[문제 3]

독일의 천문학자 올버스는 "무한히 넓은 우주에 무한히 많은 항성이 균일하게 분포한다면, 하늘에 별이 가득 차 보여서 밤에도 대낮처럼 밝아야 한다"는 '올버스의 역설'을 제시하였다. 태양과 같은 크기와 밝기를 지닌 항성이, 공간의 단위 부피 V당 하나씩, 지구로부터 거리가 100AU이상인 우주 전체에 균일하게 분포한다고 가정하자. 올버스의 주장과 같이 밤하늘 전체가 별로 가득 차 보이기 위해 필요한 우주의 최소 반경을 구하는 과정을 제시문 (다)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 단, 1AU는 지구와 태양 사이의 거리이며, 지구에서 바라본 태양의 입체각은 라고 하자. 필요 시 반경 R인 구의 부피에 관한 아래의 식을 참고하시오. [20점]

$$\text{구의 부피} = \int_0^R 4\pi r^2 dr$$

[문제 4]

태양을 반경 R, 표면 온도 T인 흑체로 가정하고, 태양과 지구 사이의 거리를 라고 하자. 반경이 r인 지구가 복사 평형 상태에 있다고 할 때, 제시문 (다)와 (라)에 근거하여 지구 표면의 온도 T_E를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, D는 r보다 매우 큰 값이며, 지구는 흑체가 아니다. [15점]

[문제 5]

제시문 (마)에서 X선 발생지점으로부터 영상판의 중심까지 거리가 L로 측정되었다고 하자. 영상판이 원형이고 직경이 인 경우, 제시문 (다)에 근거하여 영상 입체각의 최댓값을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. 단, 영상 입체각은 X선 발생지점에서 영상판을 바라볼 때의 입체각이다. 필요 시 곡선 $y=f(x)$의 구간 $a \leq x \geq b$ 부분의 호의 길이를 구하는 아래의 식을 참고하시오.

$$\text{호의 길이} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}\, dx$$

[문제 6]

제시문 (마)에서 c를 원점으로 하여 X선 발생지점의 좌표 (x, y)를 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오. [15점]

02 평가 목표 및 출제 의도

(1) 평가 목표

본 문제는 지문을 통한 개념 이해력, 논리적 사고력 및 문제 해결능력 등 자연계열 대학 진학생들이 갖추어야 할 기본적인 능력을 평가하는데 목적이 있다. 지문에 설명된 내용들은 고등학교 교과 과정을 공부한 학생이라면 충분히 이해할 수 있는 개념들로서, 지문에 주어진 정보에 따라 종합적인 논리 전개를 통해 문제를 해결하는 능력을 평가하는 것을 목표로 하였으며, 이는 대학 진학 후 창의성과 논리성에 근거한 대학교육에 적응할 수 있는 인재를 선발하기 위함이다. 특히 이번 논술고사에서는 학생들이 교과서를 통해 배운 각의 개념과 적분의 개념을 포괄하는 입체각과 자연 현상의 하나인 플럭스를 제시문의 주제로 사용하였고, 일정 수준의 이해력과 논리적 사고력을 요구하지만 계산과정은 복잡하지 않은 문항들을 출제하였다.

(2) 출제의도

[문제 1]

단백질, 탄수화물, 지방이 소화되어 생성된 분해물들은 인체에 꼭 필요한 영양물질이므로 반드시 생체막을 통해 수동적 또

는 능동적으로 흡수되어야만 한다. 지질로 구성된 생체막을 잘 통과하기 위해서는 어떠한 특성이 필요한지와 인체가 요구하는 꼭 필요한 수용성 영양성분들은 생체막을 잘 통과하기 어렵기 때문에 이를 극복하기 위한 방법이 무엇인지를 문제에서 제공된 정보와 제시문을 통해 추론할 수 있는 사고력을 평가한다.

[문제 2]

주어진 지문과 그래프를 통해 세포막 투과방법이 상이한 영양물질의 농도가 플럭스에 어떠한 영향을 미치는지 이해하고 이를 기반으로 주어진 지문과 가정을 수학적으로 해석하는 능력을 평가한다. 학생들은 주어진 지문의 조건을 만족하는 수학적 수식을 제시할 수 있어야 하고 풀이과정을 통해 로그 함수, 지수 함수, 로그 그래프를 활용하는 수학적 사고력 또한 평가의 대상이 된다.

