[문제 5] 제시문 (나)에서 설명된, 장력에 따른 세포의 형태 및 크기의 변화를 관찰하기 위해 크기가 매우 작은 나노 격자를 이용하여 세포 내부에 있는 격자점의 수로 세포의 크기를 표시하려 한다. 장력이 가해진 상황에서 배양된 한 개의 세포가 격자 좌표에서 표1의 네 꼭짓점을 갖는 평행사변형 모양이었는데, 장력을 제거한 후 표2의 네 꼭짓점을 갖는 직사각형 모양으로 변형되었다고 하자. 장력이 가해진 상황에서 측정된 세포의 크기를 구하는 과정을 제시문 (마)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 세포의 경계에 있는 격자점들은 크기에 포함시키지 않는다. [20점]

표1

	x 좌표	y 좌표
꼭짓점 1	0	0
꼭짓점 2	65	39
꼭짓점 3	91	56
꼭짓점 4	156	95

→

표2

	x 좌표	y 좌표
꼭짓점 1	0	0
꼭짓점 2	13	0
꼭짓점 3	0	7
꼭짓점 4	13	7

– 끝 –

평가목표 및 출제의도

❶ 평가목표

본 논술시험은 고등학교 교과과정을 공부한 학생은 무난히 이해할 수 있는 내용을 다루었으며, 자연 현상과 수리에서 나타나는 '변환'이라는 주제를 바탕으로 출제되었다. 광합성, 세포의 형태, 광전효과, 행렬 등 고교 과학 및 수학 과정을 통해 친숙한 내용들에 기초한 제시문을 준비하였고, 내용의 올바른 이해를 바탕으로 논리적 사고력, 표와 그래프의 해석 등 수리적 문제 해결 능력과 자연계열 대학 진학생들에게 요구되는 기본적인 추론 능력 및 직관력을 측정하는데 목표를 두었다. 대학 진학 후 전공을 깊이 있게 공부하는 데에 필요한 잠재력을 지닌 창의적 인재를 선발하고자 하였으며, 문제의 이해와 추론 과정은 깊이 있는 논리적 사고를 필요로 하지만, 계산은 복잡하지 않은 문항들을 위주로 출제하였다.

❷ 제시문 출전(전체 또는 부분 발췌 포함)

- 제시문 (가) : 고등학교 생물II 교과서 (대학서림)
- 제시문 (나) : 자체 제작
- 제시문 (다) : 고등학교 물리I 교과서 (금성교과서)
- 제시문 (라) : 고등학교 적분과통계 교과서 (더텍스트)
- 제시문 (마) : 고등학교 기하와벡터 교과서 (성지출판)

❸ 출제의도

[문제 1] 제시문 (다)에서 설명된 입자로서의 빛과 파동으로서의 빛에 대한 물리적 성질을 이해하고 이를 제시문 (가)에서 설명된 광합성 과정에서 엽록소가 햇빛의 특정파장을 흡수하여 광합성을 한다는 것과 태양 빛 의 세기와 온도가 광합성에 미치는 영향에 대한 결과를 논리적으로 추론할 수 있는 사고력을 평가한다.

[문제 2] 제시문 (나)에서 설명된 세포의 모양 변화를 이해하고, 이를 제시문 (라)에서 설명된 독립시행의 확률에 적용하는 논리적 사고를 통해, 반복적인 추출을 통해 필요한 세포를 얻을 확률을 계산하여 소요되는 최소 시행 횟수를 구하는 과정을 설명하는 문제로서, 이해력을 바탕으로 한 수리 능력을 평가한다.

[문제 3] 제시문 (나)에서 설명된 외부 환경 인자에 따른 세포의 형태 변환에 대한 기본 개념을 이해하고, 세포의 특정 형태 변환을 일으키는 외부환경 조건이 함수로 주어졌을 때, 이 세포가 만들어지는 영역을 수리적으로 계산하는 문제이다. 서로 독립인 두 외부 환경 변수, 수축 활성 인자의 농도와 장력이 각각 배양접시의 x축, y축과 선형함수 관계일 때 배양접시에 있는 세포들의 변환에 따라 만들어진 영역이 두 직선으로 주어졌다. x축과 수축 활성 인자의 농도의 관계식이 바뀌었을 때 주어진 두 직선이 변환되는 것을 논리적으로 이해하고, 이를 수리적으로 해결하는 능력을 평가한다.

