Section 02

2013학년도 중앙대학교 논술 기출문제

자연계열 I

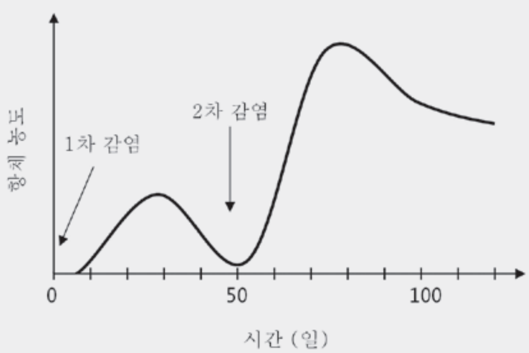
자연계열 I 논술 문제지

◈ **다음 글을 읽고 물음에 답하시오.**

(가)

영국의 의사인 제너는 우두에 걸린 사람은 천연두에 걸리지 않는다는 사실을 발견하고, 소젖을 짜는 사람의 손에 우두로 인해 생긴 물집의 내용물을 한 소년의 팔에 접종하였다. 그로부터 약 50일 후에 천연두를 앓고 있는 사람의 물집에서 내용물을 채취하여 이 소년의 팔에 투여하였다. 그 결과 소년에게 천연두의 증상이 나타나지 않았다. 이와 같은 현상은 인체의 방어 기제 중 하나인 항원-항체 반응을 통해서 나타난다. 최초 감염된 항원이 림프구가 생성한 항체와 결합한 후 백혈구에 의해 포식된 이후에도, 일부 림프구는 기억 세포로 전환되어 아래 그래프와 같이 동일한 항원에 2차로 감염되었을 때 다량의 항체를 신속하게 형성하여 질병을 예방하게 한다.

항체에는 항원과 결합하는 부위가 있는데, 이 결합 부위는 항원의 종류에 따라 다르기 때문에 항체는 한 종류의 항원과만 반응한다. 이 성질을 항원-항체 특이성이라 한다.



(나)

물체를 떨어뜨려 바닥에 충돌시킬 때 물체의 성질에 따라 튀어 오르는 높이가 다르다. 만일 물체가 처음 높이까지 튀어 오른다면 이런 경우를 완전 탄성 충돌이라 부른다. 특히 질량이 같은 두 물체가 직선상에서 완전 탄성 충돌한다면 두 물체는 충돌 전후 속도를 교환하고 전체 운동 에너지는 보존된다. 완전 탄성 충돌을 제외한 일반적인 충돌을 비탄성 충돌이라 하고, 특히 충돌한 후 두 물체가 한 덩어리로 붙는 경우를 완전 비탄성 충돌이라 한다. 비탄성 충돌의 경우 운동 에너지가 보존되지 않으며, 완전 비탄성 충돌의 경우 운동 에너지의 소모가 가장 크기 때문에 충돌로 인한 열이 가장 많이 발생한다.

(다)

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$ 의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 아래와 같이 나타내며, 이를 극한값이라고 한다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha, \text{ 또는 } x\to\infty \text{ 일 때 } f(x)\to\alpha$$

극한값은 다음과 같은 경우 적분으로 표현되기도 한다. 함수 $y=f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속일 때 아래의 식이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx \quad \text{단, } \Delta x=\frac{b-a}{n},\quad x_k=a+k\Delta x$$

$x\to\infty$ 일 때 $(1+1/x)^x$ 의 값은 특정한 값 e 에 수렴함이 알려져 있다. e 는 그 값이 2.718281828459045⋯인 무리수이다. 따라서 $h=1/x$로 놓으면, $x\to\infty$ 일 때, h 의 값은 0보다 크면서 한없이 0에 가까워지므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=e$$

e 는 집단 구성 요소의 증가를 설명하는 데도 유용하다. 1개의 구성 요소가 Δt 후 α 개의 새로운 구성 요소를 생성할 때, 시간 $n\Delta t$ 에서 구성 요소의 개수를 $N(n\Delta t)$라고 하면

$$\begin{gathered} N(\Delta t)=N(0)(1+\alpha) \\ N(2\Delta t)=N(\Delta t)(1+\alpha) \\ \vdots \\ N(n\Delta t)=N((n-1)\Delta t)(1+\alpha) \end{gathered}$$

