④ 논술우수자 자연계(오후)

문항카드 8

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	삼각함수, 사이값 정리	
예상 소요 시간	(35분) / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $0<x<1$일 때 $0<\sin x<x$이므로

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2}$$

이다.

(나) (사이값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고

$$f(a)<0<f(b)$$

이면 $f(c)=0$인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 함수 $y=\dfrac{1}{x+n}$의 그래프와 함수 $y=\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

(1-1) 구간 $(0,1)$에서 함수 $g(x)=\sin x-\dfrac{x}{1+x^2}$가 증가함을 보이시오. (10점)

(1-2) 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}<a_n<\frac{1}{n}$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

(1-3) 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{a_n}\sin x\,dx$를 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

연속함수의 사이값 정리를 이해하고 이를 적용할 수 있는지와 삼각함수의 극한, 미분, 적분 등 기본적인 계산을 수행할 수 있는지를 평가한다. 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 증가를 판단하도록 한다. 사이값 정리를 적절하게 이용하여 주어진 부등식을 유도할 수 있도록 한다. 삼각함수의 극한의 성질을 사용하여 주어진 극한값을 구한다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** ☐ 수학 I ☐ 수학 II ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 I ■ 미적분 II ☐ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (미적분 I, 미적분 II)
	(가), (나)	성취기준 1	미적분II 나. 삼각함수 1) 삼각함수의 극한 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
		성취기준 1	미적분I 나. 함수의 극한과 연속 2) 함수의 연속 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 II	김원경 외	비상교육	2018	81-83	(가)	재구성
미적분 II	우정호 외	동아출판	2018	105-106	(가)	재구성
미적분 I	김원경 외	비상교육	2018	66-69	(나)	재구성
미적분 I	우정호 외	동아출판	2018	89-95	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당 없음

5. 문항 해설

(3-1) 함수의 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 판별하도록 한다.
(3-1) 사이값 정리를 이용하여 방정식의 근의 위치를 구한다. 이로부터 부등식을 유도하도록 한다.
(3-3) 극한이 가지는 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 주어진 극한값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(1-1)	함수 g를 미분하면 $g'(x)=\cos x-\dfrac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\cos x-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$	5점
	제시문 (가)를 이용하면, $0<x<1$일 때 $g'(x)=\cos x-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $>\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\sqrt{1-x^2}\left(1-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right)>0$ 이므로 g는 증가한다.	5점
(1-2)	함수 $h(x)=\sin x-\dfrac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x<x\,(0<x<1)$을 이용하면 $h\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=\sin\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)-\dfrac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+n}$ $<\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}+n}<0$	4점
	따라서 제시문 (나)에 의해 $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}<a_n<\dfrac{1}{n}$	2점
(1-3)	문제 (1-2)의 결과와 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=1$를 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$	5점

	$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{a_n}\sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos a_n)$ $= \lim_{n\to\infty} n^2a_n^2 \cdot \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2}$	5점

7. 예시 답안

(1-1) 함수 g를 미분하면

$$g'(x) = \cos x - \frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \cos x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

이다. 제시문 (가)를 이용하면, $0<x<1$일 때

$$g'(x) = \cos x - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > \sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right) > 0$$

이므로 g는 증가한다.

(1-2) 함수 $h(x) = \sin x - \frac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x < x\ (0<x<1)$을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}+n} < \frac{1}{n+\sqrt{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}+n} < 0$$ 임을 알 수 있다. 문제 (1-1)번의 결과와 $g(0)=0$인 사실을 이용하면, $0<x\le 1$일 때 $g(x)>0$이므로

$$\sin x > \frac{x}{1+x^2}$$

이다. 이 부등식을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\frac{1}{n}+n} > \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} - - \frac{1}{\frac{1}{n}+n} = 0$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의해

$\frac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \frac{1}{n}$ 임을 알 수 있다.

(1-3) 문제 (1-2)의 결과와 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}na_n=1$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^{a_n}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2(1-\cos a_n)=\lim_{n\to\infty}n^2a_n^2\cdot\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2}\cdot\frac{1}{1+\cos a_n}=\frac{1}{2}$$

이다.