[문제 4] 제시문 (다)에서 설명된 광전효과는 아인슈타인이 광자의 개념을 도입하여 설명한 것으로 학생들이 물리I을 통해 매우 친숙하게 배운 소재이다. 광자의 개념을 실제 레이저의 출력에 적용하여, 일정한 출력을 갖는 레이저 광에서 평균적으로 단위 시간 당 일정한 수의 광자가 나온다는 점에 착안, 이를 제시문 (라)에서 설명된 독립시행 평균값의 확률 계산에 적용하는 문제로서, 광자의 수가 0이 되는 상황이 바로 변환 오류에 해당하는 상황이라는 점을 추론하는 것이 문제 풀이의 핵심이다. 사고의 방향을 올바로 설정하면 수식 전개는 매우 간단한 문제로서, 이해력과 직관력을 바탕으로 한 전반적인 문제해결 능력을 평가한다.

[문제 5] 일차변환이 행렬에 의해서 결정되는 것을 알고 있고, 일차변환의 성질을 잘 이해하고 있는지를 평가하는 문제이다. 모든 성분이 정수이고 역행렬을 가지는 2×2 행렬에 의해 결정되는 일차변환은 정수격자점의 집합을 그 자신으로 보내는 일대일대응임을 이해한 후, 문제의 지문에 이를 잘 적용하면 문제를 쉽게 해결할 수 있다.

예시답안/채점기준

[문제1] 예시답안

▶ 엥겔만 실험은 해캄이 특정 파장의 햇빛만 흡수하여 광합성에 이용한다. 이는 제시문 (다)에서 특정 주파수 이상(특정 파장 이하)의 빛에서만 발생하는 광전효과와 같이 빛의 입자성으로 설명할 수 있다. 그러나 광전효과가 특정 주파수이상(특정 파장 이하)의 빛에서는 항상 발생하는 데 비해 광합성은 특정 파장에서만 발생하므로 부분적인 설명만 가능하다.

▶ 엥겔만의 실험에서 보이는 광합성의 파장 특성은 빛의 파동성으로는 설명할 수 없다. 파동의 에너지는 파장

뿐 아니라 진폭에 따라 변하기 때문에 다른 파장에서 광합성이 발생하지 않는 상황을 파동의 관점에서 설명할 수 없다.

▶ 블랙만의 실험에서 초기 광합성률은 빛의 세기에 따라 증가하며, 빛의 세기 변화는 제시문 (다)의 빛의 입자성으로는 광자 수의 변화로, 빛의 파동성으로는 진폭의 변화로 설명할 수 있으므로 입자성과 파동성 모두로 설명 가능하다.

▶ 블랙만의 실험에서 어느 정도 빛이 강해지면 더 이상 광합성률이 증가하지 않고, 또한, 온도에 따라 광합성률이 달라지는 것은 빛의 입자성이나 파동성으로 설명이 불가능 하므로 블랙만 실험은 입자성과 파동성으로 모두 부분적인 설명만 가능하다.

[문제1] 채점기준

다음과 같은 의미의 문장이 있으면 옆에 있는 점수를 부여한다.

1. 엥겔만 실험은 빛의 입자성으로 설명 가능하다 : **+4점.**
2. 엥겔만 실험은 빛의 파동성으로 설명 불가능하다 : **+1점.**
3. 블랙만 실험은 빛의 파동성으로 설명 가능하다 : **+7점.**
4. 블랙만 실험은 빛의 입자성으로 설명 가능하다 : **+7점.**
5. 블랙만 실험은 입자성과 파동성으로 <u>부분적인 설명만</u> 가능하다 : **+1점.**

[문제2] 예시답안

▶ $p=0.2$인 사건이 N번의 시행에서 적어도 2회 이상 발생할 확률이 0.5이상인 최소의 N을 구하는 문제이다.

▶ 발생할 확률이 p인 사건이 N번의 시행에서 0회 또는 1회 발생할 확률이 0.5미만인 최소의 N을 구하는 문제로 생각할 수 있으므로 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}_N C_0 (1-p)^N + {}_N C_1 (1-p)^{N-1} p &< 0.5 \\
(0.8)^{N-1}(0.8+0.2N) &< 0.5
\end{aligned}
$$

▶ 양변에 상용로그를 취하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(N-1)\log 0.8 + \log(0.8+0.2N) < -\log 2 \\
&N(1-3\log 2) + 1 - 2\log 2 > \log(0.8+0.2N)
\end{aligned}
$$

▶ 로그그래프에서 $\log 2 \simeq 0.3$을 대입하면, 식이 다음과 같이 간단해 진다.

$$\frac{N}{10} - 0.4 > \log(0.8+0.2N)$$

▶ 로그그래프를 이용하면, $N=8$부터 부등식이 성립함을 알 수 있다.