이므로,

$$N(n\Delta t)=N(0)(1+\alpha)^n$$

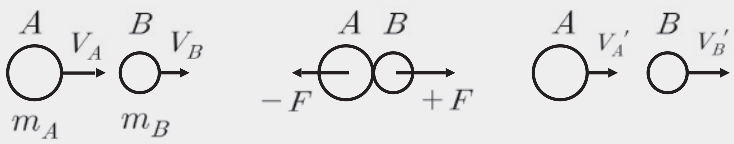
임을 알 수 있다. 여기서 $t=n\Delta t$, $\beta=\alpha/\Delta t$라 하고, 극한 $\Delta t\to 0$을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N(t)&=N(0)\lim_{\Delta t\to 0}(1+\beta\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \\ &=N(0)\lim_{\Delta t\to 0}(1+\beta\Delta t)^{\frac{1}{\beta\Delta t}\beta t} \\ &=N(0)\,e^{\beta t} \end{aligned}$$

즉, 집단 구성 요소의 증가는 밑이 e 인 지수 함수로 표현된다.

(라)

서로 다른 두 물체 사이에 힘이 상호 작용할 때, 두 물체의 운동량의 합은 항상 일정하게 보존된다. 이를 운동량 보존 법칙이라 한다. 운동량 보존 법칙은 마찰력과 같이 외부에서 작용하는 알짜힘이 없이 물체끼리만 힘을 작용하면 항상 성립한다. 예를 들어, 아래 그림과 같이 질량이 m_A, m_B인 두 물체 A와 B가 V_A, V_B 의 속도로 운동하다가 충돌한 후의 속도가 V_A', V_B'이 된 경우를 생각해 보자.



충돌 전　　충돌　　충돌 후

충돌하는 동안 B가 A로부터 받은 평균 힘이 $+F$라면 작용 반작용의 법칙에 의해 A가 B로부터 받은 평균 힘은 $-F$이다. 두 물체가 접촉하여 힘을 작용한 시간을 Δt 라고 하면, A가 받은 충격량은 $-F\Delta t$ 이고 B가 받은 충격량은 $F\Delta t$ 가 된다. 이때 A와 B가 받은 충격량만큼 운동량이 변하므로 다음의 식이 성립한다.

A가 받은 충격량 = A의 운동량의 변화량 : $-F\Delta t = m_A V_A' - m_A V_A$

B가 받은 충격량 = B의 운동량의 변화량 : $+F\Delta t = m_B V_B' - m_B V_B$

두 식을 더하면 다음과 같이 충돌 전후 두 물체의 운동량의 합이 일정함을 알 수 있다.

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A V_A' + m_B V_B'$$

외부의 힘을 이용할 수 없는 우주 공간에서 추진력을 얻기 위해 진행하고자 하는 방향의 반대 방향으로 연소 가스를 분사하는데, 이는 운동량 보존을 이용하는 좋은 예이다.

(마)

케플러는 행성의 운동과 관련하여 행성이 타원 궤도를 그리며 태양 주위를 돈다는 타원 궤도의 법칙을 발표하였다. 이후, 태양과 행성을 잇는 선이 같은 시간에 언제나 같은 면적을 휩쓴다는 면적 속도 일정의 법칙과 행성 운동의 타원 궤도에서 장축의 반지름(a)과 공전주기(T) 사이에 일정한 관계($a^3 / T^2 =$ 일정)가 있다는 조화의 법칙을 발견하였다.
태양을 중심으로 장축의 반지름이 a인 타원 궤도를 공전하는 물체의 에너지 E는 운동에너지와 중력 위치 에너지의 합으로 태양의 질량을 M, 공전하는 물체의 질량을 m이라 할 때, 다음의 식으로 표현된다. 단, M은 m보다 매우 크고, G는 만유인력 상수이다.

