2019학년도 인하대학교 수시모집 논술모의고사 자연계열

문항카드(해설, 예시 답안, 평가 기준)

■ 문항 1

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	수시모집 논술전형 논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	타원, 점과 직선과의 거리, 음함수의 미분, 벡터의 내적	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 점 $P(x_1,y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(나) (산술, 기하평균) $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad \text{(단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립)}$$

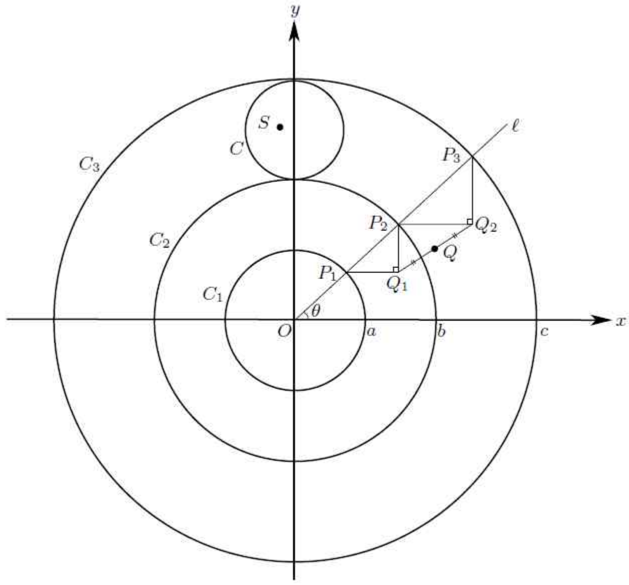
(다) x의 함수 y가 음함수 $f(x,y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(라) 영벡터가 아닌 두 평면 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0\leq\theta\leq\pi)$라고 할 때

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(※) 아래 그림과 같이 반지름이 a, b, c인 세 개의 원 C_1, C_2, C_3와 C_2, C_3에 접하고 중심이 y축에 놓여 있는 원 C가 있다. 원점 O를 지나는 직선 ℓ이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ일 때 (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$), C_1, C_2, C_3가 만나는 점을 각각 P_1,P_2,P_3라 하자. P_1을 지나고 x축에 평행인 직선과 P_2를 지나고 y축에 평행인 직선이 만나는 점을 Q_1이라 하고 P_2를 지나고 x축에 평행인 직선과 P_3를

지나고 y축에 평행인 직선이 만나는 점을 Q_2라 하자. 점 Q는 Q_1과 Q_2의 중점이다.



(1-1)

(a) 점 Q의 자취가 그리는 곡선의 방정식을 구하시오. (5점)

(b) 세 점 O, Q_1, Q_2가 한 직선 위에 있을 때, a, b, c의 관계식을 구하시오. (5점)

(1-2) 세 점 O, Q_1, Q_2가 한 직선 위에 있고 $a=2$, $b=4$라 하자.

(a) Q가 그리는 곡선에서 접선이 좌표축과 이루는 삼각형의 넓이가 최소가 되는 점과 사각형 $P_1Q_1Q_2P_2$의 넓이가 최대가 될 때의 점 Q가 같음을 보이시오. (12점)

(b) 점 Q_1은 사각형 $P_1Q_1Q_2P_2$의 넓이가 최대가 되는 점이고 점 S는 원 C의 경계선을 포함하는 내부의 점일 때, $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OS}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (13점)

