2) 2019학년도 논술우수자_자연계열 (오전/오후)

① 논술우수자 자연계(오전)

문항카드 5

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	수열, 부등식, 직선의 방정식	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 제시문

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 점 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(나) 서로 다른 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x_1 \neq x_2 \text{ 일 때, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ 일 때, } x = x_1$$

(다) $a \geq b > 0$이고 $c \geq d > 0$이면 $ac \geq bd$이다.

(※) 좌표 평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y = \sqrt{x}\ (x \geq 0)$ 위의 점 A_n이

$$\overline{OA_n} = \frac{1}{n^2}$$

을 만족할 때, A_n의 x좌표를 a_n이라 하자. 두 점 A_n과 $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선의 x절편을 b_n이라 하자. (단, O는 원점이다.)

(1-1) 극한 $\lim_{n \to \infty} n^4 a_n$을 구하시오. (10점)

(1-2) 극한 $\lim_{n\to\infty} b_n$을 구하시오. (10점)

(1-3) 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$(n+2)a_{n+1} \le (n+1)a_n.$$

3. 출제 의도

기본적인 대수적 계산능력을 평가한다. 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 수열의 극한과 성질을 파악할 수 있는지를 평가하고자 했다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** ■ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 ■ 미적분 I □ 미적분 II □ 기하와 벡터
관련 성취기준	(see below)

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 I)
(가)	성취기준 1	[수학I]-다. 도형의 방정식-1) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
(나)	성취기준 1	[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.
(다)	성취기준 1	[수학I]-나. 방정식과 부등식-4) 여러 가지 부등식 수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서를 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2017	117	(가)	
수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2017	132	(나)	

수학 I	황선욱 외	좋은책신사고	2017	94	(다)	○
수학 I	김원경 외	비상교육	2016	114	(가)	
수학 I	김원경 외	비상교육	2016	129	(나)	
수학 I	김원경 외	비상교육	2016	94	(다)	○
수학 I	조도연 외	경기도교육청	2016	158	(가)	
수학 I	조도연 외	경기도교육청	2016	179	(나)	
수학 I	조도연 외	경기도교육청	2016	129	(다)	

나) 교과서 외 자료를 활용한 경우 - 해당 없음

5. 문항 해설

(1-1) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하고 이에 관련한 극한을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(1-2) 수열 $\{b_n\}$과 $\{a_n\}$의 관계식을 구하고 (1-1)의 결과를 이용하여 b_n의 극할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(1-3) 수열 $\{(n+1)a_n\}$이 n이 증가함에 따라 감소한다는 것을 보이는 문제로 (1-1)에서 구한 수열 $\{a_n\}$의 일반항과 간단한 대수적 조작으로 쉽게 보일 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(1-1)	$A_n = (a_{n,} \sqrt{a_n})$ 이므로 주어진 조건으로부터 $a_n^2 + a_n = \frac{1}{n^4}$	4점
	한편 $a_n \geq 0$ 이므로 위의 2차 방정식의 양의 해 $a_n = \frac{-1+\sqrt{1+4/n^4}}{2} = \frac{2}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})}$	3점
	주어진 극한은 $\lim_{n\to\infty} n^4 a_n = 1$	3점
(1-2)	두 점 $A_{n,}$ $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은 $y = \frac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n} x + \frac{1}{n^2}$	3점

	$b_n = \dfrac{a_n}{1-n^2\sqrt{a_n}}$	3점
	$b_n = \dfrac{a_n}{1-n^2\sqrt{a_n}} = \dfrac{1}{n^4 a_n} + \dfrac{1}{n^2\sqrt{a_n}}$ 따라서 (1-1)에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$	4점
(1-3)	(1-1)로부터 $(n+1)a_n = \dfrac{2(n+1)}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})} = \dfrac{2(n+1)}{n^2(n^2+\sqrt{n^4+4})}$ 을 얻는다. 따라서 다음이 성립한다. $(n+2)a_{n+1} \le (n+1)a_n$ $\Leftrightarrow\ (n+2)n^2(n^2+\sqrt{n^4+4}) \le (n+1)^3((n+1)^2+\sqrt{(n+1)^4+4})$	3점
	이 때, $(n+2)n^2 \le (n+1)^3$, $n^2+\sqrt{n^4+4} \le (n+1)^2+\sqrt{(n+1)^4+4}$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다. * 위의 두 부등식 중 하나 틀린 경우 총 7점 중에서 –4점	4점

