[문제 5] 질량, 부피 및 모양이 서로 같은 블록들이 일정한 간격으로 그림 (a)와 같이 지지대에 의해서 수직으로 배열되어 있다. 블록들이 다음의 규칙으로 자유낙하한다.

- 어느 시점에 첫 번째 지지대가 제거되어 첫 번째 블록이 자유낙하한다.
- k 번째 블록이 $k-1$ 번째 블록에 도달하기 직전에 $k-1$ 번째 지지대가 제거되고, k 번째 블록과 $k-1$ 번째 블록이 그림 (b)와 같이 붙어서 자유낙하한다.

n 번째 블록이 $n-1$ 번째 블록에 도달하기 직전의 속도를 v_n이라고 하자. 중력가속도를 g, 블록 사이의 간격을 h 라 할 때 제시문 (다), (마)에 근거하여 v_n을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 블록은 변형되지 않으며 지지대는 블록의 낙하운동에 아무런 영향을 주지 않는다고 가정한다. [20점]

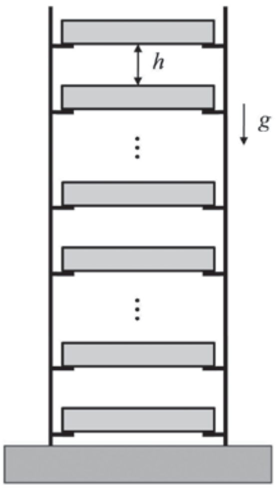

그림 (a)

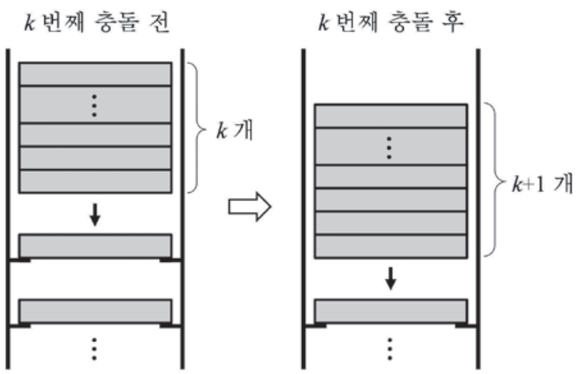

그림 (b)

– 끝 –

평가목표 및 출제의도

❶ 평가목표

본 문제는 고등학교 교과 과정을 공부한 학생은 무난히 이해할 수 있는 내용을 다루었으며, 제시문을 이해하고 논리적으로 사고를 전개하고 표와 그래프의 해석하며 수리적 문제를 해결할 수 있는 자연계열 대학 진학생들에게 요구되는 기본적인 능력을 측정하는데 목적이 있다. 고등학교 교과서에서 기본적으로 다루어지는 개념을 이해하고 있으면 제시문에 제시된 내용과 문제에 주어진 정보를 바탕으로 논리적인 추론을 통한 문제 해결을 할 수 있는 능력을 평가하는 것을 목표로 하고 있으며 이러한 능력은 대학 진학 후 수학에 필수적인 요소이기 때문에 논리적으로 사고할 수 있는 창의적 인재를 선발하게 된다. 이번 논술고사에

서는 학생들이 교과서에서 중요하게 다루어지는 에너지 보존 법칙을 제시문의 주제로 사용하였고 문제를 정확하게 이해하고 그래프와 제시문에서 제시된 내용을 활용하며 논리적으로 사고를 전개해야 하지만 계산은 복잡하지 않은 문항들을 출제하였다.

❷ 출제의도

[문제 1] 제시문 (나)에 나타난 대사율과 주변온도와의 상관관계를 이해하고 이를 제시문 (다)에 제시된 열에너지를 포함한 에너지 보존 법칙에 적용하여 문제에서 요구하는 내용을 논리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가한다. 고등학교 교과 과정에서 다루어지는 항상성의 유지라는 생명 현상과 고등학교 교과 과정에서 자세히 다루어지는 물리적 에너지 보존 법칙을 통합적으로 이해하고 적용하는 논리적 사고력을 측정하고자 한다.