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

일반 고등학교 교육과정의 미적분I, 미적분II 과목의 내용을 기본 내용으로 문제가 출제되었다. 삼각함수의 기본 성질과 부등식, 사잇값 정리를 제시문에서 제시하였고 이를 이용하여 문항의 해결을 할 수 있도록 하였다. 정상적인 교육과정을 이수한 수험생이라면 충분히 문제를 이해하고 해결할 수 있다.

2) 문제 유형의 적절성

제시되어 있는 제시문 내용을 이용하여 증가함수에 대한 이해와 부등식을 증명하는 방법에 대하여 이해하고 있는지 확인 할 수 있으며 사잇값 정리를 이용하여 부등식이 성립함을 보일 수 있는 종합적인 사고와 답안작성 과정에서 논리적인 사고를 갖고 있는지 확인 할 수 있으며 이를 이용하여 삼각함수의 극한 값을 구할 수 있는지에 대한 종합적인 사고력도 평가할 수 있다.

문항에서 요구하는 내용을 설명하고자 할 때 제시문제 제시되어 있는 내용을 바로 적용하여 전개하는 과정을 설명하는 것만으로도 충분히 증명내용이 설명될 수 있도록 구성되어 있으며 문항(1-2)가 성립하는지에 대한 설명의 경우도 문항(1-1)의 해결 과정을 통해 어렵지 않게 답안을 작성할 수 있도록 구성되어 있어서 수험생이 문제를 해결하기에 충분하다.

3) 문제 난이도의 적절성

일반 고등학교에서의 수학 교육과정을 통해 기본적으로 학습된 내용을 알고 있는 수험생의 경우라면 제시문과 문항에 대한 내용을 쉽게 이해하고 해결 방향을 결정할 수 있도록 간결하고 명료하게 문제가 구성되어 있으며 내용을 이해함에 충분히

가독성이 있다.

일반 고등학교 미적분 과목에 대한 기본적인 내용에 대한 이해를 갖고 있는 수험생이라면 충분히 해결할 수 있는 문항들이며 특히 사잇값 정리를 적용하여 문항(1-2)를 설명하는 과정에도 문항(1-1)을 충분히 적용할 수 있도록 구성되어 있어서 출제자의 의도를 파악하고 답안을 작성할 수 있도록 적절한 난이도로 구성되어 있다.

⑤ 논술우수자 자연계(오후)

문항카드 9

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	부등식, 실수와 자연수	
예상 소요 시간	(35) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 실수 a, b, c에 대하여 $b \le c$이면 $a+b \le a+c$이다.

(나) $a>0$, $b>0$일 때,

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$

이다.

(다) 임의의 자연수 n에 대하여 부등식

$$k^2 \le n < (k+1)^2$$

을 만족하는 자연수 k가 유일하게 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 k를 $k^2 \le n < (k+1)^2$을 만족하는 자연수라 하고, $r = n - k^2$이라 하자.

(2-1) 부등식

$$\sqrt{n} \le k + \frac{r}{2k} \le \sqrt{n+1}$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-2) 부등식

$$\sqrt{n} \le k + \frac{r+1}{2(k+1)} \le \sqrt{n+1}$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

(2-3) 임의의 자연수 n에 대하여 다음 부등식을 만족하는 자연수 p, q가 존재함을 보이시오. (10점)