7. 예시 답안

(1-1) $A_n = (a_n, \sqrt{a_n})$ 이므로 주어진 조건으로부터

$a_n^2 + a_n = \dfrac{1}{n^4}$을 얻는다. 한편 $a_n \ge 0$ 이므로 위의 2차 방정식의 양의 해

$$a_n = \frac{-1+\sqrt{1+4/n^4}}{2} = \frac{2}{n^4(1+\sqrt{1+4/n^4})}$$

을 얻는다. 따라서 주어진 극한은 $\lim_{n\to\infty} n^4 a_n = 1$이다.

(별해) $A_n = (a_n, \sqrt{a_n})$ 이므로 주어진 조건으로부터

$$a_n^2 + a_n = \frac{1}{n^4}$$

$1/n^2 \to 0,\ a_n > 0$을 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

한편 $n^4 a_n = \dfrac{1}{a_n+1}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^4 a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n+1} = 1$

(1-2) 두 점 $A_{n,}$ $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은

$y = \frac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n} x + \frac{1}{n^2}$ 으로 주어지며 이로부터

$b_n = \frac{a_n}{1 - n^2\sqrt{a_n}}$

$= \frac{1}{n^4 a_n} + \frac{1}{n^2\sqrt{a_n}}$ 을 얻는다.

따라서 (1-1)에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ 을 얻는다.

(별해) 두 점 $A_{n,}$ $\left(0, \frac{1}{n^2}\right)$을 지나는 직선은

$y = \frac{\sqrt{a_n} - 1/n^2}{a_n} x + \frac{1}{n^2}$

$b_n = \frac{a_n}{1 - n^2\sqrt{a_n}}$

$= \sqrt{a_n + 1} + a_n + 1$

따라서 별해(1-1)에 의해 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n + 1} + a_n + 1) = 2$ 을 얻을 수 있다.

(1-3) (1-1)로부터

$(n+1)a_n = \frac{2(n+1)}{n^4(1 + \sqrt{1 + 4/n^4})} = \frac{2(n+1)}{n^2(n^2 + \sqrt{n^4 + 4})}$

을 얻는다. 따라서 다음이 성립한다.

$(n+2)a_{n+1} \le (n+1)a_n \Leftrightarrow (n+2)n^2(n^2 + \sqrt{n^4+4}) \le (n+1)^3((n+1)^2 + \sqrt{(n+1)^4 + 4})$

이 때, $(n+2)n^2 \le (n+1)^3$, $n^2 + \sqrt{n^4+4} \le (n+1)^2 + \sqrt{(n+1)^4+4}$ 이므로 주어진 부등식 이 성립한다.

* 위의 두 부등식 중 하나 틀린 경우 총 7점 중에서 -4점

(1-3) (별해)

$c_n = (n+1)a_n$ 로부터

$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^4}} - 1\right)$ 를 두고서 양의 $x > 0$에 대하여

$$f'(x) = \frac{x^5(1-\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}) - 4(x+2)}{2x^5\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}} < 0$$

$f'(x)$가 틀리면 -4점

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

문항(1-1)은 고등학교 교육과정에서 다루고 있으며, 제시문에서 주어진 좌표평면 상의 두 점 사이의 거리를 구하는 방법을 이용하여 구하는 기본적인 문제로 이를 활용하여 문항(1-2)의 극한 값 까지를 구할 수 있다. 문항(1-3)은 부등식의 곱셈을 이용한 증명 문제로 고등학교 교육과정 내용을 이용하여 충분히 해결할 수 있다.

2) 문제 유형의 적절성

이 문제는 고등학교 교육과정에서도 다루고 있는 제시문의 내용을 충분히 이해하고 활용할 수 있는 기초적인 소양을 갖고 있는 학생이라면 쉽게 제시문을 활용하여 주어진 문제를 어려움 없이 해결할 수 있다. 학생의 문장 이해력 정도를 확인할 수 있으며 이를 답안으로 작성하는 과정을 통해 논리적인 사고력을 측정할 수 있는 유형이다.

