2019학년도 수시모집

논술 모의고사 문제지

자연계열 (120분)

학 교 명		학년 / 반	
번　　호		성　　명	

■ 일반 유의사항

1. 시험시간은 120분, 배점은 100점입니다.
2. 답안을 구상할 때 문제지의 여백이나 문제지 내의 연습장을 사용하시오.
3. 답안은 반드시 해당 문항의 답란에 작성하고, 답란 밖에는 작성하지 마시오.
4. 답안을 작성할 때 반드시 흑색 필기구만을 사용하시오(연필, 샤프 사용 가능, 사인펜 불가).
5. 답안을 정정할 때 두 줄을 긋고 정정하시오(수정 테이프, 지우개 사용 가능, 수정액 불가).

※ **답안지는 절대 교체할 수 없습니다.**

■ 답안 작성 유의사항

1. 수험번호, 성명 등 신상에 관련된 사항을 답란이나 답안지의 여백에 드러내지 마시오.
2. 풀이과정이나 설명 없이 간략히 답만 쓰면 0점 처리됩니다.
3. 풀이의 과정을 순차적으로 서술하되, 필요한 경우에 수식 및 그림을 사용할 수 있으며, 수식은 반드시 문장 속에 포함 시키시오.

인하대학교
INHA UNIVERSITY

[문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(나) (산술, 기하평균) $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식이 성립한다.

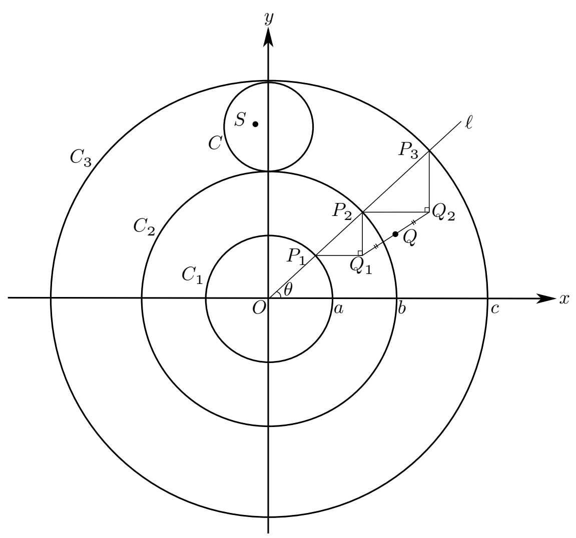
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

(다) x의 함수 y가 음함수 $f(x,y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$를 구한다.

(라) 영벡터가 아닌 두 평면 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$라고 할 때,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(※) 아래 그림과 같이 반지름이 a, b, c인 세 개의 원 C_1, C_2, C_3와 C_2, C_3에 접하고 중심이 y축에 놓여 있는 원 C가 있다. 원점 O를 지나는 직선 ℓ이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 θ일 때 (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$), C_1, C_2, C_3가 만나는 점을 각각 P_1, P_2, P_3라 하자. P_1을 지나고 x축에 평행인 직선과 P_2를 지나고 y축에 평행인 직선이 만나는 점을 Q_1이라 하고 P_2를 지나고 x축에 평행인 직선과 P_3를 지나고 y축에 평행인 직선이 만나는 점을 Q_2라 하자. 점 Q는 Q_1과 Q_2의 중점이다.



(1-1) (a) 점 Q의 자취가 그리는 곡선의 방정식을 구하시오. (5점)

(b) 세 점 O, Q_1, Q_2가 한 직선 위에 있을 때, a, b, c의 관계식을 구하시오. (5점)

(1-2) 세 점 O, Q_1, Q_2가 한 직선 위에 있고 $a=2$, $b=4$라 하자.

(a) Q가 그리는 곡선에서 접선이 좌표축과 이루는 삼각형의 넓이가 최소가 되는 점과 사각형 $P_1Q_1Q_2P_2$의 넓이가 최대가 될 때의 점 Q가 같음을 보이시오. (12점)

(b) 점 Q_1은 사각형 $P_1Q_1Q_2P_2$의 넓이가 최대가 되는 점이고 점 S는 원 C의 경계선을 포함하는 내부의 점일 때, $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OS}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (13점)

[문제 2] (30점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

(가) 집합 X에 대하여, $A_1, \dots, A_n$이 X의 부분집합들이고 다음 두 조건

(a) $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$

(b) 임의의 두 집합 A_i와 A_j에 대하여 $A_i \cap A_j = \emptyset$

을 만족할 때, $A_1, \dots, A_n$을 X의 분할이라고 부른다.

예를 들어, 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 300\}$에 대하여

$$A_1 = \{3k \mid k = 1, 2, \dots, 100\}$$
$$A_2 = \{3k-1 \mid k = 1, 2, \dots, 100\}$$
$$A_3 = \{3k-2 \mid k = 1, 2, \dots, 100\}$$

는 X의 분할이다.