3. 출제 의도

매개변수를 이용하여 점을 표현하고 그 점들이 그리는 도형이 타원임을 파악하고 음함수의 미분법을 이용하여 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는지와 주어진 조건의 삼각형의 최소 넓이와 사각형의 최대 넓이를 만족하는 점을 구할 수 있는 지를 평가하고자 하였다. 또한, 원과 접선, 직선까지의 거리의 개념을 벡터의 내적에 적용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 이를 위하여 학생들에게 익숙한 내용과 그에 맞는 수준의 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보도록 출제하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정“의 일반과목
■ 수학 I ■ 수학Ⅱ □ 확률과 통계 □ 미적분 I □ 미적분Ⅱ ■ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="7">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: 수학I</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학I]-다. 도형의 방정식-1) 평면좌표
수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: 수학II</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학II]-가. 집합과 명제-2) 명제
수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(다),(라)</td><td>성취기준 1</td><td>[기하와 벡터]-가. 평면 곡선-2) 평면 곡선의 접선
기벡1121. 음함수를 미분하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[기하와 벡터]-나. 평면 벡터-2) 평면 벡터의 성분과 내적
기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고 쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 I	우정호 외	동아출판	2017	177	(가)	
수학 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	140	(가)	
수학 II	류희찬 외	천재교육	2017	53	(나)	
수학 II	정상권 외	(주)금성출판사	2017	54	(나)	
기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2017	41, 96-99	(다), (라)	
기하와 벡터	우정호 외	동아출판	2016	41, 100-103	(다), (라)	
기하와 벡터	김창동 외	교학사	2017	35, 80-82	(다), (라)	

5. 문항 해설

(1-1) (a) 주어진 매개변수 θ를 이용하여 원 위의 점을 삼각함수로 표현하면 그 점들이 그리는 곡선이 타원임을 알수 있다.

(b) 세 점이 한 직선상에 있다는 조건을 이용하면 a, b, c사이의 관계식을 구할 수 있다.

(1-2) (a) 문항 (1-1)(b)의 a,b,c사이의 관계식으로부터 타원의 방정식을 구하고 음함수의 미분법과 산술기하평균을 이용하여 삼각형의 넓이가 최소가 되는 점과 사각형의 넓이가 최대가 되는 점을 구할 수 있다.

(b) 서로 수직인 두 벡터들 사이의 관계와 원과 직선과의 위치관계로부터 주어진 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위
문항번호</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td>(1-1)(a)</td><td>$\frac{x^2}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=1$를 구하면 3점
x, y의 범위를 구하면 2점</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>(1-1)(b)</td><td>$b^2=ac$ 를 구하면 5점</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(1-2)(a)</td><td>타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$을 구하면 2점</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>삼각형의 넓이가 최소가 되는 점을 구하면 5점</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>사각형의 최대넓이가 되는 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 3점
$Q=(6\cos\theta, 3\sin\theta)=(3\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$를 구하면 2점</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(1-2)(b)</td><td>$Q_1(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$을 구하면 2점</td><td>2점</td></tr>
<tr><td>임의의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OR}=\sqrt{2}k$임을 보이면 5점</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>$k=6+2\sqrt{5}$, $k=6-2\sqrt{5}$를 구하면 4점</td><td>4점</td></tr>
<tr><td>$\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OS}$의 최댓값과 최솟값을 구하면 2점</td><td>2점</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

(1-1)(a) 그림으로부터 $P_1=(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $P_2=(b\cos\theta, b\sin\theta)$, $P_3=(c\cos\theta, c\sin\theta)$이므로 $Q_1=(b\cos\theta, a\sin\theta)$, $Q_2=(c\cos\theta, b\sin\theta)$를 얻는다. $Q=\frac{Q_1+Q_2}{2}=\left(\frac{b+c}{2}\cos\theta, \frac{a+b}{2}\sin\theta\right)$이므로 $x=\frac{b+c}{2}\cos\theta$, $y=\frac{a+b}{2}\sin\theta$라 놓으면 $\frac{x^2}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=1$를 만족한다. 따라서, 점 Q의 자취가 그리는 곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=1$, $x,y>0$이다.

(1-1)(b) 세 점 O, Q_1, Q_2가 한 직선 위에 있으므로 벡터 $\overrightarrow{OQ_1}$과 $\overrightarrow{OQ_2}$는 평행이다. 즉 $\dfrac{a\sin\theta}{b\cos\theta}=\dfrac{b\sin\theta}{c\cos\theta}$이므로 $b^2=ac$이다.