$$\sqrt{n} \le \frac{p}{q} \le \sqrt{n+1} \quad (\text{단, } q \le \sqrt{n}+1)$$

3. 출제 의도

1. 기본적인 부등식 문제로서, 수식 계산 능력과 논리적 사고력을 측정하고자 함.
2. (2-1)과 (2-2)는 계산 문제이긴 하나 앞에서 주어진 조건으로부터 쉽게 얻어지는 부등식 $r \le 2k$를 관찰하고 활용하는 것이 포인트로서 부등식의 계산 능력뿐만 아니라 수식에 대한 관찰력과 분석력을 측정하는 것에 중점을 두었음.
3. (2-3)은 계산은 필요 없고 논리적인 사고력과 관찰력만 있으면 쉽게 답을 구할 수 있는 문제임.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td rowspan="3">적용 교육과정</td><td colspan="3">☐ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목</td></tr>
<tr><td colspan="3">■ 수학Ⅰ ☐ 수학Ⅱ ☐ 확률과 통계 ☐ 미적분Ⅰ ☐ 미적분Ⅱ
☐ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(가), (나)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학 I]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식
수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[수학 I]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식
수학1242-1. 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅰ	김원경 외	비상교육	2016	94	(가), (나)	
수학 Ⅰ	황선욱 외	㈜좋은책신사고	2017	94	(가), (나)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당 없음

5. 문항 해설

(2-1) 각 항을 제곱하고 크기를 비교하는 문제로서 단순한 2차식 전개와 수식의 크기 비교로 문제가 해결된다. $r \le 2k$을 관찰하는 것은 매우 쉽다. 이것을 부등식에 적용하느냐 여부가 이 문제 풀이의 관건이 된다.

(2-2) 역시 각 항을 제곱하고 크기를 비교하는 문제로서 단순한 2차식 전개 외에 인수분해가 필요하게 된다. 여기서도 한쪽 부등식을 보이는 데 있어서 $r \le 2k$이 주요 역할을 하게 된다.

(2-3) 앞의 두 소문항에서 얻은 결과를 관찰만 하면 쉽게 답을 구할 수 있다. r이 짝수일 때와 홀수일 때의 두 경우로 나누는 것이 이 문제 풀이의 관건이 된다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	$\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \ge k^2+r=n$이므로 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r}{2k} \ge \sqrt{n}$이다.	3점
	또한 $r=n-k^2<(k+1)^2-k^2=2k+1$이므로 $r \le 2k$이다.	4점
	$\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \le k^2+r+1=n+1$ 이고 $k+\frac{r}{2k} \le \sqrt{n+1}$이다	3점
(2-2)	$n=k^2+r$이므로 다음을 얻는다. $\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n=\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-k^2-r=\frac{r+1}{2(k+1)}\left(2k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)-r$ $=\frac{r^2-2(2k+1)r+(4k^2+4k+1)}{4(k+1)^2}=\frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2}\ge 0$ 따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \ge \sqrt{n}$이다.	6점
	또한, (2-1)에서 $r \le 2k$임을 보였으므로 $\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n-1=\frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2}-1=\frac{(r-4k-3)(r+1)}{4(k+1)^2}\le 0$ 이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \le \sqrt{n+1}$이 성립한다.	4점

(2-3)	주어진 자연수 n에 대하여 r이 짝수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $$\sqrt{n} \le \frac{k^2+\frac{r}{2}}{k} \le \sqrt{n+1}$$ 이므로 $p=k^2+\frac{r}{2}$, $q=k$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다. 주어진 자연수 n에 대하여 r이 홀수이면 (2-2)의 부등식에 의해 $$\sqrt{n} \le \frac{k(k+1)+\frac{r+1}{2}}{k+1} \le \sqrt{n+1}$$ 이므로 $p=k(k+1)+\frac{r+1}{2}$, $q=k+1$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다. (※짝수와 홀수로 나누어 생각하면 2점, 올바른 p,q를 모두 찾으면 8점)	10점

7. 예시 답안

(2-1) $\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \ge k^2+r=n$이므로 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r}{2k} \ge \sqrt{n}$ 이다.

또한 $r=n-k^2 < (k+1)^2-k^2 = 2k+1$이므로 $r \le 2k$이다.

따라서

$$\left(k+\frac{r}{2k}\right)^2 = k^2+r+\frac{r^2}{4k^2} \le k^2+r+1 = n+1$$

이고 $k+\frac{r}{2k} \le \sqrt{n+1}$이다.