◎ 관련교과 내용
– 항상성의 유지 : 천재교육 생물I p140
– 에너지 보존 법칙 : 한국과학창의재단 고등학교 과학 p426, 금성출판사 물리I p68, 금성출판사 물리II p120

[문제 2] 제시문 (가)에 나타난 반응속도를 문제에서 제시한 식과 로그 그래프를 이용하여 식을 완성하고 이를 근거로 미지의 실험에 대한 값을 논리적으로 추론하는 문제이다. 문제에서 제시한 식은 로그 그래프에서 읽은 식을 독립변수로 보면 일차함수가 되고 일차함수의 식은 일차함수로 표현되는 좌표 2개의 값을 알면 정할 수 있음에 착안하면 문제에서 모든 값이 주어진 실험에서 식을 완성하고 그 식에 값의 일부를 대입하여 미지의 값을 구하게 된다. 고등학교 교과 과정에서 다루어지는 그래프와 일차함수를 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

◎ 관련교과 내용
– 일차함수
– 로그함수

[문제 3] 제시문 (나)에서 근육이 힘을 내기 위해 수축할 때 생체 에너지가 소비된다는 것을 이해하고, 주어진 물리적 상황에서 두 근육 다발이 에너지를 최소로 소비하며 힘 평형을 유지하는 조건을 수리적으로 계산하는 문제이다. 물리적인 힘 평형 식과 두 근육의 힘에 따른 전체 생체 에너지 소비를 나타내는 식을 연계하여, 최소 생체 에너지 소비 조건에서 두 힘의 값을 계산한다. 이는 수리적으로는 한 직선과 타원이 접하는 점을 찾아내는 것이다. 물리적인 상황을 수식으로 표현하고, 이를 수리적으로 해결하는 능력을 평가한다.

◎ 관련교과 내용
– 운동의 법칙 : 천재교육 물리I p28
– 연립일차방정식 : 고려출판 수학I p34
– 이차함수 : 천재교육 수학 p238

[문제 4] 고등학교 교과 과정에서 중요하게 다루어지는 열에너지를 포함한 에너지 보존 법칙인 열역학 제1법칙을 이해하고 이를 수리적인 문제 해결에 논리적으로 적용할 수 있는 능력을 평가한다.

◎ 관련교과 내용

– 에너지 보존 법칙 : 한국과학창의재단 고등학교 과학 p426, 금성출판사 물리I p68, 금성출판사 물리II p120

– 기체 분자 운동론 : 지학사 화학I p68

[문제 5] 고등학교 교과 과정에서 중요하게 다루어지는 역학적 에너지 보존 법칙을 이해하고 운동량 보존의 법칙을 이해하고 점화식을 이용한 수열의 귀납적 정의를 활용하여 물리량을 표현하고 분석하는 종합적인 수리적 문제 해결 능력을 평가한다.

◎ 관련교과 내용

– 에너지 보존 법칙 : 한국과학창의재단 고등학교 과학 p426, 금성출판사 물리I p68, 금성출판사 물리II p120

– 운동량 보존의 법칙 : 한국과학창의재단 고등학교 과학 p418

– 수학적 귀납법 : 교학사 수학I p134

– 수열의 점화식 : 교학사 수학I p137

예시답안/채점기준

[문제 1 예시답안]

문제해설

▶ 항온 동물 A, B, C가 주변으로부터 흡수한 열의 양을 각각 Q_A, Q_B, Q_C각 동물의 내부 에너지의 증가를 ΔU_A, ΔU_B, ΔU_C각 동물이 주변에 한 일을 W_A, W_B, W_C라고 하면 제시문 (다)의 열역학 제1법칙에 의해 $Q_X = \Delta U_X + W_X$의 관계가 성립한다. 이 때 아래첨자 X는 A, B, C를 나타낸다. 문제에서 각 동물이 일을 한다는 조건이 없으므로 $W_X = 0$으로 놓고 추론하는 것이 타당하다. 그러면 $Q_X = \Delta U_X$가 된다.