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

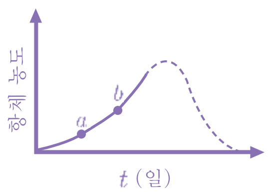
위의 식을 이용하면, 태양의 주위를 공전하는 행성의 속력을 근사적으로 계산할 수 있는데, 지구의 경우 초당 약 30km에 달한다.

[문제 1] 제시문 (가)에는 우리 몸에 침투한 항원이 림프구에 의해 생성된 항체와 백혈구에 의해 제거되는 과정이 설명되어 있다. 이 과정을 제시문 (나)의 충돌 현상 및 운동 에너지의 관점에서 논리적으로 설명하시오. 단, 침투한 항원은 최종적으로 모두 백혈구에 의해 포식된다고 가정한다. [20점]

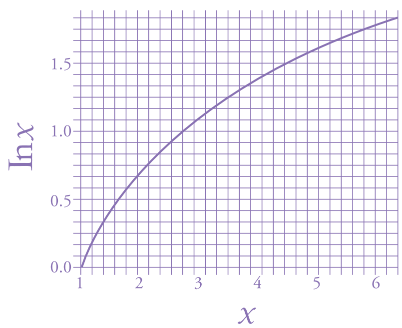
[문제 2] 제시문 (가)에서 항원에 대항하여 림프구에 의해 생성되는 항체의 농도를 $f(t)$라 하고, 항체 생성 초기 $f(t)$는 아래와 같이 지수 함수로 표현된다고 하자.

$$f(t) = A(e^{kt} - 1)$$

여기서 A는 비례 상수, k는 증가 계수, t는 항체 생성 시점으로부터의 시간이다.
제시문 (가)와 같이 천연두 백신을 어떤 사람에게 접종하였고, 항체 생성 시점부터 항체 농도의 시간에 따른 변화가 아래 그림과 같다. a, b점에서 항체 농도가 아래 표와 같이 측정되었을 때, 그림에서 실선으로 표시된 항체 생성 초기 구간에서 A와 k를 구하는 과정을 제시문 (다)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 필요시 아래의 자연 로그 그래프를 이용하시오. [20점]



	a	b
t (일)	7	15
항체 농도	2	7

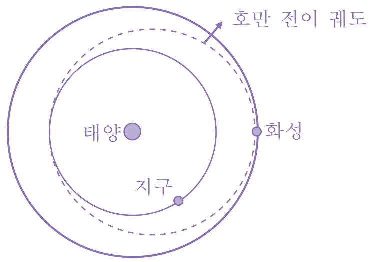


[문제 3] 사람의 몸을 감염시켜 질병을 일으키는 세균이 있다. 감염 이후 세균은 분열을 통해 개체 수가 증가하는데, 그 증가율이 p라고 하자. 여기서 증가율이란 단위 시간 동안 새롭게 생성되는 개체의 수(ΔN)와 현재 개체 수(N)의 비($\Delta N/N$)를 말한다. 제시문 (가)와 같이 체내에서 이 세균에 대항하는 항체가 만들어지는데, 단위 시간 동안 생성되는 항체의 수는 세균의 수에 비례하여 qN이다. 만들어진 항체는 즉시 세균을 제거하며, 하나의 항체가 하나의 세균과 반응한 후 소멸한다. 초기에 N_0개의 세균이 침입하였을 때, 임의의 시간 t에서 남아 있는 세균의 수를 구하는 과정을 제시문 (다)에 근거하여 논리적으로 설명하시오.
단, $p > 0$, $q > 0$이며, N_0는 매우 큰 값이다. [20점]