(1-2)(a) $a=2,\ b=4$이므로 문항 (1-1)(b) 에 의해 $c=8$이므로 Q는 타원 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 위의 점이다. 이 타원 위의 점을 (x_1, y_1)이라 하자. ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $x_1>0,\ y_1>0$) 한편, 음함수의 미분법을 이용하여 이 점에서의 접선의 방정식을 구하면 $\dfrac{x_1 x}{36}+\dfrac{y_1 y}{9}=1$이다. 따라서, 좌표축과 만나는 점을 A, B라 하면 $A\left(\dfrac{36}{x_1},0\right), B\left(0,\dfrac{9}{y_1}\right)$이고 $\dfrac{x_1^2}{36}>0,\ \dfrac{y_1^2}{9}>0$이므로 산술기하평균에 의해 $1=\dfrac{x_1^2}{36}+\dfrac{y_1^2}{9}\geq 2\sqrt{\dfrac{x_1^2}{36}\dfrac{y_1^2}{9}}=2\dfrac{x_1y_1}{18}=\dfrac{x_1y_1}{9}$이다. 이 때, 최소가 되는 점은 $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{3}$인 점이므로 $Q=(3\sqrt{2},\dfrac{3}{\sqrt{2}})$가 된다.

한편, 사각형 $P_1Q_1Q_2P_2$의 넓이를 $A(\theta)$라 하면 $A(\theta)=4\sin\theta\cos\theta=2\sin2\theta$이고 $A'(\theta)=4\cos2\theta=0$인 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ ($0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$)에서 $A(\theta)$가 최대가 된다. 따라서, $Q=(6\cos\theta, 3\sin\theta)=(3\sqrt{2},\dfrac{3}{\sqrt{2}})$이므로 삼각형의 넓이가 최소가 되는 점과 일치한다.

(1-2)(b) (1-2)(a)에 의해 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이고 $Q_1=(b\cos\theta, a\sin\theta)$이므로 $Q_1=(2\sqrt{2},\sqrt{2})$이다. $\overrightarrow{OQ_1}=(2\sqrt{2},\sqrt{2})$에 수직인 직선의 방정식을 $y=-2x+k$라 하자. 이 직선위의 임의의 점을 $R(x,-2x+k)$이라 하면

$$\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OR}=(2\sqrt{2},\sqrt{2})\cdot(x,-2x+k)=\sqrt{2}k$$

즉, 직선 위의 임의의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OR}=\sqrt{2}k$이다.

한편, 원 $C: x^2+(y-6)^2=2$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식을 $y=-2x+k$라 하면 원 C의 중심 $(0,6)$에서 직선 $2x+y-k=0$까지의 거리가 2이므로 $\dfrac{|6-k|}{\sqrt{5}}=2$를 만족한다. 따라서, $k=6+2\sqrt{5}$ 또는 $k=6-2\sqrt{5}$이다. 그러므로

$\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OS}$의 최댓값은 $\sqrt{2}k=\sqrt{2}(6+2\sqrt{5})=6\sqrt{2}+2\sqrt{10}$이고

$\overrightarrow{OQ_2}\cdot\overrightarrow{OS}$의 최솟값은 $\sqrt{2}k=\sqrt{2}(6-2\sqrt{5})=6\sqrt{2}-2\sqrt{10}$이다. 따라서, $12\sqrt{2}$이다.