[문제2] 채점기준

1. 사건이 N번의 시행에서 0회 또는 1회 발생할 확률의 합이 0.5미만인 최소의 N을 구하는 문제로 $1-p(0)-p(1) \geq 0.5$와 같은 방식을 제시하면 **+5점.**
2. ${}_N C_0 (1-p)^N + {}_N C_1 (1-p)^{N-1} p < 0.5$, $(0.8)^{N-1}(0.8+0.2N) < 0.5$, 또는 $1 - {}_N C_0 (1-p)^N - {}_N C_1 (1-p)^{N-1} p \geq 0.5$의 형식으로 식을 표현했으면 **+5점.**

(만약 식을 전개하지 못하고 2, 3, 4,... 회를 모두 더하면 된다는 형식으로 쓰고 끝냈으면 +2점만 부여.)

3. 양변에 상용로그를 취하여 주어진 로그그래프를 이용할 수 있도록 식을 $\frac{N}{10} - 0.4 > \log(0.8 + 0.2N)$ 형태로 정리했으면 **+5점 (로그만 보이면 점수)**.
4. $N = 8$ 의 답을 썼으면 **+5점**.
5. 답과 내용이 모두 틀렸으나 나름대로 논리를 전개하려 했으면 **+2점** 부여.

[문제3] 예시답안

▶ 농도를 T 라 하면 x 축과 T 와의 관계는 그림 (a)에서 아래와 같다.

$$T = 10^{-2}x \tag{1}$$

▶ y_1과 y_2의 원래 식의 x 에 식 (1)을 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot 10^2\, T - 50 \\ y_2 &= 0.5 \cdot 10^2\, T + 25 \end{aligned} \tag{2}$$

▶문제에서 농도 T 와 x 축 사이의 관계가 아래와 같이 재설정 되었다.

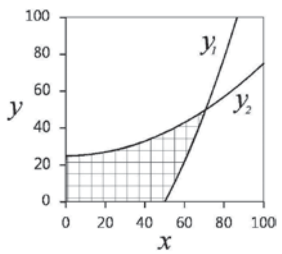
$$T = 10^{-4}x^2 \tag{3}$$

▶식 (2)에 식 (3)을 대입하면 y_1과 y_2는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x^2}{50} - 50 \\ y_2 &= \frac{x^2}{200} + 25 \end{aligned} \tag{4}$$

▶ y_1과 y_2의 교차점을 구하면

$$\begin{aligned} & y_1 = y_2 \\ & \frac{x^2}{50} - 50 = \frac{x^2}{200} + 25 \\ & \frac{3x^2}{200} = 75 \\ & x = 50\sqrt{2} \end{aligned}$$



▶ y_1가 x 축과 교차하는 점은 (50, 0)이다.

▶ 따라서 A영역의 면적은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_0^{50} y_2\,dx + \int_{50}^{50\sqrt{2}} y_2 - y_1\,dx \\ &= \int_0^{50} \frac{x^2}{200} + 25\,dx + \int_{50}^{50\sqrt{2}} \frac{x^2}{200} + 25 - \frac{x^2}{50} + 50\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{600} + 25x\right]_0^{50} + \left[\frac{-3x^3}{600} + 75x\right]_{50}^{50\sqrt{2}} \\ &= 2500 \times (\sqrt{2} - 2/3) \simeq 1868.9 \end{aligned}$$

▶ 전체 영역이 $10^4\,mm^2$에 10^4개의 세포가 균일하게 퍼져 있으므로, 영역 A에는 1868개의 세포가 있다.

[문제3] 채점기준

1. 식 (4)의 y_1과 y_2가 변환된 식을 올바르게 제시하면 **+10점.**
2. x 축과 y_1의 교점, y_1과 y_2의 교점을 맞게 찾았으면 **+4점.**
3. 적분을 통해 답을 구하려 하면 **+2점.**
4. 적분을 성공하고, 아래의 값들 중 하나를 제시하면 **+4점.**

$$2500\times(\sqrt{2}-2/3),\quad 1868.0-1869.0,\quad 1868,\quad 1869$$

5. 위의 과정 중 부분적으로만 맞은 답은 절반의 점수로 계산.

[문제4] 예시답안

▶ 1이 0으로 변환되는 경우의 확률을 P_{10}, 0이 1로 변환되는 경우의 확률을 P_{01}로 쓰기로 할 때, 2진수 정보에 0과 1이 각각 50%씩 포함되어 있으므로 하나의 비트에서 변환 오류가 발생할 가능성 $P_{오류}$는 다음과 같다.

$$P_{오류}=\frac{P_{10}+P_{01}}{2}$$

▶ 레이저의 평균 광출력을 W라고 하면, 제시문 (다)에서 아인슈타인의 설명에 근거하여 1초당 레이저에서 나오는 광자 수의 평균값을 알 수 있으며, 이를 초당 발생하는 비트 수로 나눈 비트 당 광자 수의 평균값 m은 다음의 식으로 계산된다.

$$m=\frac{W}{hf}\times\frac{1}{10^6}$$

▶ 스위치에 오류가 없으므로 1이 0으로 변환되는 경우는 레이저에서 나오는 광자 수의 변화로 인한 문제이며, 제시문 (라)에서 $n=0$이 되는 경우에 해당하므로 P_{10}은 다음과 같이 계산된다.

$$P_{10}=p(0)=\frac{m^0e^{-m}}{0!}=e^{-m}$$

▶ 스위치가 오류 없이 동작하는 경우라고 하였으므로 0에 해당하는 신호에서 광자의 수는 항상 0이다. 따라서 $P_{01}=0$이다.