문제 해결에 필요한 기본적인 요소들을 제시문에서 적절하게 제시하고 있어서 문제내용을 이해하고 해결하는 과정에 자연스럽게 적용될 수 있도록 충분히 제시되어 있다. 문제 내용에서 제시문이 왜 필요한지를 문제를 해결해야 하는 학생들에게 쉽게 이해할 수 있도록 제시되어 있었다.

3) 문제 난이도의 적절성

주어진 제시문과 내용과 문항 전체를 한번만 읽어 보는 과정만으로도 문제에서 요구하는 내용과 답안 작성을 위해 어떤 과정으로 풀이과정을 전개해야 하는지를 알 수 있을 정도로 문제의 내용이 간결하고 명확하게 제시되어 있다.

고등학교 교육과정을 기본적으로 이수한 학생이 제시문을 이해하고 문제를 해결함에 큰 어려움이 없는 기본수준의 문제 난이도로 출제되어 있어서 일반 고등학생의 기초 능력을 평가하기에 적절한 난이도로 구성되어 있다고 생각한다.

② 논술우수자 자연계(오전)

문항카드 6

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	벡터의 성분, 내적, 벡터크기, 공간좌표, 공간벡터, $\vec{a}$, $\lvert\vec{a}\rvert$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$	
예상 소요 시간	(30) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\le\theta\le\pi)$라고 할 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

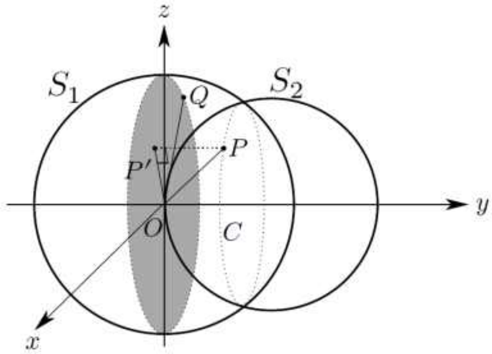
(나) 세 벡터 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

(※) 아래 그림과 같이 두 개의 구

$S_1 : x^2+y^2+z^2=r^2$ $(0<r<2)$, $S_2 : x^2+(y-1)^2+z^2=1$

이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 P에서 zx평면에 내린 수선의 발을 P'이라 하고 원 $x^2+z^2=r^2, y=0$ 위의 점을 Q라 하자. (단, O는 원점이다.)



(2-1) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$일 때, k의 값을 r에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

(2-2) 점 $A(0,4,0)$에 대하여, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 r에 대한 식으로 나타내시오. (10점)

(2-3) 실수 r $(0<r<2)$에 대하여, 사면체 $OPQP'$의 최대 부피를 $V(r)$이라 하자.
(a) $V(r)$이 최대가 되는 r의 값을 구하시오. (10점)
(b) $V(r)$이 최대일 때, 세 점 O,P,Q를 포함하는 평면과 zx평면이 이루는 각 α에 대하여 $\sin\alpha$의 값을 구하시오. (5점)

3. 출제 의도

공간도형의 위치관계 (두 구의 교선, 평면과 평면의 위치관계)를 공간좌표와 벡터의 개념, 특히 벡터의 내적의 뜻을 알고 이를 주어진 문제에 활용할 수 있는지를 알아보고자 하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	□ **교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목** □ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 □ 미적분 I □ 미적분 II ■ 기하와 벡터		
관련 성취기준	관련 제시문	성취기준	과목명: (기하와 벡터)
	(가), (나)	성취기준 1	[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-2) 공간좌표 기벡1321/1322 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
		성취기준 2	[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-3) 공간벡터 기벡1331 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다.
		성취기준 3	[기하와 벡터]-다. 공간 도형과 공간 벡터-3) 공간벡터 기벡1333 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

2) 자료 출처

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	이강섭 외	㈜미래엔	2017	179-186	(가), (나)	
기하와 벡터	황선욱 외	㈜좋은책 신사고	2017	148-155	(가), (나)	

5. 문항 해설

(2-1) 두 구 S_1, S_2의 교선 C위의 한 점 P에서 xz평면에 내린 수선의 발 P'와 S_1 위의 점 Q의 위치벡터가 평행이 되도록 하는 상수 k를 구하는 문제로 벡터 $\overrightarrow{OP'}$의 크기를 알면 쉽게 구할 수 있다.