[문제 4] 아래 그림과 같이 궁사가 후방으로 활을 쏘고 그 반작용에만 의존하여 진행하는 우주선이 있다고 하자. 우주선은 초기에 정지해 있었고, 궁사와 화살의 질량을 포함한 우주선의 초기 질량은 M, 화살 한 개의 질량은 m이다. 우주선에는 충분히 많은 수의 화살이 있으며, 우주선과 화살의 상대 속력은 V_a로 일정하다. n번째 화살이 발사된 직후 우주선의 속력을 V_n이라 할 때, 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 $\lim_{n \to \infty} V_n$을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, $n \times m - \text{일정} - M_a (< M)$이다. [20점]

[문제 5] 2012년 8월 미국의 화성 탐사 로봇 큐리오시티(Curiosity)가 화성에 무사히 착륙한 것이 큰 화제가 되었다. 큐리오시티를 싣고 화성으로 날아간 우주선은 에너지의 소모를 최소화하기 위해 '호만 전이 궤도(Hohmann transfer orbit)'라 불리는 궤도를 따라 이동했는데, 이는 아래 그림의 점선과 같이 지구 궤도와 화성 궤도를 접하는 타원 궤도를 말한다. 호만 전이 궤도를 이용한 화성 여행은 다음과 같은 단계로 진행된다.

1. 지구에서 1차 추진을 하여 호만 전이 궤도에 진입한다.
2. 화성 궤도와 접하는 지점에서 2차 추진을 하여 화성에 도착한다.
3. 화성에서 지구로 돌아올 때에는 위 과정을 역순으로 진행한다.



지구와 화성의 공전 궤도가 각각 반지름 R 과 $3R/2$ 인 원이고, 지구에서 호만 전이 궤도를 이용하여 화성에 가려 한다고 하자. 1차 추진과 2차 추진을 통해 얻어야 할 우주선의 속력 변화를 각각 ΔV_1 과 ΔV_2 라고 할 때, $\Delta V_2/\Delta V_1$ 를 구하는 과정을 제시문 (라)와 (마)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 지구와 화성의 공전 방향은 동일하고, 우주선의 질량 m 은 태양의 질량 M 보다 매우 작으며, 우주선의 운동에서 태양의 만유인력을 제외한 다른 외부 힘은 없다고 가정한다. 필요시 태양에서 거리 r 만큼 떨어진 지점의 중력 위치에너지 $U(r)$ 의 식을 이용하시오. [20점]

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

평가 목표 및 출제 의도

❶ 평가목표

본 논술시험은 고등학교 교과과정을 공부한 학생은 무난히 이해할 수 있는 내용을 다루었으며, 자연 현상과 수리에서 나타나는 '함수의 극한'과 '운동량 보존'이라는 주제를 바탕으로 출제되었다. 혈액의 기능 중 항원–항체 반응, 함수의 극한과 지수함수, 운동량 보존, 행성의 운동 등 고교 과학 및 수학 과정을 통해 친숙한 내용들에 기초한 제시문을 준비하였고, 내용의 올바른 이해를 바탕으로 논리적 사고력, 표와 그래프의 해석 등 수리적 문제 해결 능력과 자연계열 대학 진학생들에게 요구되는 기본적인 추론 능력 및 직관력을 측정하는데 목표를 두었다. 대학 진학 후 전공을 깊이 있게 공부하는 데에 필요한 잠재력을 지닌 창의적 인재를 선발하고자 하였으며, 문제의 이해와 추론 과정은 깊이 있는 논리적 사고를 필요로 하지만, 계산은 복잡하지 않은 문항들을 위주로 출제하였다.