(2-2) $n=k^2+r$이므로 다음을 얻는다.

$$\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n = \left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-k^2-r = \frac{r+1}{2(k+1)}\left(2k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)-r$$
$$= \frac{r^2-2(2k+1)r+(4k^2+4k+1)}{4(k+1)^2} = \frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2} \ge 0$$

따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \ge \sqrt{n}$이다.

또한, (2-1)에서 $r \le 2k$임을 보였으므로

$$\left(k+\frac{r+1}{2(k+1)}\right)^2-n-1 = \frac{(r-2k-1)^2}{4(k+1)^2}-1 = \frac{(r-4k-3)(r+1)}{4(k+1)^2} \le 0$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 $k+\frac{r+1}{2(k+1)} \le \sqrt{n+1}$이 성립한다.

(2-3) 주어진 자연수 n에 대하여 r이 짝수이면 (2-2)의 부등식에 의해

$$\sqrt{n} \le \frac{k^2 + \frac{r}{2}}{k} \le \sqrt{n+1}$$

이므로 $p = k^2 + \frac{r}{2}$, $q = k$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

주어진 자연수 n에 대하여 r이 홀수이면 (2-2)의 부등식에 의해

$$\sqrt{n} \le \frac{k(k+1) + \frac{r+1}{2}}{k+1} \le \sqrt{n+1}$$

이므로 $p = k(k+1) + \frac{r+1}{2}$, $q = k+1$로 잡으면 주어진 두 부등식을 만족한다.

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

일반 고등학교 수학 교과의 내용 중 복잡한 공식이나 내용을 제시하지 않았으며 고등학교 수학I에서 다루고 있는 실수와 자연수, 부등식에 대한 기본적인 지식을 알고 있으면 해결할 수 있는 내용으로 출제되었고 이러한 기본적인 내용은 교육과정 내에서 충분히 다루고 있는 내용으로 문제가 출제되었다.

2) 문제 유형의 적절성

문항(2-1)에서는 단순히 제시문의 조건을 적용하여 문제를 해결하는 것뿐만이 아니라 문제 풀이과정의 내용에서 논리적인 사고로 판단하여 풀이과정에 적용할 수 있어야 함을 요구하고 있으며 문항(2-2), (2-3)에서는 (2-1)의 풀이과정에서의 산출 내용을 종합적으로 사고하고 적용하여야 해결이 가능하기에 수험생이 출제자의 의도를 정확하게 파악하고 해결해 가고 있는지를 평가할 수 있는 문제라고 생각된다.

주어진 문항을 해결하기 위해서는 일반 고등학교 교육과정에서도 다루고 있는 제시문의 내용을 기본으로 하여 반드시 적극적으로 적용해서 해결하려고 노력해야 한다. 이를 위해서 제시문은 출제자의 의도를 적극적으로 표현하고 있으며 답안 작성 방향에 대하여 충분한 내용을 제시하고 있다.

3) 문제 난이도의 적절성

제시문의 내용을 기본적으로 이해하고 이를 문제에 적용하여 답안을 작성하는 과정을 통해 수험생의 문제 이해력과 해결력을 확인 할 수 있는 문제로 매우 간결하고 명료하게 제시문과 문항이 제시되어 있어 문제를 여러 번 읽지 않아도 수험생이 문제의 내용이 무엇인지 파악할 수 있는 가독성을 갖고 있다.

문항 내용으로는 크게 어렵지 않다고 생각할 수 있으나 풀이과정에서 문제 풀이 과정의 중요한 중간과정을 착안하여 풀이과정에 적용하지 못한다면 다소 당황하고 다음 내용을 전개하기 어려워 할 수 있다. 그러나 출제자의 의도를 조금 더 파악하고 생각한다면 전체적으로 문제를 해결하고 답안을 작성하는 과정은 충분히 가능한 난이도로 구성되어 있다.