(2-2) 주어진 점 $A(0,4,0)$에서 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하는 문제이다. 제시문에 주어진 벡터의 내적과 연산 성질을 이용하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$ 를 두 벡터 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$사이의 각 θ를 이용하여 표현하고 (2-1)에서 구한 k값이 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$이 최대, 최소가 된다는 사실을 이용하여 구할 수 있다. 또한 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 값이 최대, 최소가 되는 점 P와 Q의 위치관계를 파악하면 쉽게 해결할 수 있다.

(2-3) (a) 사면체 $OPQP'$가 부피가 최대가 되는 경우는 삼각형 OPQ의 넓이가 최대, 즉 $\overrightarrow{OP'}$과 $\overrightarrow{OQ}$가 서로 수직인 경우이므로 삼각형 OPQ가 직각이등변 삼각형임을 알 수 있고 따라서 사면체 $OPQP'$를 r에 대한 식으로 표현할 수 있다.

(2-3) (b) 두 평면이 이루는 각은 OPP'이 직각삼각형임을 인지하면 쉽게 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1)	C의 방정식은 $x^2+z^2=\left(\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)^2$, $y=\frac{r^2}{2}$이다. C 위의 한 점을 $P(x_1,\frac{r^2}{2},z_1)$라 하면 $P'(x_1,0,z_1)$이고 $\lvert\overrightarrow{OP'}\rvert=\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}$,	5점
	$\lvert\overrightarrow{OQ}\rvert=r$이므로 $k=\pm\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}$이다. (부호 빠지면 -2점)	5점

(2-2)	$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$ 사이의 각을 θ $(0<\theta<\pi)$라 하면 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert^2$ $=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$	3점
	$=16-2r^2+r^2\cos\theta-2r^2+2r^2\cos\theta=3r^2\cos\theta-4r^2+16$	3점
	$\cos\theta$가 최대, 최소가 되는 경우는 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$ 이므로 (2-1)에 의해 $\cos\theta=\dfrac{\lvert\overrightarrow{OP'}\rvert}{\lvert\overrightarrow{OP}\rvert}=\dfrac{\lvert\overrightarrow{OQ}\rvert}{k\lvert\overrightarrow{OP}\rvert}=\dfrac{1}{k}=\pm\dfrac{\sqrt{4-r^2}}{2}$ 이고 $-\dfrac{\sqrt{4-r^2}}{2}\le\cos\theta\le\dfrac{\sqrt{4-r^2}}{2}$ 따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $32-8r^2$ 이다.	4점
(2-3)(a)	$\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$일 때, 삼각형 $OP'Q$의 넓이가 최대이므로 $\triangle OP'Q=\dfrac{r^2\sqrt{4-r^2}}{4}$ 이고 사면체 $OPQP'$의 높이가 $\lvert\overrightarrow{PP'}\rvert=\dfrac{r^2}{2}$이므로 사면체 $OPQP'$의 부피 $V(r)=\dfrac{1}{3}\times(\text{삼각형 } OP'Q\text{의 넓이})\times\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{r^4\sqrt{4-r^2}}{24}$ 이다.	5점
	미분을 이용하여 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 되는 값은 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$	5점
(2-3)(b)	사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 될 때 삼각형 OPQ은 한 변의 길이가 r인 직각이등변삼각형이고 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{\lvert\overrightarrow{PP'}\rvert}{\lvert\overrightarrow{OP}\rvert}=\dfrac{r}{2}$ 이다.	3점
	(2-3)(a)에 의해 $r=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.	2점

7. 예시 답안

(2-1) C의 방정식은 $x^2+z^2=\left(\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)^2$, $y=\frac{r^2}{2}$이다. C 위의 한 점을 $P(x_1,\frac{r^2}{2},z_1)$라 하면 $P'(x_1,0,z_1)$이고

$|\overrightarrow{OP'}|=\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}$, $|\overrightarrow{OQ}|=r$이므로 $k=\pm\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}$이다.

(2-2) $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$ 사이의 각을 θ $(0<\theta<\pi)$라 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}-|\overrightarrow{PQ}|^2$

$=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ})-(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

$=16-2r^2+r^2\cos\theta-2r^2+2r^2\cos\theta=3r^2\cos\theta-4r^2+16$ 이고 $\cos\theta$가 최대, 최소가 되는 경우는 $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP'}$ 이므로 (2-1)에 의해

$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{OP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{k|\overrightarrow{OP}|}=\frac{1}{k}=\pm\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}$ 이고 $-\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}\le\cos\theta\le\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 $32-8r^2$ 이다.