[문제 3] [문제 4]

올버스의 역설과 복사 평형이라고 하는 주제는 엄밀한 계산을 하려면 많은 요소들을 고려해야 하지만, 그 핵심적인 부분은 입체각을 통해 고등학교 교과과정을 이수한 학생들이 충분히 이해할 수 있는 내용이다. 문제 3에서 학생들은 제시문 (다)를 통해 입체각의 개념을 파악한 후, 밤하늘이 별빛으로 가득 찬 상태가 항성들의 모든 입체각의 총 합이 제시문에 설명된 바와 같이 4π가 되는 상태와 같음을 추론해야 한다. 논리적 사고를 통해 문제를 해결하기 위해서는 거리 r인 부분에서 항성들의 입체각을 먼저 구한 후, r에 따라 적분하는 방식으로 전체 입체각의 식을 얻어야 한다. 문제 4에서 학생들은 제시문 (라)에서 설명된 스테판-볼츠만 법칙, 키르히호프 법칙, 흑체, 흡수율, 방사율의 개념을 이해한 후, 열평형 상태에 있는 태양과 지구에서 벌어지는 에너지 플럭스의 흐름을 단계적인 논리 전개를 통해 설명하는 방식으로 문제 해결을 시도해야 한다.

[문제 5]

제시문 (다)에서 설명된 입체각의 정의를 이해하고, 제시문 (마)의 엑스선 영상이라는 상황에서 입체각을 이해하고 이를 수리적으로 계산하는 문제이다. 이 문제에서 입체각은 엑스선 발생지점을 중심으로 계산이 되고, 엑스선 발생지점 앞에 놓인 영상판의 형태가 원형일 때 이 엑스선영상 장치의 입체각을 계산한다. 입체각이 최대가 되기 위한 물체의 위상을 추론하는 능력과, 입체각의 정의에 따라 단위 구의 표면에 투사된 원판의 면적을 구하고 이를 입체각으로 나타내는 수리적인 능력을 평가한다.

[문제 6]

X선 영상(투시영상)에 대한 기본 지식을 바탕으로 투시이미지와 원본물체 사이의 함수 관계를 이해하고, 주어진 물체들 사이의 위치 관계를 계산하는 문제이다. 영사기 앞에 손을 대면 스크린에 확대되어 비추듯이, X선 발생장치 앞에 놓인 물체 및 이 물체의 좌표계는 스크린에 비추일 때 스크린 좌표계에서 이동 및 확대가 된다. 학생들은 좌표계 사이의 이동 및 확대로 인한 변환 관계를 논리적으로 이해하고, 이로부터 계산된 좌표들을 이용하여 X선 발생지점의 좌표를 수리적으로 계산하는 능력을 평가한다.

03 예시답안

[문제 1]

- A는 **수용성 물질이라 지질로 구성된 세포막을 통과하기 어렵다.** 제시문(나)에서와 같이 **능동수송**에 의해 세포막을 통과한다.

- B는 **수용성 물질이라 지질로 구성된 세포막을 통과하기 어렵다.** 제시문(나)에서와 같이 **능동수송**에 의해 세포막을 통과한다.

- C는 **기름에 매우 잘 녹는 물질이라 지질로 구성된 세포막을 잘 통과할 수 있다.** 따라서 **수동수송**에 의해 세포막을 통과한다.

[문제 2]

- 올레산의 농도를 로 놓을 경우 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$2x = 5\log(2x+1)$$

- 양변에 밑을 10으로 한 지수를 취하면 다음의 식을 얻는다.

$$10^{0.4x} = 2x+1$$

- 주어진 그래프가 $10^{0.2x}$ 의 그래프이므로 $2x$ 를 X로 치환하면 다음의 식을 얻을 수 있다. (아래의 식은 포도당의 농도를 X로 놓아도 바로 얻어진다.)

$$10^{0.2X} = X+1$$

- 주어진 로그 그래프를 참조하면 $X=3$에서 가 되어 $10^{0.2X} = 4$ 답이 됨을 알 수 있다. 따라서 올레산의 농도는 $\frac{X}{2} = 1.5\ \text{mole}/\ell$ 이다.

[문제 3]

- 하늘이 별들로 가득차기 위해서는 균일하게 분포한 항성들의 총 입체각이 최소한 4π가 되어야 한다.