❷ 제시문 출전(전체 또는 부분 발췌 포함)

제시문 (가) : 생물Ⅰ (중앙교육진흥원 pp.60–61, 지학사 p.57)
제시문 (나) : 물리Ⅱ (교학사 pp.81–82)
제시문 (다) : 수학Ⅱ(천재교육 p.97, 금성출판사 p.79, p.96), 미적분과통계기본(금성출판사 p.100)
제시문 (라) : 물리Ⅱ (금성출판사 pp.53–55)
제시문 (마) : 지구과학Ⅰ (지학사 p.228)

❸ 출제의도

[문제 1] 제시문 (가)에서 설명된 지문은 혈액의 기능 중 인체의 면역체계에서 항원–항체 반응의 기본적인 원리를 이해하고, 이를 제시문 (나)에서 설명된 탄성, 비탄성 충돌을 이용한 운동량 보존의 측면에서 논리적으로 서술할 수 있는가를 평가한다.

[문제 2] 제시문 (가)에 나타난 항원–항체 반응에서 림프구에 의한 항체 농도의 증가를 수학적으로 표현하고 풀이하는 능력을 평가한다. 즉, (1) 지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여, 로그함수 그래프로부터 지수함수의 값을 유추할 있는 능력과, (2) 제시문 (다)에서 설명된 e 를 바탕으로, 주어진 e 를 밑으로 하는 지수함수의 모양을 이용하여 지수함수의 계수를 논리적으로 구하는 능력을 평가한다.

[문제 3] 제시문 (가)와 같은 항원–항체 반응에서 세균과 이에 대항하는 항체 사이의 역학 관계를 이해하고, 이를 수학적으로 표현하여 세균의 수가 증가 또는 감소하는 과정을 이해하고, 수리적인 해법을 도출하는 능력을 평가한다. 제시문 (다)에 나타난 집단의 증가가 e 를 밑으로 하는 지수함수로 표현되는 과정을 이해하고, 이를 주어진 문제에 적용하여, 문제에서 주어진 상황을 수식적으로 유도하고, 함수의 극한에 대한 개념을 이용하여 지수함수의 조합으로 나타내는 과정을 논리적, 수리적으로 설명하는 능력을 평가한다.

[문제 4] 제시문 (라)에서 설명된 운동량 보존과 제시문 (다)의 극한값 개념을 이용하여 실제 우주선의 움직임을 설명하는 단순한 속도 방정식을 논리적으로 유도하는 문제이다. 학생들이 운동량 보존을 이용하여 화살을 쏜 이후 우주선의 속도 변화를 점화식으로 설명할 수 있는지와, 논리적 추론 과정을 거쳐 그 극한값을 간단한 정적분으로 변환할 수 있는지 여부를 평가한다.

[문제 5] 최근 세계적인 화제가 되었던 화성 탐사 우주선이 화성으로 이동한 방법을 교과서에서 배운 운동량 보존과 에너지 보존으로 설명하는 문제이다. 학생들은 지구, 호만 전이 궤도, 화성의 공전 속도가 서로 다르다는 점과 궤도 전환을 위해서는 각 궤도의 접점에서 속력 변화가 필요하다는 점을 논리적으로 파악해야 한다. 그 후 이를 수식으로 표현하여 호만 전이 궤도를 이용하기 위한 속력 변화를 구해야 한다. 이해력과 논리력을 기반으로 종합적 사고능력을 평가하는 문제이다.

예시답안/채점기준

[문제1]

예시답안

우리 몸에 침투한 항원은 항체와 결합한다. 이와 같은 반응은 서로 다른 두 물체가 충돌되어 한 덩어리가 되는 경우로서 항원이 항체와 결합하는 경우로서 완전 비탄성 충돌에 해당하며 이 반응은 운동에너지가 보존되지 않는 (감소하는) 반응이다.

또한, 결합한 항원–항체 복합체*는 백혈구와 결합(충돌)하여 항 덩어리가 된 후, 제거되어 진다. 이와 같은 반응은 또한 완전 비탄성 충돌에 해당하며 이 반응 또한 운동에너지가 보존되지 않는 (감소하는) 반응이다.

– '항원–항체 결합체', '항원과 결합한 항체', '항체와 결합한 항원', 등 항원과 항체가 같이 결합된 것이라는 의미의 표현에는 점수를 부여함.