(2-3) (a) $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$일 때, 삼각형 $OP'Q$의 넓이가 최대이므로 $\triangle OP'Q=\frac{r^2\sqrt{4-r^2}}{4}$ 이고

사면체 $OPQP'$의 높이가 $|\overrightarrow{PP'}|=\frac{r^2}{2}$이므로 사면체 $OPQP'$의 부피

$V(r)=\frac{1}{3}\times(\text{삼각형 }OP'Q\text{의 넓이})\times\frac{r^2}{2}=\frac{r^4\sqrt{4-r^2}}{24}$이다.

미분을 이용하여 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 되는 값은 $r=\frac{4}{\sqrt{5}}$이다.

(b) 사면체 $OPQP'$의 부피가 최대가 될 때 삼각형 OPQ은 한 변의 길이가 r인 직각이등변 삼각형이고 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{OQ}$ 이므로 $\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{r}{2}$이다.

(2-3)(a)에 의해 $r=\frac{4}{\sqrt{5}}$이므로 $\sin\alpha=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

고등학교 교육과정 교과목인 기하와 벡터에서 문제가 출제되었다. 기하와 벡터 과목 내용 중 공간상의 두 벡터의 성분에 의한 내적에 대한 내용을 제시문에서 주어지고 이를 이용하여 문제 해결을 요구하고 있다. 벡터에 대한 기본적인 이해와 좌표공간에서 도형의 방정식의 개념을 알고 있다면 고등학교 교육과정을 기본적으로 이수한 학생들이 충분히 해결할 수 있도록 교육과정 내에서 출제되었다고 생각한다.

2) 문제 유형의 적절성

두 벡터가 평행 위치에 있기 위한 조건을 이해하고 있는지, 벡터의 최댓값과 최솟값을 구하기 위해 관계식을 논리적으로 전개할 수 있는지와 이를 종합하여 사면체의 부피와 관련된 문제를 해결할 수 있는지에 대한 종합적인 사고 능력을 평가할 수 있도록 문제가 구성되어 있으며 수험생이 답안을 단계적인 풀이 과정으로 완성하고 있는지를 평가할 수 있는 문제라고 생각된다.

주어진 문제의 내용에 대한 해석과 기본적인 이해를 하고 있는 학생이라면 제시문에서 주어진 조건과 내용이 문제를 해결하기 위해 충분히 적절하게 적용할 수 있도록 제시문 내용이 주어져 있다. 문제 풀이 과정에 꼭 필요한 필수적인 내용만 제시되어 있으므로 학생들이 제시문으로 인해 잘못된 풀이 방향을 선택하지 않도록 적절히 제시되어 있다.

3) 문제 난이도의 적절성

출제자가 설명하고자 하는 내용을 좌표공간상의 기하학적인 그림으로 설명내용을 제시하여 문제 설명이 간결하고 명료하게 이루어 지고 있어서 그림을 보고 문제 내용을 한 번 읽는 것만으로도 수험생들이 충분히 문제를 이해하고 문제해결을 할 수 있도록 제시되어 있다.

벡터의 내적에 대한 기본적인 이해와 공간상에서의 벡터에 대한 이해를 갖고 있는 일반 고등학생이라면 충분히 문제를 이해하고 해결하는 과정이 힘들지는 않을 정도의 난이도로 문제가 구성되어 있다고 생각하며 풀이과정의 완성도를 통해 충분히 학생들의 문제해결 능력을 평가할 수 있다고 생각한다.

③ 논술우수자 자연계(오전)

문항카드 7

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	등비수열, 등비급수, 정적분, 사이값 정리	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n = ar^{n-1}$이다. $r \neq 1$일 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

(나) (사이값 정리) 구간 $[a,b]$ 위의 두 연속함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(a) < g(a)$이고 $f(b) > g(b)$이면, $f(c) = g(c)$인 c가 구간 (a,b)에 반드시 존재한다.

(※) 수열 $\{a_n\}$과 $\{x|x \geq 0\}$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(1) 구간 $[0,1]$에서 $f(x) = x$이다.

(2) $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 구간 $[a_n, a_{n+1}]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 기울기가 $(-1)^n$인 직선의 일부이다.

(3) 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_{n+1}) = -2f(a_n)$이다.

