2018학년도 인하대학교 수시모집 논술고사 자연계열 (오후2)

해설, 예시 답안, 평가 기준

■ 문항 1

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오후2)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열 (오후 2)	문항번호	■ 1번 □ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	부정적분의 정의, 적분과 미분의 관계, 미적분의 기본 정리	

2. 출제 의도

수열의 급수문제는 미적분 I, II에 걸쳐 매우 중요한 역할을 한다. 또한 이를 바탕으로 한 부피 문제는 학생들의 적분개념 형성 및 평가에 중추 역할을 하고 있다. 이와 같은 적분의 개념들을 평가하기 위하여 공교육의 현실과 수준을 반영하는 것이 마땅하다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보았다. 특히 [문항 1]은 미적분 I의 중요 내용인 부정적분의 정의, 적분과 미분의 관계, 미적분의 기본 정리의 내용을 적용하는 능력을 평가하고, 부분적분을 통하여 계산 능력을 평가하고자 하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** □ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 ■ 미적분 I □ 미적분 II □ 기하와 벡터

<table>
<tr><td rowspan="4">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (미적분 Ⅰ)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">(가)
(나)
(다)</td><td>성취기준 1</td><td>[미적분 Ⅰ]-라. 다항함수의 적분법, 1) 부정적분
미적1411/1412. 부정적분의 뜻을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[미적분 Ⅰ]-라. 다항함수의 적분법, 2) 정적분
미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 3</td><td>[미적분 Ⅰ]-라. 다항함수의 적분법, 2) 정적분
미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
미적분 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2017	157	(가)	○
미적분 Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	160, 161	(나), (다)	○

나) 교과서 외 자료를 활용한 경우 - 없음

4. 문항 해설

(1-1)은 문제 구성에서 주어진 두 함수의 등식에서 필요한 정보를 얻고, 곱의 미분법을 적용하여 원하는 결과를 서술하는 문제이다. 제시문의 모든 내용이 적용되는 문제이다. (1-2)는 주어진 $g(x)$를 (1-1)에서 얻은 등식에 적용하여 적분하는 문제이다. 부정적분의 정의를 적용하고, 부분적분법을 적용하고, 상수를 처리하는 단계로 구성되어 있다. 부분적분을 적용하는 부분은 $\int x\sin x\,dx$, $\int x\cos x\,dx$으로 학교 수업시간에 많이 다루는 내용이다. [문제 1]에 대해서 학생들은 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있을 것이다.

5. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항 번호</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="3">(1-1)</td><td>주어진 등식의 양변을 미분하자. 제시문 (나)와 제시문 (다)에 의하여 다음을 얻는다.
$f'(x) = g'(x) - \int_0^x f'(t)dt - xf'(x) + xf'(x) = g'(x) - \int_0^x f'(t)dt$</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>$= g'(x) - f(x) + f(0) = g'(x) - f(x) + g(0)$</td><td>5점</td></tr>
<tr><td>따라서
$\frac{d}{dx}(e^x f(x)) = e^x f(x) + e^x f'(x)$
$= e^x f(x) + e^x\{g'(x) - f(x) + g(0)\} = e^x\{g'(x) + g(0)\}$</td><td>5점</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(1-2)</td><td>$g(x) = \frac{x\cos x}{e^x}$ 이므로 (1)번에서 주어진 등식과 제시문 (가)를 이용하면
$e^x f(x) = \int e^x\{g'(x) + g(0)\}dx + C$
$= \int e^x\left\{\frac{(\cos x - x\sin x)e^x - x\cos x\, e^x}{e^{2x}}\right\}dx + C$
$= \int \cos x\,dx - \int x\sin x\,dx - \int x\cos x\,dx + C$</td><td>3점</td></tr>
<tr><td>여기서 제시문 (라)를 이용하면
$\int \cos x\,dx = \sin x$
$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$
$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x$</td><td>7점</td></tr>
<tr><td>따라서 $f(x) = e^{-x}\{\sin x + x\cos x - \sin x - x\sin x - \cos x + C\}$
$= e^{-x}\{x\cos x - x\sin x - \cos x + C\}$
$0 = g(0) = f(0) = -1 + C$로부터 $C = 1$</td><td>4점</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \frac{x\cos x - x\sin x - \cos x + 1}{e^x}$</td><td></td></tr>
</table>

6. 예시 답안

(1-1) (15점) 주어진 등식의 양변을 미분하자. 제시문 (나)와 제시문 (다)에 의하여 다음을 얻는다.