(별해) (1-2)(a)에 의해 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이고 $Q_1=(b\cos\theta, a\sin\theta)$이므로 $Q_1=(2\sqrt{2},\sqrt{2})$이다. 원 $C: x^2+(y-6)^2=2$의 중심 $T(0,6)$에 대해 $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TS}$ 이므로

$$\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ_1}\cdot(\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TS})=\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{TS}$$

가 성립한다. 한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OQ_1}$, $\overrightarrow{TS}$의 사잇각을 $\tilde{\theta}$라고 하면 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{TS}=|\overrightarrow{OQ_1}||\overrightarrow{TS}|\cos\tilde{\theta}$ 이므로 최댓값은 $\cos\tilde{\theta}=1$일 때, 최솟값은 $\cos\tilde{\theta}=-1$일 때 얻어진다. 따라서 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OS}$의 최댓값과 최솟값이 합은 $2\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OT}=2(2\sqrt{2},\sqrt{2})\cdot(0,6)=12\sqrt{2}$이다.

■ 문항 2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	수시모집 논술전형 논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	집합과 명제, 귀류법	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

(가) 집합 X에 대하여, $A_1\cup\cdots\cup A_n$이 X의 부분집합들이고 다음 두 조건

(a) $A_1\cup\cdots\cup A_n=X$

(b) 임의의 두 집합 A_i와 A_j에 대하여 $A_i\cap A_j=\varnothing$

을 만족할 때, $A_1\cup\cdots\cup A_n$을 X의 분할이라고 부른다.

예를 들어, 집합 $X=\{1,2,3,\ldots,300\}$에 대하여

$A_1=\{3k\mid k=1,2,\ldots,100\}$

$A_2=\{3k-1\mid k=1,2,\ldots,100\}$

$A_3=\{3k-2\mid k=1,2,\ldots,100\}$

는 X의 분할이다.

(나) 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 결론을 부정하면 가정에 모순이 되거나 이미 참이라고 알려진 사실에 모순됨을 유도하여 주어진 명제가 참임을 증명하기도 하는데, 이와 같은 증명 방법을 귀류법이라고 한다.

(※) 집합 $X=\{1,2,3,\ldots,300\}$에 대하여, 세 집합

$B_1=\{1,2,3\}\cup\{3k\mid 4\le k\le 100\}$

$B_2=\{4,5,6\}\cup\{3k-1\mid 4\le k\le 100\}$

$B_3=\{7,8,9\}\cup\{3k-2\mid 4\le k\le 100\}$

는 X의 분할이 된다. 이때, 각 $B_i, i=1,2,3$는 다음과 같은 조건을 만족한다.

(조건) 15 이상 300 이하의 모든 정수는 B_i의 서로 다른 두 원소의 합이다.

이와 같은 조건을 만족하는 X의 분할을 '좋은 분할'이라고 부르자. 우리는 이 집합 X에 대하여 다음 명제가 참임을 귀류법을 써서 증명하고자 한다.

[명제] 집합 X에 대하여 네 개의 부분집합으로 이루어진 좋은 분할은 존재하지 않는다.

(2-1) 먼저, 네 개의 집합 S_1, S_2, S_3, S_4가 $X=\{1,2,3,\ldots,300\}$의 좋은 분할이라고 가정하자. 그리고 각

$i=1,2,3,4$에 대하여, $T_i = S_i \cap \{1, 2, \dots, 23\}$이라 하자. 그러면, 각 i에 대하여 정수 $15, 16, \dots, 24$ 각각은 T_i의 서로 다른 두 원소의 합으로 표현되어야 한다. 각 T_i에는 최소한 몇 개의 원소가 있어야 하는가? (10점)

(2-2) T_1, T_2, T_3, T_4 중 적어도 하나는 5개의 원소를 가짐을 보이시오. (8점)

(2-3) 5개의 원소를 갖는 집합 T_j에 대하여, 10개의 정수 $15, 16, \dots, 24$ 각각이 T_j의 서로 다른 두 원소의 합이 되어야 한다는 사실로부터 발생하는 모순을 찾으시오. (12점)