[설명1]

▶ 항온 동물은 체온이 일정하므로 체내에 저장된 영양분을 제외한 나머지 부분의 내부에너지는 변하지 않는다고 할 수 있다. 즉, $Q_X = \Delta U_X = 0$이다. 기온이 매우 낮은 지역에서는 주변온도가 그림 (1) 그래프의 온도 A보다 낮으므로 문제에서 제시된 항온 동물은 주변으로 열을 빼앗기게 되어 체내에 저장된 영양분을 소비하여 $Q_X = 0$이 되게 한다. 이 때 대사율이 클수록 더 많은 열을 내는데 이것은 더 많은 열을 주변으로 빼앗기기 때문이다.

[설명2]

▶ 영양분을 계(system)에 포함시키면 다음과 같은 설명도 가능하다. 영양분을 포함하여 계(system)을 정의하면 $Q_X = \Delta U_X$가 된다. 기온이 매우 낮은 지역에서는 주변온도가 그림 (1) 그래프의 온도 A보다 낮으므로 문제에서 제시된 항온 동물은 주변으로 열을 빼앗기게 되어 $Q_X < 0$이 된다. 따라서 $\Delta U_X < 0$이다. 그렇다면 체내에 저장된 영양분의 내부에너지가 감소해야 한다. 이 때 대사율이 클수록 더 많은 영양분을 소비하여 내부에너지를 감소시키는데 이것은 더 많은 열을 주변으로 빼앗기기 때문이다.

▶ 따라서 대사율이 가장 낮은 동물 C가 가장 적은 열을 빼앗기므로 기온이 매우 낮은 지역에서 오랫동안 평균체온을 유지하기에 가장 적합하다.

예시답안 제시문 (다)에 따르면 항온동물 A, B, C에서도 $Q = \Delta U + W$가 성립해야 한다. 일을 고려하지 않을 때 체온의 항상성을 유지하기 위해서는 ΔU가 변하지 않으므로 $Q = 0$이다. 주변으로 빼앗기는 열 $-Q_{외부}$과 대사로 인해 공급되는 열 $Q_{대사}$의 합인데 이 합이 0이므로 $Q_{외부} = Q_{대사}$이다. 대사율이 작을수록 $Q_{대사}$가 작고 주변으로 빼앗기는 열이 적게 되어 대사율이 가장 낮은 동물 C가 가장 적은 열을 빼앗기므로 기온이 매우 낮은 지역에서 오랫동안 평균체온을 유지하기에 가장 적합하다.

[문제 1 채점기준] **20점 만점**

1. 열에너지를 포함한 에너지 보존 법칙을 논리적으로 적용했으면 10점
   - $Q = \Delta U + W$식을 이용하였으면 5점
   - 대사를 통해 공급되는 열(또는 대사를 통해 소비되는 영양분의 내부에너지)이 외부로 빼앗기는 열과 같음을 논리적으로 설명하였으면 5점
2. 외부로 빼앗기는 열이 대사율이 낮을수록 작음을 논리적으로 설명하여 동물 C가 기온이 매우 낮은 지역에서 오랫동안 평균체온을 유지하기에 가장 적합하다고 제시하면 10점
   - 외부로 빼앗기는 열이 대사율이 낮을수록 작다고 하였으면 5점
   - 동물 C라고 추정하였으면 5점

[문제 2 예시답안]

문제해설

▶ $v = \alpha \operatorname{Log}_{10} c + \beta$을 다음과 같이 쓰면 직선의 식이다. $x = \operatorname{Log}_{10} c,\ \ y = v,\ \ y = \alpha x + \beta$ 두 측정값은 xy 평면상의 두 점으로 볼 수 있으므로 두 점을 지나는 직선의 식을 이용하거나 $\alpha,\ \beta$를 미지수로 보면 연립일차방정식이 되어 두 측정값으로부터 $\alpha,\ \beta$를 정할 수 있다.

▶ <u>Step 1 :</u> 이 때 두 점의 y좌표는 v값으로 동일하나 x좌표는 문제에 제시된 로그함수의 그래프를 활용하여 정한다.