⑥ 논술우수자 자연계(오후)

문항카드 10

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	미분가능, 삼수선의 정리, 좌표공간, 구의 방정식	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (40점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, 두 극한값 $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이 존재하고 두 값이 같은 경우 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다. 그렇지 않은 경우 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. 예를 들어, $f(x)=|x|$는 $x>0$일 때 $f(x)=x$이고 $x<0$일 때 $f(x)=-x$이다. 이때, $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ 이고 $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$이므로, $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(나) 좌표공간에서 중심이 $C(a,b,c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

이다. 구의 중심이 아닌 점 P에 대하여, 구 위의 점 중에서 P와의 거리가 가장 가까운 것과 가장 먼 것은 모두 직선 PC 위에 있다.

(다) (삼수선의 정리) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 α 위의 점 Q를 지나지 않는 α 위의 한 직선 l, 직선 l위의 한 점 H에 대하여, 직선 PQ가 α와 수직이고 직선 QH가 l과 수직이면 직선 PH는 l과 수직이다.

(※) 좌표공간에서 k가 실수일 때, 각각의 실수 t에 대하여 점 $(t, kt, 0)$과 집합

$$\{(x, y, z) \mid x^2+(y-2)^2+(z-5)^2 \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \mid (x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leq 1\}$$

에 속하는 점과의 거리 중에서 가장 작은 값을 $f(t)$, 가장 큰 값을 $g(t)$라 하자.

(3-1) $k=0$일 때, 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값을 찾고 그 이유를 설명하시오. (10점)

(3-2) 점 $A(a, b, c)$에서 직선

$$l: \ y=kx, \ z=0$$

에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이를 a, b, c, k의 식으로 나타내시오. (10점)

(3-3) $k=1$일 때, 함수 $h(t)=f(t)+g(t)$의 최솟값을 구하시오. (10점)

(3-4) 함수 $h(t)=f(t)+g(t)$의 최솟값이 가장 작게 되도록 하는 k의 값을 구하시오. (10점)

3. 출제 의도

조건에 따라 식이 주어지는 함수의 미분가능성을 파악할 수 있는지, 두 점 사이의 최단경로는 직선이라는 간단한 아이디어를 삼수선의 정리 등을 이용해서 공간도형의 문제를 해결할 수 있는지 평가한다. 이 문제 해결에는 삼수선의 정리를 적용해서 간단히 계산할 수 있는 문제부터 회전이동, 대칭이동 등의 기하학적인 아이디어를 사용하는 문제까지 단계적으로 해결할 수 있도록 문항을 배열하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td>□ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목
□ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 ■ 미적분 I □ 미적분 II
■ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td>관련
성취기준</td><td><table><tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 I)</td></tr><tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>미적분I 다. 다항함수의 미분법 1) 미분계수
미적1313. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.</td></tr></table></td></tr>
</table>

관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
(나)	성취기준 1	기하와벡터 다. 공간도형과 공간벡터 1) 공간도형 기벡1324. 구의 방정식을 구할 수 있다.
관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
(다)	성취기준 1	기하와벡터 다. 공간도형과 공간벡터 1) 공간도형 기벡1312. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 Ⅰ	신항균 외	지학사	2017	91-96	(가)	재구성
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	158	(나)	재구성
기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	138-139	(다)	