3. 출제 의도

집합의 분할과 관련된 어떤 상황에 대한 문제로서, 기본적인 논리적 사고능력을 시험하는 문제이다. 단순히 수의 계산을 통하여 답을 구하는 문제가 아니어서 학생들에게는 다소 생소한 문제 유형이라 할 수 있으나, 수학적으로 서술된 문장을 독해하는 능력과 논리적인 사고 능력을 평가하고자 하고 있다. 문제에서 묻고 있는 논제를 파악하기만 하면 문제의 풀이 자체는 별 어려움이 없도록 문제를 구성하였다. 우리나라 학생들은 주로 계산하는 데에는 능숙한 반면 논리적 사고와 서술에는 다소 약한 점이 있는데, 이 문제는 학생들의 논리적 사고와 서술의 능력 배양하는 데에 도움이 되는 본보기가 되는 문제라 할 수 있다. 또 한편으로는 이러한 논술, 사고형 문제는 대학별 수리논술시험의 취지에 좀 더 부합한다고도 할 수 있다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 확률과 통계 □ 미적분Ⅰ □ 미적분Ⅱ □ 기하와 벡터

관련 성취기준

관련 제시문	성취기준	과목명: 확률과 통계
(가)	성취기준 1	[확률과 통계]-가. 순열과 조합-3)분할 확통1131. 유한집합을 서로소인 몇 개의 집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
관련 제시문	**성취기준**	**과목명: 수학 II**
(가), (나)	성취기준 1	[수학 II]-가. 집합과 명제-1) 집합 수학2111. 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.
	성취기준 2	[수학 II]-가. 집합과 명제-2) 명제 수학2125. 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고 쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 II	이준열 외	천재교육	2017	50	(나)	
확률과 통계	이준열 외	천재교육	2017	60, 61	(가)	○
확률과 통계	김창동 외	교학사	2017	49	(가)	○

5. 문항 해설

(2-1) 10개의 정수 $15, 16, \ldots, 24$가 T_i의 두 원소의 합으로 표현되어야 하므로, T_i에는 최소한 5개의 원소가 있어야 함을 밝히는 문제로서, 본 문제에서 어떠한 답을 요구하는 것인지만 제대로 이해하면, 답을 구하는 것은 자체는 어렵지 않다.

(2-2) T_1, T_2, T_3, T_4는 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 분할이므로, 이 네 집합의 원소의 개수의 합은 당연히 23이다. 문항 (2-1)로부터 각 T_i에는 최소한 5개 이상의 원소가 있어야 하므로, 이들 중 적어도 하나는 원소를 5개만 가져야 함은 당연하다. 모두 6개 이상의 원소를 가진다면 이 네 집합의 원소의 개수의 합은 24이상이 되기 때문이다.

(2-3) 단순한 논리적 사고를 통하여 모순을 유도하여야 한다. 10개의 정수 $15, 16, \ldots, 24$의 합은 195이다. 한편, 5개의 원소를 갖는 집합 T_j의 원소를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하면, 이들 중 두 개씩의 원소의 합의 총합은 $4 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$이 되고 이게 195와 같아야 하므로 모순이 된다. 따라서, 귀류법을 이용하여 ‘X에 대하여 네 개의 부분집합으로 이루어진 좋은 분할은 존재하지 않는다’는 명제를 증명한 것이 된다.

6. 채점 기준

하위 문항번호	채점 기준	배점
(2-1)	${}_5C_2 = 10$이므로 5개 이상임을 서술하면 10점	10점
(2-2)	T_1, T_2, T_3, T_4는 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 분할이므로, 이 네 집합의 원소의 개수의 합이 23임을 서술하면 3점.	3점
	각 T_i에는 최소한 5개 이상의 원소가 있어야 하는데, 만일 T_i들 각각이 다 6개 이상의 원소를 가질 수 없음을 서술하면 5점	5점

(2-3)	T_1, T_2, T_3, T_4가 집합 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 분할임을 쓰면 2점	2점
	$15 + \cdots + 24 = 195$임을 쓰면 2점	2점
	5개의 원소 중 두 개씩의 원소의 총합이 $4 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$이 됨을 보이면 6점	6점
	모순이 된다는 결론을 얻으면 2점	2점

7. 예시 답안

(2-1) 10개의 정수 $15, 16, \ldots, 24$가 T_i의 두 원소의 합으로 표현되어야 하므로, ${}_5C_2 = 10$으로부터 T_i에는 최소한 5개 이상의 원소가 있어야 함을 알 수 있다.