$$f'(x) = g'(x) - \int_0^x f'(t)dt - xf'(x) + xf'(x) = g'(x) - \int_0^x f'(t)dt$$

$$= g'(x) - f(x) + f(0) = g'(x) - f(x) + g(0)$$

따라서 $\frac{d}{dx}(e^x f(x)) = e^x f(x) + e^x f'(x)$

$$= e^x f(x) + e^x\{g'(x) - f(x) + g(0)\} = e^x\{g'(x) + g(0)\}$$

(1-2) (15점) $g(x) = \frac{x\cos x}{e^x}$ 이므로 (1)번에서 주어진 등식과 제시문 (가)를 이용하면

$$e^x f(x) = \int e^x\{g'(x) + g(0)\}dx + C = \int e^x\left\{\frac{(\cos x - x\sin x)e^x - x\cos x\, e^x}{e^{2x}}\right\}dx + C$$

$$= \int \cos x\, dx - \int x\sin x\, dx - \int x\cos x\, dx + C$$

여기서 제시문 (라)를 이용하면

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int x\sin x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x$$

따라서 $f(x) = e^{-x}\{\sin x + x\cos x - \sin x - x\sin x - \cos x + C\}$

$$= e^{-x}\{x\cos x - x\sin x - \cos x + C\}$$

$0 = g(0) = f(0) = -1 + C$로부터 $C = 1$ 따라서 $f(x) = \frac{x\cos x - x\sin x - \cos x + 1}{e^x}$

■ 문항 2

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오후2)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열(오후 2)	문항번호	□ 1번 ■ 2번 □ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어	로그함수의 그래프, 산술-기하평균 부등식	

2. 출제 의도

수열의 극한관련 문제는 미적분 I, II에 걸쳐 매우 중요한 역할을 한다. 또한 이를 바탕으로 응용문제는 학생들의 미적분개념 형성 및 평가에 중추 역할을 하고 있다. 이와 같은 극한 관련 개념들을 평가하기 위하여 공교육의 현실과 수준을 반영하는 것이 마땅하다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보았다. 특히 [문항 2]는 학교 수업에서 적용한 단편적인 방법을 학생들이 알고 있는 지식의 확장을 통하여 융합적인 방법을 제시하는 능력을 평가하고자 하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"의 일반과목** □ 수학 I ■ 수학 II □ 확률과 통계 □ 미적분 I ■ 미적분 II □ 기하와 벡터

<table>
<tr><td rowspan="3">관련 성취기준</td><td>관련 제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (수학 Ⅱ, 미적분 Ⅱ)</td></tr>
<tr><td>제시문</td><td>성취기준 1</td><td>[수학 Ⅱ]-가. 집합과 명제 2) 명제
수학2124. 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
수학 Ⅱ	정상권 외	㈜금성출판사	2017	54	제시문	
수학 Ⅱ	신할균 외	㈜지학사	2017	58	제시문	

나) 교과서 외 자료를 활용한 경우 - 없음

4. 문항 해설

수열 $\{a_n\}$, $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$에 대하여, (2-1) (a)는 로그함수 $y=\ln(1+x)$ $(x \ge 0)$의 그래프를 이용하여, 2-1) (b)는 제시문에 주어진 산술-기하평균 부등식을 이용하여 각각 $a_n < a_{n+1}$을 보이는 문제이다. 주어진 로그함수가 증가함수임을 알고 있다면 어렵지 않게 접근할 수 있는 문제이지만, 어떤 점을 택해야 주어진 수열이 나오는지를 파악하는 것이 문제의 핵심이다. (2-2)는 역시 산술-기하평균 부등식을 이용하는 것인데 양수의 항들을 어떻게 택하여 적용할 것인가가 핵심이다. 이는 제시문의 내용과 (2-1) (b)에서 적용한 방법을 응용하면 어렵지 않게 찾을 수 있을 것이다.

5. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(2-1) (a)	$x \ge 0$에서 로그함수 $y=\ln(x+1)$는 증가함수이므로 두 점 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{n+1}, \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$을 이은 직선의 기울기가 두 점 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{n}, \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$을 지나는 직선의 기울기보다 크다.	5점

	(별해) 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 는 $x \ge 0$ 에서 감소함수이다. (미분을 이용하여 $f(x)$ 가 감소함수임을 논리적으로 보인 경우 5점을 준다.)	
	즉 $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.	5점
(2-1) (b)	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \times 1 \le \left(\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$	5점
	$=\left(\dfrac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$	5점
(2-2)	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(\dfrac{1}{p}\right)^{q}$	5점
	$\le \left(\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p}}{n+q}\right)^{n+q} = \left(\dfrac{n+1+\dfrac{q}{p}}{n+q}\right.$	5점
	$1+\dfrac{q}{p}=q$ 이므로 $=\left(\dfrac{n+q}{n+q}\right)^{n+q}=1.$ 따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \le p^{q}$ 이다.	5점

6. 예시 답안

(2-1) (a) (10점)

$x \ge 0$ 에서 로그함수 $y=\ln(x+1)$ 는 증가함수이므로 두 점 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{n+1}, \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$을 이은 직선의 기울기가 두 점 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{n}, \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$을 지나는 직선의 기울기보다 크다.

즉 $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}.$

따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.

(별해) 함수 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 는 $x\ge 0$ 에서 감소함수이다. (미분을 이용하여 체크 가능)

즉 $0<a<b$ 이면 $f(a)>f(b)$ 이므로 $0<\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$ 이면 $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)>f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 이다. 즉

$$\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}}=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ 이다.

(2-1) (b) (10점)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times 1\le\left(\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(2-2) (15점)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(\frac{1}{p}\right)^{q}$$

$$\le\left(\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p}}{n+q}\right)^{n+q}=\left(\frac{n+1+\dfrac{q}{p}}{n+q}\right)^{n+q}$$

$1+\dfrac{q}{p}=q$ 이므로 $=\left(\dfrac{n+q}{n+q}\right)^{n+q}=1$. 따라서 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\le p^{q}$ 이다.

■ 문항 3

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사		
전형명	논술우수자(오후2)		
해당 대학의 계열(과목)	자연계열(오후 2)	문항번호	□ 1번 □ 2번 ■ 3번
출제 범위	핵심개념 및 용어		

2. 출제 의도

수열의 급수문제는 미적분 I, II에 걸쳐 매우 중요한 역할을 한다. 또한 이를 바탕으로 한 부피 문제는 학생들의 적분개념 형성 및 평가에 중추 역할을 하고 있다. 이와 같은 적분의 개념들을 평가하기 위하여 공교육의 현실과 수준을 반영하는 것이 마땅하다. 이를 위하여 학생들이 익숙한 내용과 수준으로 제시문과 발문을 교과서로부터 차용했으며 논제를 파악하는데 어려움이 없도록 충분한 정보를 제공하였다. 본 문제평가를 통하여 학생들이 학교에서 배운 지식을 객관적으로 평가하고 이를 바탕으로 창의적 발전가능성을 알아보았다. 특히 [문항 3]은 기하와 벡터의 중요 내용인 선분의 내분점의 벡터 표현, 내적을 이용한 삼각형의 넓이, 원뿔의 부피 등 기본적인 내용을 다루어 이해력과 기본 지식의 적용 능력을 평가하고자 하였다.

3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

적용 교육과정	**■ 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”의 일반과목** □ 수학 I □ 수학 II □ 확률과 통계 □ 미적분 I □ 미적분 II ■ 기하와 벡터

<table>
<tr><td rowspan="3">관련
성취기준</td><td>관련
제시문</td><td>성취기준</td><td>과목명: (기하와 벡터)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(가)
(나)</td><td>성취기준 1</td><td>[기하와 벡터]-다. 공간도형과 공간좌표, 2) 공간좌표
기벡1323. 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>성취기준 2</td><td>[기하와 벡터]-나. 평면벡터, 2) 평면벡터의 성분과 내적
기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

2) 자료 출처

가) 교과서 내 자료만 활용한 경우

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행연도	참고쪽수	관련 제시문	재구성 여부
기하와 벡터	김창동 외	㈜교학사	2017	73, 175	(가)	○
기하와 벡터	황선욱 외	좋은책신사고	2017	80	(나)	○
기하와 벡터	정상권 외	㈜금성출판사	2017	171	(나)	○