- 지구에서 반경 $r \sim r+dr$ (AU) 에 있는 항성의 수와 그 입체각을 계산해야 한다. 부피 V 당 하나의 항성이 존재하고, 체적이 $4\pi r^2 dr$ 이므로 존재하는 항성의 수는 다음과 같이 계산된다.

$$\text{반경 } r \text{ 인 단위 부피 당 항성의 수} = \frac{4\pi r^2 dr}{V}$$

- 제시문에 의해 지구에서부터의 거리가 r AU 인 지점에 위치한 태양과 같은 크기를 지닌 항성의 입체각은 $\frac{\alpha}{r^2}$ 이므로 항성들의 전체 입체각은 다음과 같다.

$$\text{반경 } r \sim r+dr \text{ 에 있는 항성들의 전체 입체각} = \frac{4\pi\alpha\, dr}{V}$$

- 따라서 지구에서 거리가 R (AU) 인 지점까지 존재하는 모든 항성들의 입체각을 더하면 다음과 같다.

$$R = \frac{V}{\alpha} + 100$$

[문제 4]

- 스테판–볼츠만 법칙에 의해 단위 시간 당 태양의 표면에서 발생하는 복사 에너지의 총합은 다음과 같이 계산된다.

$$J_{tot} = 4\pi R^2 S$$

- 태양과 지구 사이 거리가 $D\,(\gg r)$ 이므로 태양에서 바라본 지구의 입체각은 다음과 같다.

$$\text{입체각} = \frac{\pi r^2}{D^2}$$

- 같은 입체각 내에서 빛의 에너지가 유지되므로 단위 시간 당 **지구로 입사하는 태양 복사 에너지의 총합**은 다음과 같다.

$$\text{지구 입사 에너지} = \frac{\text{입체각}}{4\pi} \times J_{tot} = \frac{\pi r^2 R^2 S T^4}{D^2}$$

- 지구의 흡수율을 a 라고 할 때, 지구에 흡수되는 단위 시간 당 에너지는 다음과 같다.

$$\text{지구 흡수 에너지} = \frac{a\pi r^2 R^2 S T^4}{D^2}$$

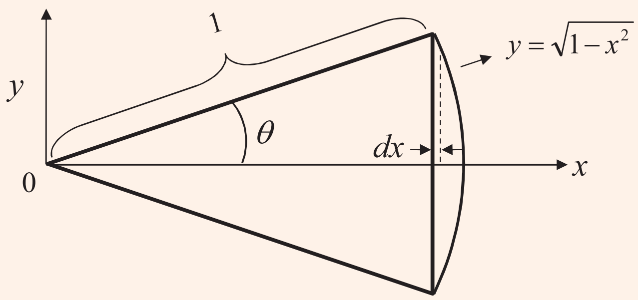
- 스테판–볼츠만 공식과 키르히호프 법칙을 적용하면 **지구가 복사하는 단위 시간 당 에너지는** 지구 온도가 T_E 일 때 다음과 같다. (e 는 지구의 방사율)

$$\text{지구 복사 에너지} = e \times 4\pi r^2 S T_E^4 = a \times 4\pi r^2 S T_E^4$$

- **복사 평형 상태에서 지구 복사 에너지와 지구 흡수 에너지가 같아야** 하므로 T_E 는 다음과 같다.

$$T_E^4 = \frac{R^2}{4D^2}\,T^4 \qquad \therefore\ T_E = \sqrt{\frac{R}{2D}}\,T$$

[문제 5]



- 위의 그림과 같은 상태에서 θ 에 대한 입체각 α를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_{\cos\theta}^{1} 2\pi\, y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{\cos\theta}^{1} 2\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx \\ &= \int_{\cos\theta}^{1} 2\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = 2\pi(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

- 문제에서 $\tan\theta = \dfrac{h}{2L}$ 이고, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$ 이므로 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\tan\theta = \frac{h}{2L} \text{ 이고, } \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$\alpha = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right)$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{4L^2}}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{2L}{\sqrt{4L^2+h^2}}\right)$$

※ 이 풀이 단계는 아래와 같이 전개할 수도 있다.