(3-1) 수열 $\{a_n\}$의 5번째 항 a_5의 값을 구하시오. (5점)

(3-2) $f(x) = 0$을 만족하는 x $(x > 0)$의 값을 작은 것부터 순서대로 $x_1, x_2, x_3, \ldots$이라 고 할 때, x_{10}의 값을 구하시오. (5점)

(3-3) $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 양수 α의 값이 구간 (a_k, a_{k+1})에 속할 때, k의 값을 구하시오. (10점)

(3-4) $|m| \leq \dfrac{1}{10}$인 실수 m에 대하여, $\displaystyle\int_0^{x} (f(t) - mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값이 무한히 많음을 보이시오. (15점)

3. 출제 의도

등비수열, 등비급수와 이로부터 만들어진 도형의 성질을 파악할 수 있는지, 적분의 기본개념을 이해하고 있는지, 사이값 정리를 이용해서 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다. 등비수열과 급수는 함수를 정의하는 과정에 숨겨져 있으며, 이 함수를 파악하는 과정에서 등비수열이 만들어 진다. 이러한 상황에서 닮은 도형이 배열되어 있는 것을 제시문의 도움을 받아서 알아낼 수 있도록 하고, 등비급수의 정확한 식을 계산해서 사이값 정리를 적용해야 하는 문항까지 단계적으로 제시하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	☐ **교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** ☐ 수학 I ■ 수학 II ☐ 확률과 통계 ■ 미적분 I ☐ 미적분 II ☐ 기하와 벡터
관련 성취기준	(see below)

관련 제시문	성취기준	과목명: (수학 II)
(가)	성취기준 1	수학 II 다. 수열 1) 등차수열과 등비수열 수학2312-2. 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
관련 제시문	**성취기준**	**과목명: (미적분 I)**
(나)	성취기준 3	미적분 I 나. 함수의 극한과 연속 2) 함수의 연속 미적1222. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 II	신항균 외	지학사	2017	137	(가)	
미적분 I	신항균 외	지학사	2017	75-76	(나)	재구성

나) 교과서 외 자료 등을 활용한 경우: 해당 없음

5. 문항 해설

(3-1) 주어진 조건으로부터 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 패턴을 파악하면 a_5의 값은 별도의 공식에 대한 지식 없이도 구할 수 있다. 이 문항은 문제의 조건을 잘 파악했는지 확인하는 문항이다.

(3-2) 이 문항 역시 문제의 조건을 잘 파악했는지 확인하는 문항으로, 등비수열의 합에 관한 공식을 이용하여 간단한 계산을 하도록 한다.

(3-3) 정적분과 넓이와의 관계를 인지하고 있다면 이 문제도 별도의 공식을 적용하지 않아도 해결할 수 있다. 예를 들어, $1-4+16-64+256-1024+4096/2$이 1000을 넘는다는 것을 확인할수 있고, 이 값이 $\int_0^{a_7} f(t)\,dt$ 이므로 $k=6$임을 알 수 있다.

(3-4) $F(x)$는 구간 $[x_{n-1}, x_n]$에서 n이 홀수이면 증가함수, n이 짝수이면 감소함수이므로 이 구간 $[x_{n-1}, x_n]$에서 제시문 (나)에서 주어진 사이값 정리를 적용한다는 전략을 세울 수 있다.

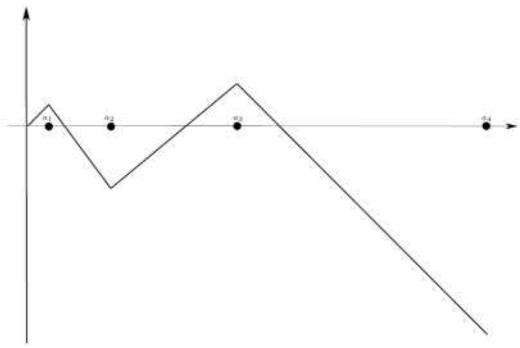
6. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	구간 (a_n, a_{n+1})에서 함수 $f(x)$의 x절편을 x_n이라고 하면, $\{x_n\}$은 $x_1=2$이고 $n \ge 2$일 때 $x_n - x_{n-1} = 2 \times 2^{n-1}$을 만족한다. $a_n = \dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}$ 이므로,	3점
	$x_4 = \dfrac{2(2^4-1)}{2-1} = 30,\ x_5 = 30+32 = 62$이고 $a_5 = \dfrac{30+62}{2} = 46$이다.	2점
(3-2)	x_n은 등비수열 $\{2^n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로 $x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1}-2$이다.	3점
	따라서 $x_{10} = 2^{11}-2 = 2046$이다.	2점
(3-3)	$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})f(a_n) = \frac{1}{2}\times 2^n \times (-2)^{n-1} = (-4)^{n-1}$ $\int_0^{a_n} f(t)\,dt = \int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt + \int_{x_{n-1}}^{a_n} f(t)\,dt$	5점