(나) 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 결론을 부정하면 가정에 모순이 되거나 이미 참이라고 알려진 사실에 모순됨을 유도하여 주어진 명제가 참임을 증명하기도 하는데, 이와 같은 증명 방법을 귀류법이라고 한다.

(※) 집합 $X = \{1, 2, 3, \dots, 300\}$에 대하여, 세 집합

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \cup \{3k \mid 4 \le k \le 100\}$$
$$B_2 = \{4, 5, 6\} \cup \{3k-1 \mid 4 \le k \le 100\}$$
$$B_3 = \{7, 8, 9\} \cup \{3k-2 \mid 4 \le k \le 100\}$$

는 X의 분할이 된다. 이 때, 각 B_i, $i = 1, 2, 3$는 다음과 같은 조건을 만족한다.

(조건) 15 이상 300 이하의 모든 정수는 B_i의 서로 다른 두 원소의 합이다.

이와 같은 조건을 만족하는 X의 분할을 '좋은 분할'이라고 부르자. 우리는 이 집합 X에 대하여 다음 명제가 참임을 귀류법을 써서 증명하고자 한다.

[명제] 집합 X에 대하여 네 개의 부분집합으로 이루어진 좋은 분할은 존재하지 않는다.

(2-1) 먼저, 네 개의 집합 S_1, S_2, S_3, S_4가 $X = \{1, 2, 3, \dots, 300\}$의 좋은 분할이라고 가정하자. 그리고 각 $i = 1, 2, 3, 4$에 대하여, $T_i = S_i \cap \{1, 2, \dots, 23\}$이라 하자. 그러면, 각 i에 대하여 정수 $15, 16, \dots, 24$ 각각은 T_i의 서로 다른 두 원소의 합으로 표현되어야 한다. 각 T_i에는 최소한 몇 개의 원소가 있어야 하는가? (10점)

(2-2) T_1, T_2, T_3, T_4 중 적어도 하나는 5개의 원소를 가짐을 보이시오. (8점)

(2-3) 5개의 원소를 갖는 집합 T_j에 대하여, 10개의 정수 $15, 16, \dots, 24$ 각각이 T_j의 서로 다른 두 원소의 합이 되어야 한다는 사실로부터 발생하는 모순을 찾으시오. (12점)

[문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오.

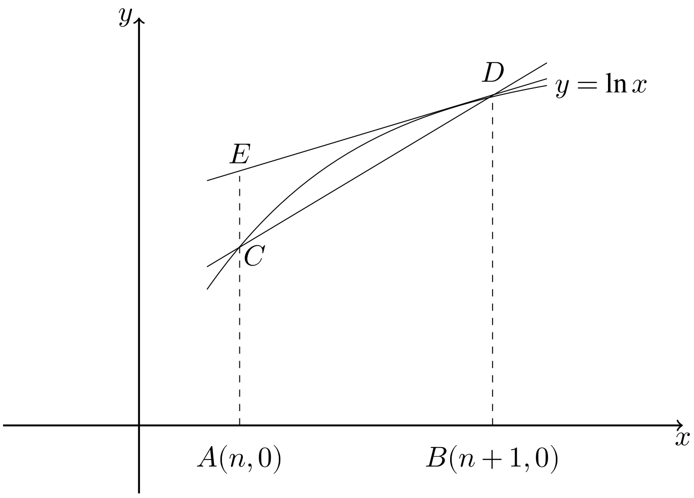
(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{n}{n+1}$$

(나) 로그함수의 부정적분은 다음과 같이 주어진다.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

(※) 다음 그림과 같이 $y=\ln x$ 의 그래프와 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$ 의 교점을 각각 C, D 라고 하자. 또한 $y=\ln x$ 의 $x=n+1$ 에서의 접선과 수직선 $x=n$ 의 교점을 E 라고 하자. 사다리꼴 $ABDC$ 의 넓이를 a_n, 사다리꼴 $ABDE$ 의 넓이를 c_n 이라 하고, $y=\ln x$ 의 그래프와 x 축, 그리고 두 수직선 $x=n$, $x=n+1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 b_n 이라고 하자.



(3-1) $0 \le x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (5점)

$$x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2(1-x)} \ge 0$$

(3-2) 양의 정수 n 에 대하여 $c_n - a_n$ 를 구하시오. (5점)

(3-3) 양의 정수 k 에 대하여 $a_k < b_k < c_k$ 이므로, $b_k - a_k < c_k - a_k$ 임은 자명하다. 모든 양의 정수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (10점)

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \frac{1}{4}$$

(3-4) 앞에서 얻은 부등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k - \frac{1}{4} < \sum_{k=1}^{n-1} a_k < \sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (n \ge 2)$ 을 이용하여, $n \ge 2$ 인 양의 정수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (15점)

$$e^{\frac{3}{4}} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < e \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>

<연 습 장>