실험 1 : $\operatorname{Log}_{10} 250 = 2 + \operatorname{Log}_{10} 2.5 \approx 2.4$(그래프에서 $\operatorname{Log}_{10} 2.5 \approx 0.4$ 읽는다.)

실험 2 : $\operatorname{Log}_{10} 1600 = 3 + \operatorname{Log}_{10} 1.6 \approx 3.2$(그래프에서 $\operatorname{Log}_{10} 1.6 \approx 0.2$ 읽는다.)

▶ <u>Step 2 :</u> 이렇게 정해진 정해진 두 (x, y)좌표를 대입하여 $\alpha,\ \beta$에 관한 연립일차방정식을 세워 풀어서 일차함수 직선의 식을 얻는다. (두점을 지나는 직선의 식에 바로 대입하여 직선의 식을 구해도 된다.)

$$110 = 2.4\alpha + \beta$$
$$286 = 3.2\alpha + \beta$$

두 식의 차는 $176 = 0.8\alpha$

$\therefore \alpha = 220$

α를 결과를 대입하여 β를 구한다.

$\therefore \beta = 110 - 2.4 \times 220 = -418$

$y = 220x - 418$

▶ <u>Step 3 :</u> 실험 3에서 v의 값을 정하기 위해서는 앞에서 두 점의 x좌표를 정한 것과 같은 방식으로 일차함수 직선의 식에 대입할 x좌표를 정하여 대입한다.

$\text{Log}_{10}500 = 3 - \text{Log}_{10}2 \approx 2.7$ (그래프에서 $\text{Log}_{10}2 \approx 0.3$ 읽는다.)
$v = 220 \times 2.7 - 418 = 176$

예시답안 **$\text{Log}_{10}c$ 를 x로 v를 y로 보면 $v = \alpha\ \text{Log}_{10}c - \beta$는 직선의 식이다. 실험 1과 실험 2의 측정값과 로그함수 그래프에서 구해지는 $\text{Log}_{10}250 = 2 + \text{Log}_{10}2.5 \approx 2.4$ 및 $\text{Log}_{10}1600 = 3 + \text{Log}_{10}1.6 \approx 3.2$ 를 이용하여 $110 = 2.4\alpha + \beta,\ \ 286 = 3.2\alpha - \beta$를 풀면 $y = 220x - 418$를 얻는다. $\text{Log}_{10}500 = 3 - \text{Log}_{10}2 \approx 2.7$ 에서 실험 3의 x가 정해지므로 이 값을 직선의 식에 대입하면 $v = 220 \times 2.7 - 418 = 176$ 이 된다.**

[문제 2 채점기준] **20점 만점**

1. 직선의 식이나 일차연립방정식을 이용하여 문제를 논리적으로 설명했으면 7점
2. 로그함수의 그래프를 적용하여 근사값을 논리적으로 구했으면 7점
3. $v \approx 176$ 을 구했으면 6점

(v의 값을 구하는 과정을 논리적으로 제시하고 $v \approx 176$ 근처 예를 들어 $v \approx 170$ 또는 $v \approx 180$ 등을 제시했어도 만점을 준다. v의 값을 제시하지 않으면 부분 점수를 준다.)

[문제 3 예시답안]

문제해설

▶ 백색 근육 다발과 적색 근육 다발이 내는 힘이 각각 x와 y라 하면 가방에 대한 힘 평형 식은 아래와 같다.

$$x + y = 23 \tag{1}$$

▶ 이 때 사람이 소비하는 전체 생체 에너지 E_T는 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} E_T &= E_1 + E_2 \qquad (2) \\ &= 2x^2 + 4x + y^2 + 6y \\ &= 2(x+1)^2 + (y+3)^2 - 11 \end{aligned}$$

[방법 1]

▶ 식 (1)을 식 (2)에 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} E_T &= 2(x+1)^2 + (-x+26+3)^2 - 11 \\ &= 3x^2 - 48x + 667 \\ &= 3(x-8)^2 + 475 \end{aligned}$$

▶ 따라서 백색 근육 다발의 힘 $x = 8\,\text{N}$ 일 때 전체 생체 에너지 소비가 최소이다. 이 때 적색 근육 다발의 힘 $y = 15\,\text{N}$ 이다.