(2-2) T_1, T_2, T_3, T_4는 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 분할이므로, $n(T_1) + n(T_2) + n(T_3) + n(T_4) = 23$이다. 한편, 문항 (2-1)로부터 각 T_i에는 최소한 5개 이상의 원소가 있어야 하는데, 만일 T_i들 각각이 다 6개 이상의 원소를 가지면 원소 개수의 합이 24개 이상이 되어 모순이 되므로, 이들 중 적어도 하나는 원소를 5개만 가져야 한다.

(2-3) 10개의 정수의 합은 $15 + \cdots + 24 = 195$이다. 한편, 5개의 원소를 갖는 집합 T_j의 원소를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하자. 이들 중 두 개씩의 원소의 합의 총합을 생각하면 각 x_i가 네 번씩 등장한다. 따라서 전체 합은 $4 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$이 되고 이게 195와 같아야 하는데 195는 4의 배수가 아니므로 모순이 된다.

■ 문항 3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	수시모집 논술전형 논술우수자		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	미분, 적분	
예상 소요 시간	(40) 분 / 전체 120분		

2. 문항 및 자료

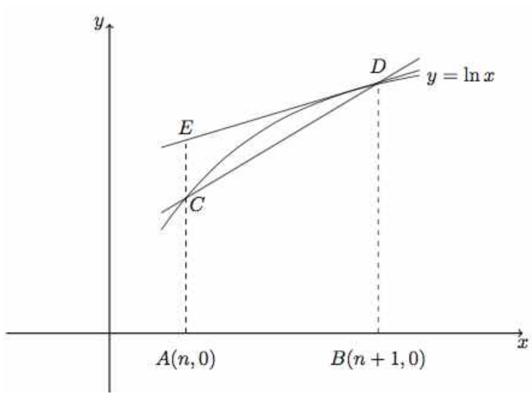
(가) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{n}{n+1}$$

(나) 로그함수의 부정적분은 다음과 같이 주어진다.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

(※) 다음 그림과 같이 $y=\ln x$의 그래프와 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$의 교점을 각각 C, D라고 하자. 또한 $y=\ln x$의 $x=n+1$에서의 접선과 수직선 $x=n$의 교점을 E라고 하자. 사다리꼴 $ABDC$의 넓이를 a_n, 사다리꼴 $ABDE$의 넓이를 c_n이라 하고, $y=\ln x$의 그래프와 x축, 그리고 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 b_n이라 하자.



(3-1) $0 \le x < 1$인 모든 x에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$x+\ln(1-x)+\frac{x^2}{2(1-x)} \ge 0$$

(3-2) 양의 정수 n에 대하여 $c_n - a_n$를 구하시오. (5점)

(3-3) 양의 정수 k에 대하여 $a_k < b_k < c_k$이므로, $b_k - a_k < c_k - a_k$임은 자명하다. 모든 양의 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \frac{1}{4}$$

(3-4) 앞에서 얻은 부등식 $\sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{1}{4} < \sum_{k=1}^{n-1} a_k < \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \geq 2)$ 을 이용하여, $n \geq 2$인 양의 정수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (15점)

$$e^{\frac{3}{4}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

3. 출제 의도

정적분의 의미를 이용하여 주어진 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 이를 위해 로그함수의 미분과 적분을 적용하여 적절한 부등식들을 얻어내고 이를 이용할 수 있는지를 평가하기 위해 단계적으로 문항을 풀도록 유도하였다.