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우 - 없음

5. 문항 해설

(3-1) 미분가능하지 않은 점의 후보를 기하학적인 아이디어로 찾는다.
(3-2) 제시문 (다) 삼수선의 정리를 이용해서 계산을 수행하면서 (3-3)을 해결할 수 있는 힌트를 얻는다.
(3-3) 먼저 주어진 함수는 두 구의 중심으로부터 직선위의 점까지 거리의 합이라는 것을 이해할 수 있어야 한다. 두 구의 중심을 회전이동을 이용해서 좀 더 수월한 위치에 도형을 배열해서 두 구의 중심으로 부터의 거리의 합이 최소가 되는 상황을 찾는다. 이때, 회전축은 주어진 직선이고 회전축과 두 구의 중심은 삼수선의 정리를 이용해서 쉽게 찾을 수 있다.
(3-4) 주어진 함수가 원점을 지나는 평면의 직선에서 정의된 것으로 이해하고 주어진 함수는 두 구의 중심으로부터 직선위의 점까지 거리의 합이라는 것을 이해할 수 있다면, 함수의 최솟값이 가장 작은 수가 되도록 하는 직선은 평면의 점 중에서 두 구의 중심으로부터의 거리의 합이 최소가 되는 것을 지나야 한다는 것을 파악할 수 있다. 이때 대칭이동을 이용해서 좀 더 수월한 위치에 놓고 두 점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 평면의 점을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	점 $(t,0,0)$에서 $(0,2,5)$까지의 거리를 $r_1(t)=\sqrt{t^2+2^2+5^2}=\sqrt{t^2+29}$, 점 $(t,0,0)$에서 $(3,1,1)$까지의 거리를 $r_2(t)=\sqrt{(t-3)^2+1^2+1^2}=\sqrt{t^2-6t+11}$ 이라고 하면, $r_1(t), r_2(t)$는 각각 실수전체의 집합에서 미분가능한 함수이다. $r_1(t)>r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_2(t)-1$, $r_1(t)<r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_1(t)-1$이므로, $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값에서 등식 $r_1(t)=r_2(t)$가 성립해야 한다.	3점
	$\sqrt{t^2+29}=\sqrt{t^2-6t+11}$ 에서 $6t=-18$, 즉 $t=-3$을 얻는다.	2점
	실제로 $\lim_{t\to -3-}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\lim_{t\to -3+}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{6}{\sqrt{38}}$ 은 서로 다른 값이므로, 제시문 (가)에 의하여 $f(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.	5점
(3-2)	점 $A(a,b,c)$에서 xy평면에 수선을 내리면 점 $(a,b,0)$이 되고, xy평면에서 점 $(a,b,0)$과 주어진 직선 $y-kx=0$사이의 거리는 $\frac{\lvert ka-b\rvert}{\sqrt{k^2+1}}$ 이다.	5점
	제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여, 선분 AH의 길이는 $\sqrt{\frac{(ka-b)^2}{k^2+1}+c^2}$ 이 된다.	5점
(3-3)	점 $(t,t,0)$에서 $A_1(0,2,5)$까지의 거리와 $A_2(3,1,1)$까지의 거리를 각각 $r_1(t), r_2(t)$라고 하면, $r_1(t)\ge r_2(t)$일 때 $f(t)=r_2(t)-1, g(t)=r_1(t)+1$이고 $r_1(t)<r_2(t)$일 때 $f(t)=r_1(t)-1, g(t)=r_2(t)+1$ 이므로 등식 $h(t)=f(t)+g(t)=r_1(t)+r_2(t)$가 성립한다.	3점
	점 $(t,t,0)$에서 A_1까지의 거리는 A_1을 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같고, 마찬가지로 점 $(t,t,0)$에서 A_2까지의 거리는 A_2를 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같다. 점 A_1와 점 A_2에서 직선 $l=\{(t,t,0)\mid t\text{는 실수}\}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면, H_1, H_2의 좌표는 각각 $(1,1,0)$, $(2,2,0)$이다.	4점

	A_1과 H_1의 거리는 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여 $\sqrt{\sqrt{2^2+5^2}}=3\sqrt{3}$이고, A_2와 H_2와의 거리는 $\sqrt{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{3}$이다. 이제, l을 중심축으로 하는 회전을 이용하여, 두 점 A_1과 A_2를 적당히 회전시켜 xy평면위에 있고 l을 기준으로 서로 다른 반평면에 위치한 두 점 $A_1{}', A_2{}'$으로 대체할 수 있다. 그러면, 점 $(t,t,0)$이 직선 $A_1{}'A_2{}'$와 직선 l의 교점일 때 $h(t)$는 최솟값을 가지게 되고,	
	그 최솟값은 $\overline{A_1{}'A_2{}'}=\sqrt{(\overline{A_1{}'H_1}+\overline{A_2{}'H_2})^2+\overline{H_1H_2}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\sqrt{2^2}}=5\sqrt{2}$ 이다.	3점
(3-4)	위 (3-3)의 풀이에서 $h(t)$은 점 $(t,kt,0)$에서 두 점 $A_1(0,2,5)$, $A_2(3,1,1)$까지의 거리의 합이다. 이 두 점 A_1, A_2까지의 거리의 합이 최소가 되는 xy평면위의 점은 A_2를 xy평면에 대칭이동시킨 점 $A_2{}'(3,1,-1)$과 $A_1(0,2,5)$을 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점 B이다.	5점
	이 직선의 방정식은 $(x,y,z)=(0,2,5)+s(3,-1,-6)$ (s는 실수)이고, $s=\frac{5}{6}$일 때 점 $B(\frac{5}{2},\frac{7}{6},0)$을 얻는다. 직선 $\{(t,kt,0)\mid t\text{는 실수}\}$가 점 B를 지나려면, $k=\frac{7}{15}$이어야 한다.	5점