[방법 2]

▶ 식 (1)과 식(2)를 정리하면 아래와 같다.

$$x + y = 23 \tag{3}$$

$$\frac{(x+1)^2}{a} + \frac{(y+3)^2}{2a} = 1 \quad , \qquad a = \frac{E_T + 11}{2} \tag{4}$$

▶ 사람이 생체 에너지 소비를 최소화 하면서 근육에 힘을 낸다고 할 때, 식 (1)을 만족하면서 식 (2)가 최소가 되어야 한다. 즉, 직선 (3)과 중심이 (–1, –3)인 타원 (4)의 접점을 구해야 한다. 이 점은 식 (4)에 있는 타원의 점 중에서 접선의 기울기 dy/dx가 식 (3)의 기울기와 같은 점이다.

▶ 식(4)의 양변을 x로 미분하여 dy/dx를 구하면,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)^2}{a}+\frac{(y+3)^2}{2a}\right)\\ &=\frac{2(x+1)}{a}+\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{(y+3)^2}{2a}\right)\\ &=\frac{2(x+1)}{a}+\frac{dy}{dx}\frac{2(y+3)}{2a}=0\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2(x+1)}{y+3}$$

▶ 이 dy/dx가 –1이 되어야 한다.

$$y=2x-1 \qquad (5)$$

▶ 식 (5)와 식 (3)으로부터 $x=8,\ y=15$을 구할 수 있다. 즉 백색 근육 다발이 내는 힘 x는 $8\,\mathrm{N}$이고 적색 근육 다발이 내는 힘 y은 $15\,\mathrm{N}$이다.

예시답안 **백색 근육 다발과 적색 근육 다발이 내는 힘과 중력의 평형 식은 $x+y=23$이다. 사람이 소비하는 생체 에너지는 $E_T=E_1-E_2=2x^2-4x+y^2-6y=2(x-1)^2+(y+3)^2-11$이다. 힘 평형 식을 에너지 식에 대입하면 다음과 같은 이차식의 최솟값을 구하는 문제가 된다.**
$E_T=2(x+1)^2+(-x+26+3)^2-11=3x^2-48x+667=3(x-8)^2+475$. 따라서 백색 근육 다발의 힘 일 $x=8\,\mathrm{N}$때 전체 생체 에너지 소비가 최소이다. 이 때 적색 근육 다발의 힘 $y=15\,\mathrm{N}$이다.

[문제 3 채점기준] **20점 만점**

1. 힘 평형 식 (1)을 제시하면 **+5**
2. 전체 생체 에너지 식 (2)를 제사하면 **+5**
3. 방법 1 또는 방법 2로 해법을 제시하면 **+7**
4. 답을 정확하게 제시하면 **+3**

[문제 4 예시답안]

문제해설

▶ $1\ \mathrm{mol}$의 이상기체에 가해 준 열의 양을 Q, 내부 에너지의 증가를 ΔU, 이상기체가 외부에 한 일을 W라고 하면 $Q=\Delta U+W$의 관계가 성립한다. $Q=0$이므로 $Q=\Delta U+W=0$의 조건으로부터 $\Delta U=-W$인 관계를 얻는다. 즉 이상기체의 내부에너지는 이상기체의 부피가 팽창하여 외부에 한 일이 있으면 감소하고 반대로 외부로부터 일을 받으면 증가한다. 문제에서 제시된 이상기체의

내부에너지 $U=3RT/2$을 이용하면 $\Delta U=3R\ \Delta T/2$이고 제시문 (다)에서 제시된 기체가 외부에 한 일 $W=P\ \Delta V$을 $\Delta U=-W$인 관계에 대입하면 $\frac{3R\ \Delta T}{2}=-P\ \Delta V$을 얻는다.