나) 교과서 외 자료를 활용한 경우 - 없음

4. 문항 해설

(3-1)은 [그림 1]에서 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 삼각형 OAP의 넓이를 구하는 교과서에서 많이 보는 문제이다. 세 점을 모두 구할 수 있기 때문에 삼각형의 넓이를 구하는 공식 적용을 방지하기 위해서 제시문 (나)에서 주어진 넓이 공식과 벡터의 내적을 이용하도록 하였다. 내적의 정의를 잘 이해하고 있다면 $\sin\theta$를 $\sqrt{1-\cos^2\theta}$로 변형 후 내적을 이용하여 해결할 수 있다. (3-2)는 [그림 2]에서 주어진 조건들을 이해하고 나서, (3-2) (a)는 점 H의 좌표와 k의 범위를 구하는 문제인데, 직선 OH가 평면 α에 수직이므로 평면 α의 법선벡터가 방향벡터라는 사실로부터 직선의 방정식을 세우고 평면 α에 대입하여 교점을 구할 수 있고, 선분 OH의 길이로부터 k의 범위를 찾을 수 있다. 그리고 (3-2) (b)는 꼭짓점이 P_k이고 밑면이 S_k인 원뿔의 부피를 구하는 문제인데, 원뿔의 밑면인 원 S_k의 반지름을 구할 수 있다면 원뿔의 부피는 k에 대한 3차 다항식으로 나타난다. 미분을 이용하여 최댓값을 구할 수 있다.

5. 채점 기준

하위문항 번호	채점 기준	배점
(3-1)	사면체 $OABC$의 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 구하면 $A\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$이다.	2점
	벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분은 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} = \left(0, \frac{1}{3}, 0\right) + \left(0, 0, \frac{4}{3}\right) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 이다.	3점
	$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각을 $\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 OAP의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\lvert\overrightarrow{OP}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert^2\lvert\overrightarrow{OP}\rvert^2 - (\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OP})^2}$	7점
	$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{16}{9}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$	3점
(3-2) (a)	평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n} = (1, 2, 1)$이다. $\vec{n}$에 평행하고 원점을 지나는 직선은 $x = t,\ y = 2t,\ z = t$ (t는 0이 아닌 임의의 실수) 이를 평면 α에 대입하면 $t + 4t + t = 6t = 2$, 즉 $t = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$이다.	5점
	$\lvert\overrightarrow{OH}\rvert = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 이므로 k의 범위는 $0 < k < \sqrt{\frac{2}{3}}$ 이다.	5점
93-2) (b)	원 S_k의 반지름을 r라 하면 $r = \sqrt{\frac{2}{3} - k^2}$ 이다. 따라서 원뿔의 부피 $f(t)$는 $f(t) = \frac{1}{3}\pi r^2 k = \frac{1}{3}\pi k\left(\frac{2}{3} - k^2\right) = \frac{2\pi}{9}k - \frac{\pi}{3}k^3$	5점
	$f'(k) = \frac{2\pi}{9} - \pi k^2 = 0$으로부터 $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$이다. $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 주변에서 $f'(k)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로	5점
	범위 $0 < k < \sqrt{\frac{2}{3}}$ 에서 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\pi}{9}\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{3}\frac{2\sqrt{2}}{27} = \frac{4\sqrt{2}}{81}\pi$는 최댓값이다.	5점

6. 예시 답안

(3-1) (15점)

사면체 $OABC$의 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 구하면 $A\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$이다.

벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분은 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}=\left(0,\frac{1}{3},0\right)+\left(0,0,\frac{4}{3}\right)=\left(0,\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$이다.

$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각을 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$라 하면 삼각형 OAP의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{16}{9}\right)-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$$

(3-2) (a) (5점)

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면 $\vec{n}=(1,2,1)$이다. $\vec{n}$에 평행하고 원점을 지나는 직선은

$$x=t,\ y=2t,\ z=t\,(t\text{는 0이 아닌 임의의 실수})$$

이를 평면 α에 대입하면 $t+4t+t=6t=2$, 즉 $t=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $H\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$이다.

$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$이므로 k의 범위는 $0<k<\sqrt{\frac{2}{3}}$이다.

(3-2) (b) (15점)

원 S_k의 반지름을 r라 하면 $r=\sqrt{\frac{2}{3}-k^2}$이다. 따라서 원뿔의 부피 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{3}\pi r^2k=\frac{1}{3}\pi k\left(\frac{2}{3}-k^2\right)=\frac{2\pi}{9}k-\frac{\pi}{3}k^3$$

$f'(k)=\frac{2\pi}{9}-\pi k^2=0$으로부터 $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$이다. $k=\frac{\sqrt{2}}{3}$주변에서 $f'(k)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 범위 $0<k<\sqrt{\frac{2}{3}}$에서

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{2\pi}{9}\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{3}\frac{2\sqrt{2}}{27}=\frac{4\sqrt{2}}{81}\pi$는 최댓값이다.