4. 출제 근거

1) 교육과정 근거

<table>
<tr><td>적용
교육과정</td><td colspan="3">■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목
□ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ □ 확률과 통계 □ 미적분Ⅰ ■ 미적분Ⅱ □ 기하와 벡터</td></tr>
<tr><td rowspan="4">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: 수학Ⅱ</td></tr>
<tr><td>(가)</td><td>성취기준 1</td><td>[수학II]-(다)수열-2) 수열의 합
수학2321. Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: 미적분Ⅱ</td></tr>
<tr><td>(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[미적분II]-라. 적분법-1) 여러가지 적분법
미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행연도	참고 쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	138-147	(가)	
수학Ⅱ	황선욱 외	좋은책신사고	2017	118-124	(가)	
미적분Ⅱ	황선욱 외	좋은책신사고	2017	136-146	(나)	
미적분Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	168-186	(나)	

5. 문항 해설

로그함수의 정적분의 정의를 알고 이를 이용하여 주어진 부등식을 유도하도록 하는 문항이다. 정적분을 사다리꼴의 넓이와 비교를 하여 정적분의 범위를 구하고 이로부터 $n!$의 범위를 구할 수 있도록 문제를 설계하였다.

6. 채점 기준

하위문항번호	채점 기준	배점
(3-1)	$\ln x$의 미분을 이용하여 주어진 식을 미분	3점
	미분을 이용하여 주어진 부등식을 증명	2점
(3-2)	$y=\ln x$의 접선을 계산	2점
	a_n, c_n을 정확히 계산	3점
(3-3)	$\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k)$이 $\frac{1}{4}$보다 작다는 것을 보임	5점
	c_n-a_n과 b_n-a_n사이의 관계를 이해하여 $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$이 $\frac{1}{4}$보다 작음을 보임	5점
(3-4)	$\sum_{k=1}^{n}a_k$, $\sum_{k=1}^{n}b_k$를 구하고, 이를 이용하여 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{3}{4}<\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n-1)+\ln n<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1$를 얻음.	10점
	$e^{\frac{3}{4}}\times\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}<n!<e\times\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$을 보임	5점

7. 예시 답안

(3-1) 함수 $f(x)=x+\ln(1-x)+\dfrac{x^2}{2(1-x)}$는 $f(0)=0$이고, $0 \le x < 1$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x)^2} \ge 0$이므로 $f(x) \ge 0$이다. 따라서 주어진 부등식을 얻는다.

(3-2) 점 C, D의 좌표는 각각 $(n, \ln n)$, $(n+1, \ln(n+1))$이다. 그리고 점 D에서의 $y=\ln x$에서의 접선은 $y=\dfrac{1}{n+1}(x-n-1)+\ln(n+1)$이므로, 점 E의 좌표는 $\left(n, -\dfrac{1}{n+1}+\ln(n+1)\right)$이다. 점들의 좌표로부터 사다리꼴의 넓이를 구하면

$$a_n=\frac{\ln n+\ln(n+1)}{2}, \quad c_n=\ln(n+1)-\frac{1}{2(n+1)}$$

이다. 따라서 $c_n-a_n=\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$이다.

(3-3) 문항 (3-1), (3-2)의 결과를 이용하면

$$c_n-a_n=\frac{1}{2}\left[-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\right] \le \frac{1}{4n(n+1)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\sum_{k=1}^{n}(c_k-a_k) \le \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)}<\frac{1}{4}$$

임을 알 수 있다.

(3-4) 문항 (3-3) 의 결과를 이용하면 $n \ge 2$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k-\frac{1}{4}<\sum_{k=1}^{n-1}a_k<\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

임을 알 수 있다. 그리고

$$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\int_1^n \ln x\,dx=n\ln n-n+1$$

이므로

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\frac{3}{4}<\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln(n-1)+\ln n<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+1$$

이다. 따라서 $n \ge 2$에 대하여 $e^{\frac{3}{4}} \times \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}<n!<e \times \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$를 얻는다.