▶ 따라서 $P_{오류}\le 10^{-9}$이 되기 위한 필요한 레이저의 평균 광출력 W는 다음과 같이 계산된다.

$$10^{-9}\ge\frac{e^{\frac{-W}{10^6hf}}}{2}$$

$$\therefore W\ge -10^6\times hf\times\ln(2\times10^{-9})=10^6\ln(5\times10^8)hf$$

[문제4] 채점기준

1. $P_{오류}$의 식을 바르게 설명했으면 **+5점.**
2. 레이저 출력이 광자의 수와 관련된다고 표현했으면 **+5점.**
3. P_{10}와 P_{01}의 식을 바르게 표현했으면 **+5점.** 둘 중 하나만 맞으면 **+3점.**
4. W의 식을 바르게 구했으면 **+5점.**
5. 헤매는 학생의 경우 다음의 항목을 이용하여 부분점수 부여.
   - 10^9비트 중 1개의 오류는 1000초 동안 1개의 오류에 해당한다고 쓰면 **+2점.**
   - $p(n)=\dfrac{m^ne^{-m}}{n!}$의 식을 적용하려 한 흔적이 보이면 **+2점.**
   - 식과 답이 모두 틀렸으나 나름대로의 논리를 쓰려고 했으면 **+2점.**

Section 02 2012학년도 중앙대학교 수시일반 전형

[문제5] 예시답안

▶ 문제의 표1에서 주어진 꼭짓점 2, 3, 4에 대해서 다음을 확인할 수 있다.

$$(65,39)=(13\times 5,13\times 3)$$
$$(91,56)=(7\times 13,7\times 8)$$
$$(156,95)=(13\times 5+7\times 13,13\times 3+7\times 8)$$

▶ $p=5,\ q=3,\ r=13,\ s=8$ 라 놓으면, $ps-qr=1$ 이 성립한다. 따라서 행렬 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$로 결정되는 일차변환 T는 네 점 $(0,\ 0)$, $(65,\ 39)$, $(91,\ 56)$, $(156,\ 95)$를 각각 $(0,\ 0)$, $(13,\ 0)$, $(0,\ 7)$, $(13,\ 7)$로 옮긴다.

▶ T의 정의역을 $L=\{(x,y)\,|\,x,y\text{는 정수}\}$로 제한하면 T는 L에서 L로의 일대일대응이다. 네 점 $(0,\ 0)$, $(65,\ 39)$, $(91,\ 56)$, $(156,\ 95)$로 결정되는 평행사변형을 P, 네 점 $(0,\ 0)$, $(13,\ 0)$, $(0,\ 7)$, $(13,\ 7)$로 결정되는 직사각형을 R이라 하고, P(또는 R)의 경계를 제외한 안쪽 부분을 'P(또는 R)의 내부'라 하자. 그러면 P의 내부에 있는 L의 점은 일차변환 T에 의해 R의 내부에 있는 L의 점으로 일대일 대응된다.

▶ R의 내부에 있는 L의 점 개수는 $(7-1)\times(13-1)=6\times 12=72$개이다. 따라서 P의 내부에 있는 L의 점 개수는 72개이다.

[문제5] 채점기준

1. 꼭짓점 2, 3, 4를 다음과 같이 분해하면, 3점.

$$(65,39)=(13\times 5,13\times 3)$$
$$(91,56)=(7\times 13,7\times 8)$$
$$(156,95)=(13\times 5+7\times 13,13\times 3+7\times 8)$$

2. 행렬 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$을 구하면, 3점.

3. $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$로 결정되는 일차변환 T가 네 점 $(0,\ 0)$, $(65,\ 39)$, $(91,\ 56)$, $(156,\ 95)$로 결정되는 평행사변형 P를, 네 점 $(0,\ 0)$, $(13,\ 0)$, $(0,\ 7)$, $(13,\ 7)$로 결정되는 직사각형 R로 옮긴다고 말하면, 5점.

4. P 내부의 정수 격자점과 R 내부의 정수 격자점 사이에 일대일 대응이 있음을 말하면, 6점.

5. P의 내부의 정수 격자점 수가 72개임을 구하면, 3점.