문제에서 구의 반지름은 $\sqrt{\frac{h^2}{4}+L^2}$ 이고, 원판까지의 거리는 L이기 때문에

$$\cos\theta = \frac{2L}{\sqrt{h^2+4L^2}} \text{ 이고 } \alpha = 2\pi(1-\cos\theta) = 2\pi\left(1 - \frac{2L}{\sqrt{h^2+4L^2}}\right)$$

[문제 6]

- X선 발생지점과 보정장비가 이루는 평면 위에서, a 와 a'' 를 연결하는 직선과 b 와 b'' 를 연결하는 직선이 만나는 점이 X선 발생지점이다.

- 그림(2)에 의하면, a 의 좌표는, $(-m, m)$, a'' 의 좌표는 $\left(0, \frac{m}{d'-c'}(a'-c')\right)$ 이고, b 의 좌표는, $(-m, 0)$, b'' 의 좌표는 $\left(0, \frac{m}{d'-c'}(b'-c')\right)$ 이다.

- $p = \frac{a'-c'}{d'-c'}$, $q = \frac{b'-c'}{d'-c'}$ 라고 하면 a 와 a'' 를 연결하는 직선의 식은 다음과 같다.

$$y = \frac{m-mp}{-m-0}(x+m)+m = (p-1)(x+m)+m = (p-1)x+pm$$

- b 와 b'' 를 연결하는 직선의 식은 다음과 같다.

$$y = \frac{0-mq}{-m-0}(x+m) = qx+qm$$

- p, q 에 원래 값을 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(a'-b')m}{a'-b'+c'-d'} \\ \\ \frac{-(b'-c')m}{a'-b'+c'-d'} \end{pmatrix}$$

04 채점기준

[문제 1] 15점 만점

	투과기전(3점)	판단의 근거(2점)	배점
A	능동투과(능동수송)	A는 수용성 물질임 (A는 기름에 잘 녹지 않음)	5점
B	능동투과(능동수송)	B는 수용성 물질임 (B는 기름에 잘 녹지 않음)	5점
C	수동투과(수동수송)	C는 지용성 물질임 (C는 기름에 잘 녹음)	5점

[문제 2] 15점 만점

– $2x=5\log(2x+1)$또는 $X=5\log(X+1)$ 의 식을 제시하면 **4점**

– 양변에 지수를 취하여 $10^{0.2X}=X+1$식을 얻으면 **3점**

– 제시된 그래프를 활용해 $X=3$을 찾으면 **3점**

– $1.5\ \mathrm{mole}/\ell$ 의 정답을 제시하면 **5점**

[문제 3] 20점 만점

– 밤하늘이 밝기 위해 항성(별)들의 전체 입체각이 4π가 되어야 함을 언급했으면 **5점**

– 반경 인 지점에서 항성들의 총 입체각이 $\dfrac{4\pi\alpha\, dr}{V}$ 임을 구했으면 **5점**

– 적분하여 까지 항성들의 총 입체각이 $\dfrac{4\pi\alpha}{V}(R-100)$ 임을 구했으면 **5점**

– 우주의 반경 $R=\dfrac{V}{\alpha}+100$ 을 바르게 구했으면 **5점**

※ **어떤 방식으로든 적분**을 통해 맞는 답을 얻었으면 **2~4**단계를 합쳐 **15점을 부여**

[문제 4] 20점 만점

– 스테판–볼츠만 법칙과 입체각을 이용하여 지구로 입사되는 에너지를 구했으면 **5점**

– 스테판–볼츠만 법칙과 키르히호프 법칙을 이용하여 지구 복사 에너지를 구했으면 **5점**

3. 복사 평형 상태를 고려하여 T_E바르게 구했으면 **5점**

※ 중간의 **논리적 전개가 불분명하**였지만, **답이 맞았으면** 모든 단계를 합쳐 **10점** 부여

[문제 5] 20점 만점

– X선 발생지점과 영상판의 중앙을 연결하는 선이 영상판과 수직일 때, 입체각이 최대임을 설명하면 **5점**

– 원형의 영상판이 단위구의 표면에 투사된 면적을 제시하면 **10점**

– 입체각을 바르게 제시하면 **5점** (sr 단위는 안 써도 됨.)

[문제 6] 15점 만점

– a와 a" 를 연결하는 직선과 b와 b"를 연결하는 직선이 만나는 점이 선 발생지점임을 설명하면 **4점**

– a와 a", b와 b"를 연결하는 직선의 식 2개를 제시하면 **6점 (각 3점씩)**

– 두 직선의 식으로부터 교점을 m, a', b', c', d' 로 제시하면 **5점**