채점기준

* 문제의 과정은 두 단계로 나눠짐.

1 단계 – 항원이 항체와 결합

2 단계 – 결합한 항원–항체 복합체가 백혈구와 결합

* 단계를 명확하게 나눠서 설명한 경우 아래 점수를 부여.

* 단계를 명확하게 나누지 않거나 언급이 없는 경우, 또는 두 단계 중 하나만 해당한다는 언급이 있는 경우는 아래 항목의 점수에서 각각 (–3)을 부여함.

– 항원이 항체와 결합하는 경우와 항원–항체 복합체가 백혈구와 결합하는 경우 모두 완전 비탄성 충돌이라는 언급이 있으면 (10점)

– 항원이 항체와 결합하는 경우와 항원–항체 복합체가 백혈구와 결합하는 경우 모두 운동에너지가 보존되지 않는 반응이라는 언급이 있으면 (10점)

[문제2]

예시답안

▶ 림프구가 항체를 생성하는 초기에 항체 농도의 식은 아래와 같다.

$$f(t) = A(e^{kt} - 1) \tag{1}$$

▶ 두 점 a와 b를 이용하면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(7) &= A(e^{7k} - 1) = 2 \\ f(15) &= A(e^{15k} - 1) = 7 \end{aligned} \tag{2}$$

▶ 이 두 식을 연립하면 다음과 같다.

$$\frac{e^{7k} - 1}{e^{15k} - 1} = \frac{2}{7} \tag{3}$$

$$A(e^{15k} - e^{7k}) = 5 \tag{4}$$

▶ 주어진 자연로그함수 그래프를 이용하여 식 (3)을 만족하는 k를 구하면,

$k = 0.1$일 때 $e^{7k} = 2,\ e^{15k} = 4.5$으로 식 (3)을 만족한다.

▶ 또한, 이로부터 식 (4)를 만족하는 $A = 2$를 구할 수 있다.

채점 기준

1. 식 (2) 또는 (3)을 바르게 제시하면 +8점.
2. 식 (2) 또는 (3)을 이용하여 $k=0.1$과 $A=2$ 중 한 개를 제시하면 +8점
3. $k=0.1$과 $A=2$ 중 나머지 한 개를 마저 제시하면 +4점
4. 위 기준 2와 3을 모두 틀렸지만 그래프를 이용하려는 바른 시도가 있으면 +4점

[문제3]

예시답안

▶ 초기 세균의 수가 N_0 이고, 시간 Δt 후의 세균의 수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N(\Delta t) &= N_0 + p\Delta t N_0 - q\Delta t N_0 \\ &= N_0(1+(p-q)\Delta t) \\ N(2\Delta t) &= N(\Delta t)\ (1+(p-q)\Delta t) \\ &\vdots \\ N(n\Delta t) &= N((n-1)\Delta t)\ (1+(p-q)\Delta t) \end{aligned} \tag{1}$$

▶ 좌변끼리, 우변끼리 각각 곱하고 정리하면 아래와 같다.

$$N(n\Delta t) = N_0(1+(p-q)\Delta t)^n \tag{2}$$

▶ 제시문 (다)에서와 같이, $t=n\Delta t$로 하고, $\Delta t \rightarrow 0$로 하면 임의의 시간 t에서 $N(t)$를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0}(1+(p-q)\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \\ &= N_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0}(1+(p-q)\Delta t)^{\frac{1}{(p-q)\Delta t}(p-q)t} \\ &= N_0 e^{(p-q)t} \end{aligned} \tag{3}$$

채점 기준

1. 식 (1)을 바르게 제시하면 +10점
2. 위 기준 1을 바르게 제시하지 못했지만 점화식의 형태를 시도하면 +3점
3. 위 기준 1을 바르게 제시하지 못했지만 $N(\Delta t) = N_0(1+p-q)$로 시도하면 +6점
4. 위 기준 1을 바르게 제시하지 못했지만 기준 3과 유사하며 p대신 $p\Delta t$ 또는 q대신 $q\Delta t$를 시도하면 +6점
5. 식 (2)를 바르게 제시하면 +5점
6. 식 (2)를 바르게 제시하지 못했지만 위 기준 2, 3 또는 4를 통하여 일반식을 유도하면 +2점
7. 식 (3)을 바르게 제시하면 +5점