▶ 이상기체의 부피와 온도의 관계를 구하기 위해서 이상기체의 압력 P를 V와 T로 나타내는 것이 편리하다. 이는 제시문 (라)에서 제시된 보일 – 샤를의 법칙과 기체상수 R을 이용하면 된다. 즉 $\frac{PV}{T}=R$에서 $\frac{P}{R}=\frac{T}{V}$을 $\frac{3R\ \Delta T}{2}=-P\ \Delta V$에 대입하면 $\frac{\Delta T}{\Delta V}=-\frac{2P}{3R}=-\frac{2T}{3V}$가 된다. 이 식은 압력이 거의 변하지 않은 아주 작은 양의 부피 변화량 ΔV에서 성립하는 식이다. 이 관계에서 다음을 알 수 있다. 기체의 부피가 팽창하면 기체의 온도는 감소한다. 기체의 부피가 팽창할수록 V는 증가하고 T는 감소하므로 $\frac{T}{V}$는 감소한다. 이것은 기체의 부피가 팽창할수록 단위 부피 변화당 온도의 변화율의 크기는 감소한다는 뜻이다.

▶ 이상기체의 부피와 온도의 관계를 구하기 위해 $\frac{\Delta T}{\Delta V}=-\frac{2T}{3V}$를 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.
$\frac{\Delta T}{T\Delta V}=-\frac{2}{3}\frac{1}{V}$ 한편 T를 V의 함수 $T(V)$로 놓고 $f(V)=\ln T(V)$라 하면
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}V}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}$을 얻을 수 있는데 이 식과 앞의 관계식을 같이 쓰면 다음 식이 얻어진다.
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{T}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta V}=-\frac{2}{3}\frac{1}{V}$ 이 식을 적분하면 다음을 얻는다.

$$f(V)=f(V_0)+\int_{V_0}^{V}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}V=f(V_0)+\int_{V_0}^{V}-\frac{2}{3}\frac{1}{V}\,\mathrm{d}V=f(V_0)-\frac{2}{3}\left[\ln(V)-\ln(V_0)\right]$$

다시 f를 T로 나타내면 이상기체의 부피와 온도의 관계가 다음과 같이 얻어진다.

$$f(V)-f(V_0)=\ln(T)-\ln(T_0)=\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)=-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{V}{V_0}\right).$$

$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 또는 $TV^{\frac{2}{3}}=T_0V_0^{\frac{2}{3}}=\text{일정한 값}$

예시답안 **이상기체에 열역학 제1법칙을 적용하면 $Q=0$이므로 $Q=\Delta U-W=0$의 조건으로부터 $\Delta U=-W$인 관계를 얻는다.**

$\Delta U=3R\ \Delta T/2$와 $W=P\ \Delta V$를 대입하면 $\frac{3R\ \Delta T}{2}=-P\ \Delta V$이다. 보일–샤를의 법칙과 기체상수의 정의에서 $\frac{PV}{T}=R$이므로 $\frac{\Delta T}{\Delta V}=-\frac{2P}{3R}=-\frac{2T}{3V}$이다. T를 V의 함수로 놓으면 $\frac{\mathrm{d}\ln(T)}{\mathrm{d}V}=\frac{\mathrm{d}\ln(T)}{\mathrm{d}T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}$이다. 이 식을 적분하면 다음을 얻는다.

$TV^{\frac{2}{3}}=\text{일정한 값}$ 임을 얻는다.

[문제 4 채점기준] **20점 만점**

1. 열역학 제1법칙을 제시하면 **+7**

2. $\frac{\Delta T}{\Delta V} = -\frac{2P}{3R}$ 나 이 식과 동일한 식을 논리적으로 제시하면 **+7**

   $\frac{\Delta T}{\Delta V} = -\frac{2T}{3V}$ 나 이 식과 동일한 식을 논리적으로 제시하면 **+10**

   (단, 두 식을 다 제시하면 $\frac{\Delta T}{\Delta V} = -\frac{2T}{3V}$ 을 제시한 것으로 본다.)