	$= (1-4+4^2- \cdots +(-4)^{n-2}) + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2}$ $= \dfrac{(-4)^{n-1}-1}{(-4)-1} + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2} = \dfrac{3(-4)^{n-1}+2}{10}$	
	$4^5 = 1024,\ 4^6 = 4096$이므로, $\int_0^{a_n} f(t)\,dt$가 1000이상인 가장 작은 n의 값은 $3(-4)^{n-1}+2 > 10000$ 즉 $(-4)^{n-1} > 3332.6$을 만족하는 $n=7$이다. 따라서 $\int_0^{x} f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 x의 값은 구간 (a_6, a_7)에 있다. 그러므로 $k=6$. (논리적인 설명이 없이 식만 나열한 뒤 정확한 답을 구한 경우 최대 7점)	5점
	$F(x) = \int_0^{x} f(t)\,dt$라고 하면, 그런데, $F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t)\,dt = 1-4+4^2- \cdots +(-4)^{n-1}$ $= \dfrac{(-4)^n-1}{(-4)-1} = \dfrac{-(-4)^n+1}{5}$ 이고, $G(x) = \int_0^{x} mt\,dt = \dfrac{1}{2}mx^2$이라고 하면, $x_n = 2(1+2+\cdots 2^{n-1}) = 2\times 2^n - 2$이므로 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2$ 이다.	5점
(3-4)	이제, $-\dfrac{1}{10} \le m \le \dfrac{1}{10}$이라고 하면, n이 홀수일 때 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2 = 2m\,(4^n - 2\times 2^n + 1) < \dfrac{1}{5}(4^n+1) = F(x_n)$ n이 짝수일 때 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2 = 2m\,(4^n - 2\times 2^n + 1) > -\dfrac{1}{5}(4^n-1) = F(x_n)$이므로, 제시문 (나)의 사이값 정리에 의하여 $F(x) = G(x)$인 값이 모든 구간 (x_n, x_{n+1})에 하나씩 존재한다.	7점
	따라서 등식 $\int_0^{x} (f(t) - mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값은 무수히 많다.	3점

7. 예시 답안

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



(3-1) 구간 (a_n, a_{n+1})에서 함수 $f(x)$의 x절편을 x_n이라고 하면, $\{x_n\}$은 $x_1 = 2$이고 $n \ge 2$일 때 $x_n - x_{n-1} = 2 \times 2^{n-1}$을 만족한다.

$a_n = \dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}$이므로, $x_4 = \dfrac{2(2^4-1)}{2-1} = 30, x_5 = 30+32 = 62$이고 $a_5 = \dfrac{30+62}{2} = 46$이다.

(별해) $a_2 = 2+2 = 4$, $a_3 = 2+4+4 = 10$, $a_4 = 2+4+8+8 = 22$, $a_5 = 2+4+8+16+16 = 46$이다.

(3-2) x_n은 등비수열 $\{2^n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합과 같으므로 $x_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$이다.

따라서 $x_{10} = 2^{11} - 2 = 2046$이다.

(3-3) $f(a_n) = (-1)^{n+1}2^{n-1}$이므로,

$\displaystyle\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})f(a_n) = \frac{1}{2} \times 2^n \times (-2)^{n-1} = (-4)^{n-1}$이므로,

$$\int_0^{a_n} f(t)\,dt = \int_0^{x_{n-1}} f(t)\,dt + \int_{x_{n-1}}^{a_n} f(t)\,dt$$

$= (1-4+4^2- \cdots +(-4)^{n-2}) + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2} = \dfrac{(-4)^{n-1}-1}{(-4)-1} + \dfrac{(-4)^{n-1}}{2} = \dfrac{3(-4)^{n-1}+2}{10}$이다.