7. 예시 답안

(3-1) 점 $(t,0,0)$에서 $(0,2,5)$까지의 거리를 $r_1(t)=\sqrt{t^2+2^2+5^2}=\sqrt{t^2+29}$,

점 $(t,0,0)$에서 $(3,1,1)$까지의 거리를 $r_2(t)=\sqrt{(t-3)^2+1^2+1^2}=\sqrt{t^2-6t+11}$ 이라고 하면, $r_1(t), r_2(t)$는 각각 실수전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

$r_1(t)>r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_2(t)-1$, $r_1(t)<r_2(t)$일 때는 $f(t)=r_1(t)-1$이므로, $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값에서 등식 $r_1(t)=r_2(t)$가 성립해야 한다.

$\sqrt{t^2+29}=\sqrt{t^2-6t+11}$ 에서 $6t=-18$, 즉 $t=-3$을 얻는다.

실제로 $\lim\limits_{t\to -3-}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{3}{\sqrt{38}}$, $\lim\limits_{t\to -3+}\frac{f(t)-f(-3)}{t-(-3)}=-\frac{6}{\sqrt{38}}$은 서로 다른 값이므로, 제시문 (가)에 의하여 $f(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

(3-2) 점 $A(a,b,c)$에서 xy평면에 수선을 내리면 점 $(a,b,0)$이 되고, xy평면에서 점 $(a,b,0)$과 주어진 직선 $y-kx=0$사이의 거리는 $\frac{|ka-b|}{\sqrt{k^2+1}}$이다. 제시문 (다) 삼수선의

정리에 의하여, 선분 AH의 길이는 $\sqrt{\frac{(ka-b)^2}{k^2+1}+c^2}$이 된다.

(3-3) 점 $(t,t,0)$에서 $A_1(0,2,5)$까지의 거리와 $A_2(3,1,1)$까지의 거리를 각각 $r_1(t), r_2(t)$라고 하면, $r_1(t) \geq r_2(t)$일 때 $f(t)=r_2(t)-1, g(t)=r_1(t)+1$이고 $r_1(t) < r_2(t)$일 때 $f(t)=r_1(t)-1, g(t)=r_2(t)+1$ 이므로 등식 $h(t)=f(t)+g(t)=r_1(t)+r_2(t)$가 성립한다.

점 $(t,t,0)$에서 A_1까지의 거리는 A_1을 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같고, 마찬가지로 점 $(t,t,0)$에서 A_2까지의 거리는 A_2를 직선 l을 회전축으로 하여 회전시킨 임의의 점까지의 거리와 같다.