3. $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 또는 $TV^{\frac{2}{3}} = \text{일정한 값}$을 제시하면 **+3**

[문제 5 예시답안]

문제해설

블록 한 개의 질량을 m이라 하자.

▶ 첫 번째 블록이 두 번째 블록에 도달하기 직전까지는 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 감소된 위치에너지가 운동에너지로 전환된다. 즉, 다음의 식이 성립한다.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

▶ k 번째 블록과 $k+1$ 번째 블록이 그림 (b)와 같이 붙어서 자유낙하하기 시작하는 순간, 즉, 충돌 직후의 속력은 운동량 보존의 법칙에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{k}{k+1}v_k$$

▶ $k+1$ 번째 블록이 $k+2$ 번째 블록에 도달하기 직전까지는 $k+1$ 개의 블록에 대해 성립하는 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 감소된 위치에너지가 운동에너지로 전환된다. 즉, 다음의 식이 성립한다.

$\frac{1}{2}(k+1)m\left(\frac{k}{k+1}v_k\right)^2 + (k+1)mgh = \frac{1}{2}(k+1)mv_{k+1}^2$ 양변을 $\frac{1}{2}(k+1)m$으로 나누어 주면 식이 간단해 지는데 이것은 수열의 점화식이다.

$$\left(\frac{k}{k+1}v_k\right)^2 + 2gh = v_{k+1}^2$$

▶ 이 수열의 점화식에 $(k+1)^2$을 곱하고 다음과 같이 써 보자.

$$\begin{aligned}
&1^2v_1^2 + 2^2 \times 2gh = 2^2v_2^2 \\
&2^2v_2^2 + 3^2 \times 2gh = 3^2v_3^2 \\
&3^2v_3^2 + 4^2 \times 2gh = 4^2v_4^2 \\
&\qquad\cdots \\
&(n-2)^2v_{n-2}^2 + (n-1)^2 \times 2gh = (n-1)^2v_{n-1}^2 \\
&(n-1)^2v_{n-1}^2 + n^2 \times 2gh = n^2v_n^2
\end{aligned}$$

이 식을 모두 더하면 다음을 얻는다. $v_1^2 + 2gh\sum_{k=2}^{n}k^2 = n^2v_n^2$

$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$이므로 $v_1^2 + 2gh\sum_{k=2}^{n}k^2 = 2gh + 2gh\sum_{k=2}^{n}k^2 = 2gh\sum_{k=1}^{n}k^2 = n^2v_n^2$

▶ 제시문 (마)를 참조하여 수열의 합을 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$v_n^2 = \frac{2gh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2gh}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}gh,$$

$$v_n = \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{3n}gh}$$

예시답안 **첫 번째 블록이 두 번째 블록에 도달하기 직전까지는 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$ 이다. k 번째 블록과 $k+1$ 번째 블록이 그림 (b)와 같이 붙어서 자유낙하기 시작하는 순간 즉 충돌 직후의 속력은 운동량 보존의 법칙에 따라 $\frac{k}{k+1}v_k$ 이다. $k+1$ 번째 블록에 대해 비슷하게**

$\frac{1}{2}(k+1)m\left(\frac{k}{k+1}v_k\right)^2 - (k+1)mgh = \frac{1}{2}(k+1)mv_{k+1}^2$ **를 구할 수 있다.**

$$v_n^2 = \frac{2gh}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2gh}{n^2}\,\frac{n(n+1)(2n-1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{3n}gh,$$

$$v_n = \sqrt{\frac{(n-1)(2n+1)}{3n}gh}.$$

[문제 5 채점기준] 20점 만점

1. 운동을 논리적으로 설명했으면 7점
2. v_n을 수열로 보고 수열의 점화식을 논리적으로 잘 구했으면 7점
3. v_n의 점화식으로부터 일반항을 구하는 과정을 논리적으로 제시하고 정답을 구하면 6점

(수열의 일반항을 구하는 방법이 다르더라도 답을 구하는 과정을 논리적으로 제시하고 답이 맞으면 만점을 준다.)