$4^5 = 1024, 4^6 = 4096$이므로, $\displaystyle\int_0^{a_n} f(t)\,dt$가 1000이상인 가장 작은 n의 값은 $3(-4)^{n-1} + 2 > 10000$

즉 $(-4)^{n-1} > 3332.6$을 만족하는 $n=7$이다. 따라서 $\int_0^x f(t)\,dt = 1000$인 가장 작은 x의 값은 구간 (a_6, a_7)에 있다.
그러므로 $k=6$ 이다.

(3-4) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$라고 하면,

그런데, $F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t)\,dt = 1-4+4^2- \cdots +(-4)^{n-1} = \dfrac{(-4)^n-1}{(-4)-1} = \dfrac{-(-4)^n+1}{5}$이고, $G(x) = \int_0^x mt\,dt = \dfrac{1}{2}mx^2$이라고 하면, $x_n = 2(1+2+\cdots 2^{n-1}) = 2\times 2^n - 2$이므로 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2$이다.

이제, $-\dfrac{1}{10} \le m \le \dfrac{1}{10}$이라고 하면,

n이 홀수일 때 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2 = 2m\,(4^n - 2\times 2^n + 1) < \dfrac{1}{5}(4^n+1) = F(x_n)$이고

n이 짝수일 때 $G(x_n) = 2m\,(2^n-1)^2 = 2m\,(4^n - 2\times 2^n + 1) > -\dfrac{1}{5}(4^n-1) = F(x_n)$이므로,

제시문 (나)의 사이값 정리에 의하여 $F(x) = G(x)$인 값이 모든 구간 (x_n, x_{n+1})에 하나씩 존재한다.

따라서 등식 $\int_0^x (f(t)-mt)\,dt = 0$을 만족하는 양수 x의 값은 무수히 많다.

8. 선행학습 자체영향평가 위원회 분석

1) 고교 교육과정 수준 준수 여부

일반 고등학교의 수학교과목 수학II와 미적분I의 내용을 바탕으로 문제가 출제되었다. 등비수열에 대한 정의를 알고 있고 방정식에서의 근의 개수가 무수히 많은 경우 사잇값 정리를 이용하여 설명하는 내용 등은 일반 고등학교 교육과정에서 충분히 다루고 있으며 이를 활용한 문제를 해결하는 학습이 이루어지고 있다. 이를 반영하여 문제가 출제되었다고 생각한다.

2) 문제 유형의 적절성

주어진 조건을 이해하고 이를 그래프로 나타내거나 만족하는 값을 직접 구하여 나열하는 방식으로 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하는 문제유형이며 주어진 조건에 맞는 값의 일정한 규칙을 논리적인 과정의 설명을 포함하여 일반항으로 유추하고 이를 종합하여 사잇값 정리를 적용해서 출제자가 요구하는 내용을 설명할 수 있도록 문제가 구성되어 있다고 생각한다.

문제를 해결하기 위한 방법으로 그래프를 이용하거나 구체적인 값을 구하여 해결하는 등 다양한 방법으로 접근함에 제시문의 내용은 매우 구체적이며 간결하게 제시되어 있어서 수험생이 문제를 이해하고 답안을 작성함에 필요한 요소를 충분히 제시하고 있다고 생각한다. 제시문 내용은 답안 작성 시 풀이과정의 절차를 자연스럽게 전개할 수 있도록 설명해 주고 있다고 생각된다.

3) 문제 난이도의 적절성

수험생들로 하여금 출제자의 출제 의도와 구하라고 하는 요구사항이 무엇인지 바로 인지할 수 있도록 간결하게 문제가 구성되어 있다고 생각된다. 문제의 제시문에서 부터 각 문항까지의 내용 전개가 한 문장의 글을 읽어 가고 있다는 생각이 들도록 구성되어 있다고 생각된다.

출제된 문항들은 단순한 계산에 의하여 요구하는 값을 구할 수 있는 부분도 있으나 출제자는 계산되어 지는 과정에 대한 설명을 조금은 구체적으로 요구하고 있다. 그러나 일반 고등학생들이 학교에서의 정기고사 중 작성하는 서술형 문항의 답안 작성정도의 설명과 전개 내용만으로도 충분히 좋은 결과를 얻을 수 있는 정도의 난이도로 출제 되었다고 생각된다.