점 A_1와 점 A_2에서 직선 $l=\{(t,t,0)|t\text{는 실수}\}$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면, H_1, H_2의 좌표는 각각 $(1,1,0)$, $(2,2,0)$이다. A_1과 H_1의 거리는 제시문 (다) 삼수선의 정리에 의하여 $\sqrt{\sqrt{2^2+5^2}}=3\sqrt{3}$이고, A_2와 H_2와의 거리는 $\sqrt{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{3}$이다. 이제, l을 중심축으로 하는 회전을 이용하여, 두 점 A_1과 A_2를 적당히 회전시켜 xy평면위에 있고 l을 기준으로 서로 다른 반평면에 위치한 두 점 A_1', A_2'으로 대체할 수 있다. 그러면, 점 $(t,t,0)$이 직선 $A_1'A_2'$와 직선 l의 교점일 때 $h(t)$는 최솟값을 가지게 되고,

그 최솟값은 $\overline{A_1'A_2'}=\sqrt{(\overline{A_1'H_1}+\overline{A_2'H_2})^2+\overline{H_1H_2}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+\sqrt{2^2}}=5\sqrt{2}$ 이다.

(3-4) 위 (3-3)의 풀이에서 $h(t)$은 점 $(t,kt,0)$에서 두 점 $A_1(0,2,5)$, $A_2(3,1,1)$까지의 거리의 합이다. 이 두 점 A_1, A_2까지의 거리의 합이 최소가 되는 xy평면위의 점은 A_2를 xy평면에 대칭이동시킨 점 $A_2'(3,1,-1)$과 $A_1(0,2,5)$을 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점 B이다.

이 직선의 방정식은 $(x,y,z)=(0,2,5)+s(3,-1,-6)$ (s는 실수)이고, $s=\frac{5}{6}$일 때 점 $B(\frac{5}{2},\frac{7}{6},0)$을 얻는다.

직선 $\{(t,kt,0)|t\text{는 실수}\}$가 점 B를 지나려면, $k=\frac{7}{15}$이어야 한다.

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

한 점에서의 함수가 미분가능하기 위한 조건, 좌표공간에서 조건을 만족하는 최단 거리와 최솟값 구하기, 삼수선의 정리를 이용한 문제 해결 등은 일반 고등학교 교육과정의 미적분과 기하와 벡터 과목에서 이미 다루고 있기 때문에 수험생들이 문제를 해결하는데 있어서 교육 과정 범위 내에서 충분히 문제를 해결 할 수 있다.

2) 문제 유형의 적절성

주어진 조건을 충분히 이해하고 이를 함수로 표현하여 미분 여부를 판단할 수 있는지 평가할 수 있으며 특히 삼수선 정리를 공간도형에서 적용하여 회전이동과 대칭이동 등의 기하학적인 구조를 고려하여 문제를 해결해야 하는 종합적 사고가 필요한 문제로 수험생의 답안 작성 과정을 통해 문제 분석력과 논리력인 사고력을 충분히 평가할 수 있는 문제라고 생각된다.

미분이 가능하지 않다고 하는 것에 대한 정확한 정의를 제시해 줌으로서 문항 (3-1)을 정확하게 설명할 수 있으며 삼수선의 정리를 이용하여 문항 (3-2), (3-3)의 해결 실마리를 얻을 수 있어서 제시문은 출제자의 의도에 맞는 답안 작성을 완성하는데 충분하다고 생각하며 수험생들에게 제시문의 내용을 적극적으로 활용할 수 있도록 제시문이 설명되어 있다.

3) 문제 난이도의 적절성

문제는 출제자의 의도를 매우 간결하고 명료하게 전달할 수 있도록 구성되어 있으며 특히 제시문에서 삼수선의 정리를 모두 제시하고 있지 않고 문제에서 적용할 수 있는 삼수선의 정리 중 한 경우를 제시함으로써 수험생에게는 문제를 이해하고 적용함에 명료하고 가독성 있게 제시되었다.

문항(3-1), (3-2)은 문제를 이해하고 답안 작성을 하는 과정이 일반 고등학교 수학 서술형 답안 작성을 무난하게 완성한 수험생이라면 충분히 출제 의도를 반영한 답안 작성이 가능한 정도의 난이도이다. 문항(3-3)의 문제에 대한 풀이 과정에서는 두 점 사이의 거리에 대한 이해를 회전이동에 의한 지점에서의 거리임을 이해하고 적용하여 풀이를 완성해야 하는 부분이 수험생들에게는 다소 답안 작성에 부담스러운 부분일 수는 있다.