[문제4]

예시 답안

▶ 활을 쏘기 전 운동량은 활을 쏘고 난 후의 운동량과 동일하므로 n 번째 화살을 쏘기 전과 후 운동량 보존 식은 다음과 같다.

$$(M-(n-1)m)\ V_{n-1} = (M-nm)\ V_n + m(V_{n-1} - V_a)$$
$$(M-nm)\ V_n = (M-nm)\ V_{n-1} + m\, V_a$$
$$\therefore V_n = V_{n-1} + \frac{m}{M-nm} V_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{M-im} V_a$$

▶ $n \rightarrow \infty$, $nm = M_a$를 적용하면 다음과 같은 적분 결과를 얻을 수 있다.

$$V_\infty = \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m}{M-im}\right)V_a = \int_0^{M_a}\frac{dx}{M-x}V_a = -V_a \ln(M-x)\Big|_0^{M_a} = V_a \ln\left(\frac{M}{M-M_a}\right)$$

채점 기준

1. 운동량 보존을 언급하거나 식으로 이용하면 +5점
2. 점화식 수열의 형태(V_1, V_2 ... V_n)를 사용하면 +5점
3. V_n과 V_{n-1}(또는 V_{n+1})을 이용하여 정확한 점화식을 구했으면 +5점
4. 극한에서 적분을 적용하여 V_∞를 맞게 구했으면 +5점 (극한을 시도하면 +2점)

※ 각 단계에서 답이 틀려도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능

[문제5]

예시 답안

▶ 태양의 질량을 M, 우주선의 질량을 m이라 하면, 제시문 (마)에서 주어진 전체 에너지에서 문제에서 주어진 위치 에너지를 빼면 운동 에너지의 식을 얻을 수 있다. (a는 장축 반지름)

$$\frac{1}{2}mV^2 = E - U = \frac{-GMm}{2a} + \frac{GMm}{r}$$

▶ 지구, 화성, 호만 전이 궤도의 장축 반지름은 각각 R, $3R/2$, $5R/4$이므로, 속도 V_e, V_m, $V_h(r)$을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mV_e^2 = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2R}, \quad V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{1}{2}mV_m^2 = \frac{2GMm}{3R} - \frac{GMm}{3R}, \quad V_m = \sqrt{\frac{4GM}{3R} - \frac{2GM}{3R}} = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}$$

$$\frac{1}{2}mV_h^2 = \frac{GMm}{r} - \frac{2GMm}{5R}, \quad V_h(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{4GM}{5R}}$$

▶ 위의 식을 대입하여 ΔV_1과 ΔV_2를 구하면 다음과 같다.

$$\Delta V_1 = V_h(R) - V_e = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)$$

$$\Delta V_2 = V_m - V_h\left(\frac{3R}{2}\right) = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}}\right)$$

▶ 따라서 $\Delta V_2 / \Delta V_1$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}}}{\sqrt{\frac{6}{5}} - 1} = 5\left(\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{8}{15}} - \frac{4}{5}\right)$$

채점 기준

1. 운동 에너지를 이용하여 문제에 접근하면 +5점
2. 지구, 화성, 호만궤도(지구편), 호만궤도(화성편)의 속도를 구하면 각각 +2점
3. ΔV_1과 ΔV_2를 속도의 차이로 구하려고 시도하면 +2점
4. $\Delta V_2 / \Delta V_1$ 을 맞게 구했으면 +5점 (비율 계산을 시도하면 +2점)

※ 각 단계에서 답이 틀려도 논리성을 고려하여 부분 점수 2~3점 부여 가능