_0}\left[e^{-0.5x}\right]_0^1=\frac{2}{v_0}\left(1-e^{-0.5}\right)$$

$$\therefore T=\frac{2}{5\times 10^{-2}}\left(1-e^{-0.5}\right)=40\left(1-e^{-0.5}\right)$$

▶ 주어진 로그 그래프에 의하면 $\ln 0.6 \simeq -0.5$이므로 $e^{-0.5} \simeq 0.6$이다. 따라서 소요시간은 다음과 같다.

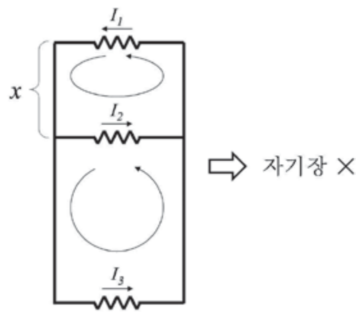
$$T\simeq 40(1-0.6)=\text{약 }16(\text{초})$$

[문제3] 채점기준

1. 면적 × 속도 가 일정함을 통해 $\pi r_0^2 v_0=\pi r^2(x)\dfrac{dx}{dt}$의 식을 제시하면 +5점.
2. 적분을 이용하여 계산을 시도하면 +5점.
3. 적분에 성공하여 $T=\dfrac{2}{5\times 10^{-2}}\left(1-e^{-0.5}\right)=40\left(1-e^{-0.5}\right)$의 식을 구하면 +5점.
4. 주어진 로그 그래프에서 값을 찾아 $T=40(1-0.6)=16(\text{초})$를 구하면 +5점. 근사적으로 15.XX 또는 16.XX 형태를 써도 답으로 인정.

[문제4] 예시답안

▶ 도선이 자기장 영역으로 들어가기 시작하면 전자기 유도 법칙에 의해 아래 그림과 같이 자속의 변화를 방해하는 화살표 방향으로 기전력이 발생한다.



▶ 그림과 같이 전류가 흐르는 방향과 크기를 설정하였을 때, 도선이 자기장 내부로 z만큼 들어간 경우 위와 아래의 Loop에 발생하는 기전력의 크기는 각각 다음과 같다.

$$E_{\text{위}}=Bx\frac{dz}{dt}=Bvx$$
$$E_{\text{아래}}=B(2L-x)\frac{dz}{dt}=Bv(2L-x)$$

▶ 키르히호프의 법칙을 위, 아래 루프에 각각 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$Bvx=RI_1+RI_2$$
$$Bv(2L-x)=-RI_2+RI_3$$
$$I_1=I_2+I_3$$

▶ 위의 세 식을 연립하여 I_1, I_2, I_3를 각각 구하면 다음과 같다.

$$I_1 = \frac{Bv}{3R}(2L+x),\quad I_2 = \frac{Bv}{3R}(-2L+2x),\quad I_1 = \frac{Bv}{3R}(4L-x)$$

▶ 도선이 자기장 영역에 들어가는 데에 소요되는 시간은 L/v이므로, 이 시간동안 각 저항에서 소모되는 열에너지의 총 합은 다음과 같이 구할 수 있다. (단, I_2의 경우 x에 따라 부호가 바뀔 수 있으므로 절댓값을 사용해야 한다.)

$$\begin{aligned}\text{열에너지} = \text{전력} \times \text{시간} &= R^2(I_1 + I_3 + |I_2|)\frac{L}{v} \\ &= \frac{LR^2}{v}\frac{Bv}{3R}(6L+2|x-L|) = \frac{LRB}{3}(6L+2|x-L|)\end{aligned}$$

▶ $0 \le x \le 2L$이므로 열에너지의 최댓값은 $x=0$또는 $x=2L$ 인 경우에 얻어짐을 알 수 있다.

[문제4] 채점기준

1. 자기장 영역에 진입할 때 이를 방해하는 기전력이 발생함을 언급하면 +5점.
2. 자기장 영역으로 진입한 길이에 따라 발생된 기전력의 식을 바르게 제시하면 +5점.
3. 키르히호프의 법칙을 적용하여 I_1, I_2, I_3를 바르게 구하면 +5점. 셋 중 하나 또는 둘만 맞으면 +2점 또는 +3점.
4. I_2의 부호를 잘 고려하여 열에너지를 최대로 하는 x의 값 2가지를 모두 구하면 +5점. 부호를 고려하지 않아서 하나만 구했으면 +3점.
5. 각 항목에서 식이 맞지는 않았으나 전개 논리 등이 타당하면 1~2점 부여 가능.

[문제5] 예시답안

▶ $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ 는 각각 최고차항의 계수가 1인 x의 1차, 2차 3차 다항식이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x + a \\ g_2(x) &= x^2 + bx + c \\ g_3(x) &= x^3 + dx^2 + ex + f \end{aligned} \tag{1}$$

▶ $\{g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$가 구간 $[-1, 1]$에서 직교함수의 집합이 되기 위해서는 제시문 (라)에 의해 이 구간에서 각 함수 사이의 내적이 0 이어야 한다.

▶ 먼저 $g_1(x)$를 구하기 위하여 $g_0(x) = 1$과 내적을 하면,

$$(g_0(x), g_1(x)) = \int_{-1}^{1} 1 \times (x+a)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + ax\right]_{-1}^{1} = 2a \tag{2}$$

두 함수의 내적이 0이 되어야 두 함수가 직교하기 때문에 $a=0$ 이다.

▶ 그 다음, $g_0(x)$, $g_1(x)$와 직교하는 $g_2(x)$를 구하기 위해 각각 내적을 하면,

$$\begin{aligned}(g_1(x), g_2(x)) &= \int_{-1}^{1} x(x^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}b \\ (g_0(x), g_2(x)) &= \int_{-1}^{1} 1 \times (x^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2c\end{aligned} \tag{3}$$

이 두 내적이 모두 0이 되어야 하기 때문에, $b=0$, $c=-1/3$이다.

▶ 그 다음, $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$와 직교하는 $g_3(x)$를 구하기 위해 각각 내적을 하면,

$$(g_0(x), g_3(x)) = \int_{-1}^{1} 1\times(x^3+dx^2+ex+f)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+d\frac{x^3}{3}+e\frac{x^2}{2}+fx\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}d+2f$$
$$(g_1(x), g_3(x)) = \int_{-1}^{1} x(x^3+dx^2+ex+f)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}+d\frac{x^4}{4}+e\frac{x^3}{3}+f\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}+\frac{2}{3}e$$
$$\begin{aligned}(g_2(x), g_3(x)) &= \int_{-1}^{1} (x-\frac{1}{3})(x^3+dx^2+ex+f)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x(x^3+dx^2+ex+f)\,dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 1\times(x^3+dx^2+ex+f)\,dx \\ &= \frac{2}{5}+\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}d+2f\right)\end{aligned} \tag{4}$$

이 세 내적이 모두 0이 되어야 하기 때문에 $d=0,\ e=-3/5,\ f=0$이다.

▶ 따라서 $g_3(x)$는 다음과 같이 된다.

$$g_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \tag{5}$$

[문제5] 채점기준

1. 식 (1)의 방정식을 모두 제시하면 +5점.
2. 식 (2)의 방정식과, $a=0$을 제시하면 +4점.
3. 식 (3)의 방정식과, $b=0,\ c=-1/3$을 제시하면 +4점.
4. 식 (4)의 방정식과, $d=0,\ e=-3/5,\ f=0$을 제시하면 +4점.
5. 식 (5)를 제시하면 +3점.